XIII.

Ueber die Gesetze des Stosses, vorzüglich in Anwendung auf den hydraulischen Stösser (Belier hydraulique),

von

CARL CHRISTIAN LANGSDORF

in Heidelberg.

§. 1.

Die Lehre vom Stosse der Körper gehört unstreitig zu den feinsten und wichtigsten in der Mechanik. In meinem Handbuche der mechanischen Wissenschaften habe ich für harte und mehr oder minder elastische Körper (S. 407.) die allgemeine Formel angegeben:

$$G = \frac{M.C - m.c - m.(xC + yc)}{M + m}.$$

Dabey ist

C die Geschwindigkeit der Masse M vor dem Stosse;

c die nach einer der C entgegengesetzten Richtung genommene Geschwindigkeit der Masse m vor dem Stosse;

G die Geschwindigkeit der Masse M nach dem Stosse, in derselben Richtung wie C verstanden;

x der Grad der Elasticität von M, den der vollkommenen Elasticität $= 1$ gesetzt;

y der Grad der Elasticität von m.

§. 2.

§. 3.

Ungleich schwieriger ist die Bestimmung der Gesetze des Stosses für Körper, die, mehr oder weniger, flüſsig, weich oder beugsam sind.

In vielen Fällen der Ausübung kann man mit dem Resultate zufrieden seyn, welches die Voraussetzung vollkommen harter Körper giebt, und schon für diesen Fall gewährt uns die obige Formel höchst wichtige Anwendungen. Es giebt sogar Fälle, wo jenes Gesetz des Stosses harter Körper auch auf alle Arten weicher und flüſsiger Körper anwendbar bleibt, wenn nämlich diese Materien zwischen festen Wänden versperrt, wie in Röhren, gegen einander stossen.

§. 3.

Die Mechanik giebt uns folgenden für die Ausübung höchst wichtigen Satz:

Wenn ein Körper nach einer bestimmten Richtung mit der Geschwindigkeit C abgeworfen wird, ihm aber in dieser Richtung eine unveränderliche Kraft entgegen wirkt, vermöge der er in 1 Sek. den Weg g′ durchlaufen könnte, wenn sie allein in ihn wirkte, so giebt die Gleichung

$$s = \frac{C^2}{4g'}$$

den Weg an, welchen der Körper wegen der in ihn wirkenden Kraft, mit allmählig abnehmender Geschwindigkeit durchlaufen wird, so daſs am Ende dieses durchlaufenen Wegs seine Geschwindigkeit = o ist.

§. 4.

Auf §. 1 u. 3 beruht die ganze Theorie der Ramme, mit der man Pfähle in die Erde eintreibt. Es sey allgemein

die

die Masse des Rammenklotzes . . . . . . $=P$,
— — des Pfahls . . . . $=Q$,
der Widerstand des Pfahls . . . . $=R$,
die Fallhöhe des Rammklotzes . . . . . . $=H$,
die hierzu gehörige Geschwindigkeit . . . $=C$,
die Geschwindigkeit, mit welcher das Rammklotz sammt Pfahl im Augenblicke des Stosses tiefer zu sinken strebt . . . . $=G$,
die Tiefe, um welche der Pfahl durch einen Schlag niedergetrieben wird . . . . $=\tau$,
das Gewicht, welches man auf einen Pfahl noch auflegen müſste, damit er ohne Schlag tiefer sinken könnte . . . . $=Z$.

Man soll das Verhalten aller dieser Gröſsen gegen einander bestimmen.

Aufl. 1. Nach §. 3 ist $\tau = \frac{G^2}{4g'}$

2. Setzt man (§. 1) $M=P$, $m=Q$, $c=0$, $x=y=0$, so wird

$$G = \frac{P.C}{P+Q}.$$

Auch ist $g' = \frac{R}{P+Q}.\, g,$

unter g die Beschleunigung der natürlichen Schwere verstanden.

3. Man hat also

$$\tau = \frac{\frac{P^2 C^2}{(P+Q)^2}}{4 \cdot \frac{R}{P+Q} \cdot g} = \frac{P^2 C^2}{4 \cdot (P+Q) \cdot R \cdot g},$$

oder $\tau = \frac{P^2}{(P+Q)\, R} \cdot H.$

4. Es ist überdas, weil die Kraft P einen Theil des Widerstandes überwindet, $R = Z - P$ *); also

*) In diesem Ausdrucke gilt P als Kraft, nicht blos als Masse. Es ist aber unnöthig, dazu hier einen neuen Buchstaben einzuführen.

$$\tau = \frac{P^2}{(P+Q).(Z-P)}.H.$$

5. Während dem Sinken des Pfahls bey einem Schlage wird die Anzahl der Berührungspuncte mit der Erde, durch die er durchdringt, vergröfsert. Es sey die Länge des schon eingetriebenen Stücks $= \lambda$, so ist im Augenblicke des Stosses der Widerstand $= Z - P$, am Ende des vollendeten Stosses $= (1 + \frac{\tau}{\lambda}).(Z-P)$, wenn er der Anzahl von Berührungspuncten proportional gesetzt wird. Dann könnte man also das arithmetische Mittel $\frac{2\lambda+\tau}{2\lambda}.(Z-P)$ anstatt $Z-P$ schreiben. Ich glaube aber, diese Correction unterlassen zu dürfen, weil im Gegentheil bey wirklicher Bewegung des Pfahls der Widerstand des Bodens etwas kleiner würde angenommen werden können.

6. Die obige Formel läfst sich nun auch so ausdrücken:

$$\tau = \frac{1}{(1+\frac{Q}{P}).(Z-P)}.PH.$$

Hieraus folgt: Die Tiefe τ nimmt in gleichem Verhältnifse mit der Fallhöhe H, aber in stärkerem Verhältnifse als das Gewicht P zu.

Man gewinnt also z. B. bey einem 8 Centner schweren Rammklotze und einer Fallhöhe von 3 Fufsen mehr, als bey einem $\frac{3}{8}$ Centner schweren Rammklotze und einer Fallhöhe von 9 Fufsen.

7. Aus Nro. 4 folgt auch $\tau.(P+Q).(Z-P) = P^2.H$;

also
$$Z = \frac{P^2 H}{\tau.(P+Q)} + P.$$

Diese Formel ist für den Baumeister wichtig; sie giebt das Gewicht an, mit welchem ein Pfahl beschwert werden könnte, bevor er tiefer zu sinken begänne, wenn man nur beym

Ein-

Einrammen bemerkt, wie tief ihn ein einzelner Schlag niedertreibt.

Ex. Ein Pfahl zu 14 Ctr. schwer wurde durch den letzten Schlag eines 12 Ctr. schweren Rammklotzes bey einer Fallhöhe von 3 Fuſs noch um $\frac{1}{2}$ Zoll tief eingetrieben; wie groſs wird das Gewicht seyn, womit man diesen Pfahl beschweren kann?

Hier ist $P=12$, $Q=14$, $H=36$ Zoll, $\tau=\frac{1}{2}$ Zoll; daher

$$Z=\frac{12.36}{\frac{1}{2}.(12+14)}+12=45,23 \text{ Ctr.}$$

§. 5.

Man denke sich auf den Pfahl einen compressiblen Körper gelegt, auf den das Rammklotz niederfalle; was wird jetzt für ein Erfolg Statt finden?

Der Pfahl wird nicht eher zu sinken anfangen, als bis eine Compression Statt gefunden hat, bey welcher die comprimirten Theilchen sich mit einer Kraft $=Z$ wieder auszudehnen streben. Das Klotz muſs also die Theilchen bis auf eine gewisse Tiefe τ' niederdrücken, bevor der Pfahl weicht.

Während der kurzen Zeit vom Augenblicke der ersten Berührung an bis zu dem Augenblicke, da jene Theilchen um die Tiefe τ' comprimirt worden sind, leidet das Klotz in der Fortsetzung seiner Bewegung einen bedeutenden Widerstand, den ich der Tiefe des Niederdrückens proportional setzen will, weil ich ihn so bey Versuchen mit starken eisernen Federn gefunden habe. Hiernach findet also das von der Höhe H schon herabgefallene Klotz in der Tiefe $H+x$ einen Widerstand $=\frac{x}{\tau'}.Z$. Es wirkt also dem Klotze P eine verzögernde Kraft f entgegen, die $=\frac{\frac{x}{\tau'}.Z}{P}=\frac{x.Z}{\tau'.P}$ ist.

Die verlorne Geschwindigkeit des Klotzes, nachdem es den Weg $H+x$ durchlaufen hat, gehöre der Höhe v zu, so ist

$$f:1=dv:dx \text{ oder } f=\frac{dv}{dx};$$

daher

$$\frac{xZ}{\tau' P}=\frac{dv}{dx} \text{ oder } dv=\frac{Zx\,dx}{\tau' P},$$

und

$$v=\frac{Zx^2}{2\tau' P}+\text{Const.}$$

Für $x=0$ ist $v=0$, also Const. $=0$, und nun vollständig

$$v=\frac{Z.x^2}{2\tau'.P}.$$

Für die ganze Tiefe τ' wird $x=\tau'$, also

$$v=\frac{Z.(\tau')^2}{2\tau'.P}=\frac{Z\tau}{2P}.$$

Folglich bleibt jetzt nur noch

$$C=2\sqrt{g}.\left(H-\frac{\tau' Z}{2P}\right).$$

Wäre z. B. $\tau'=\frac{1}{4}$ Fuſs, $Z=24P$, so wäre im obigen Falle (Ex. §. 4.)

$$C=2\sqrt{g}.\left(3-\frac{\frac{1}{4}.24.P}{2P}\right)=0.$$

§. 6.

Setzt man nun (§. 4. No. 4) $H-\frac{\tau' Z}{2P}$ statt H, so erhält man allgemeiner

$$\tau=\frac{P^2}{(P+Q).(Z-P)}.\left(H-\frac{\tau'.Z}{2P}\right),$$

also $\tau=0$, sobald $\frac{\tau' Z}{2P}=H$ wird.

Da Z immer gröſser werden muſs, je tiefer der Pfahl schon eingetrieben ist, und mit der Zunahme von Z zugleich τ' gröſser werden muſs, so würde es in allen Fällen endlich kommen, daſs $\tau=0$ werden müſste, oder daſs der Pfahl bey der Falliche H und dem Gewichte P des Rammklotzes nicht tiefer eingetrieben werden könnte.

§. 7.

§. 7.

Eben hierauf beruht die Gröſse des Widerstandes, welchen die mit Weiden besetzten Ufer den Eisgängen entgegen zu setzen vermögen. Man muſs aber in der Anwendung auf Eisgänge Z statt Z — P schreiben, weil im Ausdruck Z — P die Gröſse P nicht als Masse schlechthin, sondern als Gewicht oder als eine von der Schwere getriebene Masse steht, bey Eisgängen aber P in diesem Sinne nicht wirkt.

Die einzelnen Eismassen vertreten die Stelle des Rammklotzes; P bezeichnet die Gröſse ihrer Masse. Wenn die Geschwindigkeit einer Eismasse C ist, so ist $H = \frac{C^2}{4g}$; Q ist die dem Eisstosse ausgesetzte Masse, z. B. eine Mauer, ein Pfahl, ein Brückenpfeiler u. d. gl.; Z ist die Gröſse des Widerstandes. Jede Eismasse hat einen gewissen Grad der Weichheit und der Brechbarkeit, so daſs der Werth von τ' dabey nicht ganz unmerklich ist, und daher auch bey sehr beträchtlichen Eismassen im Anprellen gegen harte Gegenstände $H = \frac{\tau' Z}{2P} = 0$ werden kann, welches dann der Eisstoſs unschädlich macht.

Ist hingegen P sehr vielmal gröſser als Z, wo dann wegen der Dicke der Eismassen gewöhnlich τ' desto kleiner ist, so wird $\frac{\tau' Z}{2P}$ eine sehr kleine Gröſse, und der Werth von τ kann so bedeutend werden, daſs der Eisstoſs den Widerstand bey weiten übertrifft.

§. 8.

Es sey ab (Taf. VI Fig. 1) ein beugsamer Balken, hier im lothrechten Durchschnitte; M, N seyen Pfähle, die nur dann erst tiefer sinken, wenn jeder mit einem Gewicht Z beschwert wird; ein Gewicht $= 2Z$ in der Mitte v aufgelegt beuge den Balken aus cd in cmd, so daſs die

 Tiefe

Tiefe $vm = \tau'$ werde; man soll den Erfolg bestimmen, wenn ein Gewicht $= P$ von der Höhe H herab, auf den Balken fällt.

Aufl. Die Pfähle werden erst zu sinken anfangen, wenn das fallende Klotz den Balken bis zur Tiefe $+ vm = \tau'$ niedergebogen hat. Der Erfolg ist also derselbe, als fiele ein Klotz, dessen Gewicht $= \frac{1}{2} P$ wäre, auf einen Pfahl, den es erst auf die Tiefe τ' comprimiren müfste, bevor er zu sinken anfienge. Des Pfahls Gewicht sey nun $= Q$, das Gewicht des halben Balkens $= q$, so mufs man (§. 6) $Q + q$ statt Q, und $Z - (\frac{1}{2} P + q)$ statt $Z - P$, ausserdem aber $\frac{1}{2} P$ statt P schreiben. Dieses giebt

$$\tau = \frac{\frac{1}{4} P^2}{(\frac{1}{2}P + Q + q) \cdot (Z + \frac{1}{2}P - q)} \cdot \left(H - \frac{\tau' Z}{P}\right),$$

welches die Tiefe ist, zu der bey unverändertem Widerstande die Pfähle bey einem einzigen Stosse oder Falle des Klotzes tiefer einsinken werden.

§. 9.

Die Tiefe, bis zu der sich der Balken beugt, bevor er zerbricht, sey $= \tau''$, und das Gewicht, das, in der Mitte aufgelegt, dieses Beugen bewirkt, und bey einiger Vergröfserung das Brechen bewirken würde, sey $= Z'$, so ist der Balken gegen das Brechen beym Auffallen des Klotzes nur dann gesichert, wenn seine Geschwindigkeit, nachdem sich der Balken bis zur Tiefe τ'' gebogen hat, $= 0$ geworden ist, also für

$$H - \frac{\tau'' . Z'}{2 P} = 0.$$

Also ist die gröfste Höhe, von der das Klotz auf den Balken ohne Gefahr des Brechens fallen darf,

$$H = \frac{\tau'' . Z'}{2 P}.$$

Ist also $P = \frac{1}{2} Z$, so wird $H = \tau''$.

Wäre

Wäre $Z' = 20 . P$, so wäre $H = 10 . r''$. Kann sich z. B. der Balken 4 Zoll tief beugen, bevor er Anstalten zum Brechen macht, so wäre im letztern Falle $H = 10 . 4 = 40$ Zoll. Liefse man das Gewicht $P = \frac{1}{20} Z'$ höher als 40 Zoll hoch auf die Mitte des Balkens herabfallen, so wäre er in Gefahr zu brechen.

Es gehe z. B. ein 200 ℔. schwerer Mensch über ein hohl liegendes Bret, das in seiner Mitte höchstens 400 ℔. zu tragen vermöchte, bey diesem Gewichte aber sich 6 Zoll tief beugen müfste, so würde es sich, sobald der Mensch in die Mitte käme, genau genug um 3 Zoll senken, und daher noch 3 Zoll tiefer sinken können.

Der Mensch gebe sich nun durch plötzliches Niederbücken des oberen Körpers eine Geschwindigkeit C, so wäre $H = \frac{C^2}{4g}$, $r'' = 3$ Zoll, $P = 200$ ℔, Z' nur noch $= 200$ ℔ (weil das Bret schon mit $P = 200$ Pfund beschwert ist), also

$$\frac{C^2}{4g} = \frac{3 . 200}{2 . 200} = 1{,}5 \text{ Zoll.}$$

Setzt man $g = 15$ Fufs $= 180$ Zoll (Paris.), so hat man

$$C^2 = 720 . 1{,}5 = 1080$$

$$\text{und} \quad C = \sqrt{1080} = 33 \text{ Zoll.}$$

Bückte sich der Mensch so schnell nieder, dafs sich die Mitte des Brets mit einer Geschwindigkeit von mehr als 33 Zollen am Anfange der Bewegung niedersenkte, so käme er in Gefahr durchzubrechen.

§. 10.

Sehr behende Menschen können über Körper hinspringen, die mit demselben Gewicht nicht beschwert werden könnten, ohne zu versinken, oder zu zerbrechen. So könnte z. B. ein Mensch von 140 Pf. ohne Gefahr des Einbrechens auf ein hohl liegendes Bret springen, das nur 80 Pf. zu tragen vermöchte, wofern er nur den durch den Sprung erreichten Standpunct eher wieder verläfst, als sol-

solcher bis zu der Tiefe niedergebogen worden, über welche hinaus das Bret zu zerbrechen beginnt. So kann er über Steine, welche in sumpfigem Boden liegen, ohne Gefahr hinspringen, wenn solche gleich kaum 80 Pf. zu tragen vermöchten, ohne vollends zu versinken, wofern er nur jeden Stein eher wieder verläfst, als er bis unter die Oberfläche des Sumpfs eingedrückt werden kann.

ab, cd (Fig. 2) seyen Breter, z. B. 1 Zoll dick; das Stück bc sey so dünn, dafs in der Mitte m ein nur 25pfündiger Körper durchbrechen würde; die Länge bc betrage z. B. nur 6 Zoll; k sey eine 50pfündige Kugel, die mit einer Geschwindigkeit von 10 Fufs in b ankomme, so wird solche, ohne einzubrechen, über bc wegrollen, nicht als ob der lothrechte Druck auf bc durch die schnelle Bewegung der Kugel vermindert würde, sondern weil die Kugel in $\frac{1}{20}$ Sec. schon über das Stück bc weg ist, und zum Einbeugen und Brechen längere Zeit erfodert wird.

§. 11.

Befindet sich in AB (Fig. 3) z. B. in m ein Körper $\mathfrak{P}$, in welchen nach der Richtung AB eine unveränderliche Kraft Z wirkt, so wird ihn diese als eine beschleunigende Kraft $f = \frac{Z}{\mathfrak{P}}$ von m nach B zu treiben streben, und ihm in der Zeit t eine Geschwindigkeit $c' = 2g't = 2\frac{Z}{\mathfrak{P}}.gt$ mittheilen. Käme er aber in m schon mit der Geschwindigkeit C von B nach A an, und wirkte von nun an nach entgegengesetzter Richtung jene Kraft Z in ihn, so wäre am Ende der Zeit t seine Geschwindigkeit nach A noch

$$c = C - \frac{2Z}{\mathfrak{P}}.gt;$$

also

$$C - c = \frac{2Z}{\mathfrak{P}}.gt,$$

und

$$Z = \frac{C - c}{2gt}.\mathfrak{P}.$$

Diese

Diese Gleichung giebt also die Gröſse der bewegenden Kraft, welche einer mit der Geschwindigkeit C in Bewegung gesetzten Summe von Körpertheilchen, die sich durch $\mathfrak{P}$ ausdrücken läſst, während der Zeit t entgegen wirken muſs, wenn ihre Geschwindigkeit C am Ende der Zeit t noch $= c$ seyn soll.

§. 12.

Bey ströhmendem Wasser im Gerinne oder auch bey einem isolirten Strahl, dem eine Fläche senkrecht entgegen gesetzt ist, giebt die Formel für Z die Gröſse des Wasserstosses an, wofern nur die Stoſsfläche groſs genug ist, um den ganzen Querschnitt des in Bewegung gesetzten Wassers aufzufangen. Es sey nämlich W die Gröſse des Wasserquerschnitts, in welchem die Wassertheilchen noch ihre durch die Stoſsfläche nicht abgeänderte natürliche Geschwindigkeit C haben; die Geschwindigkeit, mit welcher die Stoſsfläche dem Wasser ausweicht, sey $= c$, so können sämmtliche in der Zeit t durch W durchflieſsende Wassertheilchen in dem Augenblicke ihrer Berührung mit der Stoſsfläche nur noch mit der Geschwindigkeit c ihre Bewegung fortsetzen.

Die Summe der Wassertheilchen, welche auf diese Weise in der Zeit t einen Theil ihrer Geschwindigkeit C verlieren, so daſs solche nur noch $= c$ bleibt, ist $t \times C W = \mathfrak{P}$, daher $\frac{\mathfrak{P}}{t} = C. W$ und nun wird

$$Z = \frac{C - c}{2g}. C W.$$

§. 13.

Dieses ist also die bewegende Kraft, welche der Wassermasse C. W entgegen wirken muſs, um die Geschwindigkeit C in die c zu verwandeln. Da nun der Wasserstoſs wegen des gleichförmigen Beharrungsstandes dieser bewegenden Kraft gleich seyn muſs, so hat man, wenn man die Gröſse des Stoſses mit P bezeichnet,

I.

$$\text{I.}\quad P = \frac{C - c}{2g} . C W.$$

Wird die in 1. Sec. anstossende Wassermenge mit M bezeichnet, so hat man auch

$$\text{II.}\quad P = \frac{C - c}{2g} . M.$$

Sind H, h die zu C, c gehörigen Höhen, so hat man ferner

$$P = \frac{2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh}}{2p} . M,$$

oder

$$\text{III.}\quad P = \frac{\sqrt{H} - \sqrt{h}}{\sqrt{g}} . M.$$

Schreibt man hier $W . 2\sqrt{gH}$ statt M, so hat man

$$P = \frac{\sqrt{H} - \sqrt{h}}{\sqrt{g}} . W\, 2\sqrt{gH}$$

oder

$$\text{IV.}\quad P = 2W . (H - \sqrt{Hh}).$$

Auch für den Stofs im unbegränzten Wasser, wie Fig. 4, gilt die allgemeine Formel

$$Z \text{ oder } P = \frac{C - c}{2gt} . \mathfrak{P}.$$

Nur fehlt hierbey die Bestimmung des Werths von $\frac{\mathfrak{P}}{t}$, der vorhin für die angenommene hinlänglich grofse Stofsfläche $=$ C. W war, wo C und W als bestimmbare Gröfsen angenommen werden konnten. Im jetzigen Falle (Fig. 4) kann zwar auch z. B. bey a f die Geschwindigkeit C als bestimmbar angesehen werden; aber der Querschnitt, aus welchem sämmtliche Wassertheilchen wirklich zum Stosse kommen, oder W bleibt beym unbegränzten Wasser unbestimmt; ob man dafür den Querschnitt o m oder den a f oder irgend einen andern nehmen soll, bleibt unentschieden, folglich $\frac{\mathfrak{P}}{t}$ oder C. W eine unbekannte Gröfse, die nur in Begründung auf gewisse Hypothesen näherungsweise angegeben werden kann.

Der

Der hydraulische Stösser (Stofsheber, Belier hydraulique).

§. 14.

Eine sehr nützliche Anwendung des Wasserstosses ist die beym hydraulischen Stösser.

Eine Beschreibung dieser Maschine findet man in der Beschreib- und Abbildung des hydraulischen Widders (Leipz. 1806) S. 17 u. 18, und, nebst einer sehr zahlreichen Menge angestellter Versuche, in Eytelwein's Bemerkungen über die Wirkung und vortheilhafte Anwendung des Stofshebers, Berlin, 1805. Hier kann daher folgende kurze Beschreibung genügen.

Man denke sich ein Behältnifs (Fig. 5) bis an a b mit Wasser angefüllt und durch beständigen Zuflufs immer so angefüllt erhalten; bey e und c seyen Ventile (Klappen - oder wie hier Scheibenventile) angebracht. Die Leitröhre mn endige sich bey c in einen Windkessel M, aus dem sich eine Steigröhre fd erhebt, die auch seitwärts ausgehen und überdas schief geleitet seyn könnte.

Die untere Steigröhrenmündung f liege tiefer als der Spiegel a b, so wird das Wasser sich vermöge seines Falles gleich anfänglich über die Stelle f erheben und so die Luft im Raume k k versperren, und die Ventilscheibe c wird dann zufallen. Die an der Oeffnung anliegende Ventilscheibe e sey leicht genug, um durch den Druck des Wassers in dieser Lage zu beharren, so dafs jetzt alles ruhig ist.

Drückt man nunmehr die Scheibe e nieder, so strömt das Wasser durch die Ventilöffnung; die Wassermasse $\alpha\,\beta$ geräth in Bewegung,

wegung, und strebt diese Bewegung fortzusetzen. Die Scheibe e, die nur durch einen äufseren Druck herabgekommen war, steigt nun, sich selbst überlassen, wieder aufwärts und schlägt wieder an die Oeffnung an. Dagegen hat die fortgesetzte Bewegung der Wassermasse $\alpha\beta$ den Erfolg, dafs die Scheibe c wieder erhoben wird und neues Wasser in den Windkessel einströmt und zum Theil in der Steigröhre höher hinauf steigt, bis die Scheibe c wieder zurückfällt. Beym Zurückfallen schlägt sie mit einiger Heftigkeit auf den Rand der Oeffnung, wodurch das Wasser unterhalb der Oeffnung einen starken Stofs empfängt, welcher ein momentanes Rückströmen des Wassers nach $\beta\alpha$ zur Folge hat. Der atmosphärische äufsere Druck auf die Scheibe e erhält hierdurch das Uebergewicht, und die Scheibe e sinkt daher herab. Das Wasser fängt jetzt von neuem an, bey e auszuströmen; die Scheibe steigt wieder aufwärts, bis sie die Oeffnung aufs Neue verschliefst, da dann das Wasser in der Leitröhre vermöge seines Bewegungsmomentes die Scheibe c wieder erhebt, womit der vorige Erfolg wieder eintritt, dafs nämlich neues Wasser in den Windkessel einströmt, dann die Scheibe c wieder zurückfällt, u. s. f. So dauert nun das gegenseitige Spiel der beyden Ventilscheiben fort, bis endlich das Wasser die ihm durch die Steigröhre angewiesene gröfste Höhe d erreicht hat und dann bey ε beständig ausströmt. Denselben Erfolg hat man auch bey den Einrichtungen Fig. 6 u. 9, wo die Ventilöffnung e anders angebracht ist, und Klappenventile statt der Scheibenventile bey c zu sehen sind. Aufserdem sind zweckdienliche Federn $\varkappa$ und ζ (Fig. 9) vorgerichtet. Auch bey e ist Fig. 6 ein Klappenventil angebracht, Fig. 9 aber ein Ventil eigener Art, das ich weiter unten näher beschreiben werde. Man könnte es ein prismatisches Klappenventil nennen. Hier ist nun (Fig. 6 u. 9).

E das Sperrbehältnifs,
A das Zuflufsbehältnifs,
c das Steigventil,

e das Sperrventil,
M der Windkessel,
fd die Steigröhre,
$\alpha\beta$ die Leitröhre (Fig. 5 ist sie $\alpha\beta + \delta c$; ich sehe aber vor der Hand δc als unbedeutend an),
ax oder ve die Druckhöhe,
ye die Förderungshöhe.

§. 15.

Um die Bedeutung der Bezeichnungen, deren ich mich in der Folge bedienen werde, jedesmal leicht aufsuchen zu können, will ich sie hier ein - für allemal angeben. Es sey nämlich

die Länge der Leitröhre $\alpha\beta$	$= \lambda$
— — des Sperrbehältnisses	$= \lambda'$
— — des Stücks δc	$= \lambda''$
die Weite der Leitröhre $\alpha\beta$	$= \omega$
der zugehörige Durchmesser	$= d$
für das Stück δc eben so	
die Oeffnung des Steigventils	$= \omega'$
— — — Sperrventils	$= \omega''$
die Weite des Sperrbehältnisses im Mittel genommen	$= W$
der zugehörige Durchmesser	$= D$
die Weite vom cylindrischen Theile des Windkessels	$= \mathfrak{W}$
der zugehörige Durchmesser	$= \mathfrak{D}$
die Förderungshöhe ye	$= H$
die Weite der Steigröhre	$= \mathfrak{w}$
ihr Durchmesser	$= \mathfrak{d}$
ihre Länge	$= \mathfrak{L}$
die Druckhöhe ax	$= h$
die Menge des Wassers, welches bey jedesmaliger Eröffnung des Sperrventils verloren geht	$= M'$

die, welche in jeder Minute verloren geht . = 𝔐′
die Menge des Wassers, welches bey jedesmaliger Eröffnung des Sperrventils in den Windkessel einströmt . . . . = M
diese Menge für eine Minute . . . . . . = 𝔐.

Um soviel möglich Brüche zu vermeiden, werde ich alles in Zollen ausdrücken, wenn nicht die Anlage ziemlich ins Grofse geht.

§. 16.

Bekanntlich darf man nur das Product aus der Förderungshöhe in die erhobene Wassermenge mit dem Producte aus der Fall- oder Druckhöhe in die verbrauchte Wassermenge dividiren, um das Effectsverhältnifs zu finden, das nur bey der gröfstmöglichen Vollkommenheit einer Maschine und nur bey Beseitigung aller Nebenhindernifse = 1 seyn kann. Zur Festsetzung des richtigen Ausdrucks für das Effectsverhältnifs bey dieser Maschine dient folgendes;

Das Wasser steigt von e bis zur horizontalen a v in der Steigröhre nur vermöge der Druckhöhe a x, und das Wasser wird durch den Stofs über die horizontale a v bis zu d hinauf nicht vermöge der bey e ausströmenden Wassermenge allein, sondern vermöge der gesammten durch die Leitröhre abfliessenden Wassermasse erhoben. Diese ist nun für jede einzelne Erhebung nicht = M′, sondern = M + M′, und die ganze Höhe, auf welche die Wassermenge M vermöge Drucks und Stosses zusammengenommen erhoben wird, ist nicht = v y, sondern = e v + v y, also nicht = H — h, sondern = H. Bezeichnen wir also das Effectsverhältnifs mit E, so ist offenbar

$$E = \frac{M.H}{(M+M').h}$$

der hierher gehörige Ausdruck *).

§. 17.

*) Es ist in der That auffallend, dafs sowohl die französischen Mathematiker Bossut u. Cousin in der oben angeführten Abbildung und Beschreibung etc., als Hr. Eitel-

§. 17.

Um wirklich angestellte Versuche vor Augen zu haben, will ich einige aus Hrn. Eytelwein's sehr verdienstlichem Werke hersetzen.

A. Aus

Eytelwein in seiner Schrift von dem Ausdrucke für E so sprechen, als ob es bey dessen Festsetzung darauf ankomme, was uns am natürlichsten scheine. Wenn ich die eytelwein'schen Bezeichnungen in die meinigen übersetze, so scheint ihm der Ausdruck

$$E = \frac{M.(H-h)}{M'.h}$$

der natürlichste zu seyn (a. a. O. S. 13). Eine andere Rechnung $E = \frac{M.H}{(M+M').h}$ liefse sich nach seiner Meinung in einem besondern Sinne genommen noch rechtfertigen. Diese Aeufserungen entsprechen nicht der Bestimmtheit, durch die sich Hr. Eytelwein sonst so vortheilhaft auszeichnet. Hier kann nicht von natürlich scheinenden Voraussetzungen die Rede seyn, sobald die Natur der Sache diejenigen Bestimmungen ausspricht, welche nothwendig zum Grunde gelegt werden müssen. Er hat gerade den unrichtigen Ausdruck gewählt. In der Vergleichung mit dem Effect eines Rades, das Pumpen betreibt, hat er keineswegs, wie er glaubt, zwey von einander verschiedene und dennoch richtige Ausdrücke für E. Es ist ein und derselbe Ausdruck. Wenn nämlich H überhaupt die ganze Förderungshöhe von der tiefsten Stelle der Pumpe bis zum Ausgufse derselben, und h die Höhe des Zuflufsgerinnes über der tiefsten Stelle des Rades, ferner M die erhobene und M' die auf das Rad benützte Wassermenge bezeichnet, so ist für beyde von ihm angenommene Stellungen der Pumpe allemal $E = \frac{M H}{M'.h}$, so dafs jede seiner beyden Angaben durch diesen Ausdruck ausgesprochen wird, welches sich bey dem hydraulischen Stöfser ganz anders verhält. Der Unterschied zwischen der Betreibung des Stössers und des Wasserrades mit der Pumpe führt auch selbst sogleich auf unseren Ausdruck für E bey dem Stösser.

Bey dem Wasserrade mit der Pumpe hängt es nämlich von unserem Willen ab, ob wir einen Theil von dem zur Betreibung des Rades gebrauchten Wasser durch die Pumpe wollen auffördern lassen, oder ob die Pumpe Wasser fördern soll, das von dem, womit das Wasserrad betrieben wird, ganz abgesondert ist. Beym hydraulischen Stösser aber müssen nothwendig beyde Wassermengen $M+M'$ der Maschine zufliessen, oder es mufs die erhobene Wassermenge M nothwendig ein Theil der zum Betrieb der Maschine gehörigen Wassermenge seyn.

A. Aus Eytelw. IV. Tafel. Hier war

Länge der Leitröhre $42\frac{1}{2}$ rhl. Fuſs, $= 510$ Zoll,

— — Steigröhre 31 F. $7\frac{3}{8}$ Z. $= 379\frac{3}{8}$ Z.

I. Beym Versuch Nro. 132 war

$\mathfrak{M} = 17$ Cub. Zoll

$\mathfrak{M}' = 4147$ — —

$H = 31$ F. $5\frac{1}{8}$ Z. $= 377\frac{1}{8}$ Z.

$h = 1$ F. $5\frac{1}{2}$ Z. $= 17\frac{1}{2}$ Z.

Das Sperrventil war eine Sperrscheibe,

dabey $\omega'' = 3{,}49$ Q. Zoll,

$\omega = 3{,}69$ — —;

das Steigventil war ein Klappenventil mit einer hinlänglich weiten Oeffnung.

Die Anzahl der Schläge, welche jedes Ventil in einer Minute machte, war $= 7$.

Also 1 Schlag in 8,57 Sec.

Hier wird $E = \frac{\mathfrak{M}.\,H}{(\mathfrak{M}+\mathfrak{M}').\,h} = \frac{644}{72870} = 0{,}088.$

II. Beym Versuch N. 127 war alles wie vorhin, nur

$\mathfrak{M} = 65$ C. Z.

$\mathfrak{M}' = 5317$ ——

$H = 31$ F. $5\frac{1}{8}$ Z. $= 377\frac{1}{8}$ Z.

$h = 2$ F. 10 Z. $= 34$ Z.

also $E = \frac{65 \cdot 377\frac{1}{8}}{5382 \cdot 34} = 0{,}134;$

die Anzahl Schläge in 1 Min. war 8,

also 1 Schlag in $7\frac{1}{2}$ Sec.

B. Aus Eytelw. II. Tafel.

Länge der Leitröhre $= 21\frac{3}{4}$ F. $= 261$ Z.

— — Steigröhre $= 25$ F. $= 9\frac{1}{8}$ Z. $= 309\frac{1}{8}$ Z.

$\omega'' = 5{,}88$ Q. Z.

$\omega = 3{,}69$ ——;

wieder eine Sperrscheibe,

das Steigventil eine Klappe.

III.

III. Beym Versuch N. 20. war

$\mathfrak{M} = 1609$ C. Z.
$\mathfrak{M}' = 3240$ ——
H $= 25$ F. 7 Z. $= 307$ Z.
h $= 9$ F. $10\frac{1}{2}$ Z. $= 118\frac{1}{2}$ Z.,

also E $= 0{,}861$;
dabey 67 Schläge in 1 Min.
oder 1 Schlag in 0,9 Sec.

IV. Beym Versuch N. 39 war alles wie vorhin, nur

$\mathfrak{M} = 39$ C. Z.
$\mathfrak{M}' = 5184$ ——
H $= 307$ Z.
h $= 18\frac{1}{4}$ —,

also E $= 0{,}125$;
dabey $13\frac{1}{2}$ Schläge in 1 Min.
also 1 Schlag in 4,44 Sec.

C. Aus Eytelw. V. Tafel.

Länge der Leitröhre und der Steigröhre wie in der IV. Taf. die Ventile wie in den vorhergehenden Versuchen Nro. 20 u. 39. Auch ω und ω'' wie dort.

V. Beym Versuch N. 168 war

$\mathfrak{M} = 104$ C. Z.
$\mathfrak{M}' = 526$ ——
H $= 377\frac{1}{8}$ Z.
h $= 85$ —,

also E $= 0{,}703$;
dabey 104 Schläge in Min.,
also 1 Schlag in 0,577 Sec.

VI. Beym Versuch N. 201

$\mathfrak{M} = 570$ C. Z.
$\mathfrak{M}' = 1481$ ——
h $= 118\frac{3}{4}$ Z.
H $= 377$ —,

also E $= 0{,}882$;

dabey

dabey 80 Schläge in 1 Min.,
also 1 Schlag in $\frac{3}{4}$ Sec.

D. Aus Eytelw. I. Tafel.

VII. Beym Versuch N. 2 waren Länge der Steigröhre und der Leitröhre, ingleichen ihre Weiten und die Ventile eben so wie in den schon mitgetheilten Versuchen N. 20 und 39. Ueberdas

$$\mathfrak{M} = 863 \text{ C. Z.}$$
$$\mathfrak{M}' = 1646 \text{ ——}$$
$$H = 307 \text{ Zoll}$$
$$h = 117\tfrac{1}{4} \text{ —},$$

also $E = 0{,}900$;

dabey 66 Schläge in 1 Min.,
also 1 Schlag in 0,91 Sec.

Diese 7 Versuche, deren Resultate sehr verschieden und darum so von mir gewählt worden sind, mögen hier genügen. Man hatte demnach

$$\text{I. } M = \frac{17}{7} = 2{,}428 \text{ C. Z.}$$
$$\text{II. } M = \frac{65}{8} = 8{,}125$$
$$\text{III. } M = \frac{1609}{67} = 24{,}015$$
$$\text{IV. } M = \frac{39}{13\frac{1}{2}} = 2{,}888$$
$$\text{V. } M = \frac{104}{104} = 1{,}000$$
$$\text{VI. } M = \frac{570}{80} = 7{,}125$$
$$\text{VII. } M = \frac{863}{66} = 13{,}075.$$

Unter der grofsen Menge von Versuchen, welche uns Hr. Eytelwein mitgetheilt hat, war bey dem N. 2 (hier VII.) das Effectsverhältnifs am gröfsten, nämlich nur um $\frac{1}{10}$ kleiner, als das gröfstmögliche selbst bey Verschwindung aller Nebenhindernifse seyn könnte.

Es ist daher zum voraus zu erwarten, dafs die Theorie, wenn die Nebenhindernifse bey Seite gesetzt werden, das Effectsverhältnifs

für

für diese Maschine = 1 geben werde. Ich setze nun anfänglich noch einige Umstände bey Seite, welche bey einer vollkommenen Einrichtung wenig in Betrachtung kommen, hole aber alles nach, was auf den Effect Einfluſs haben kann, und gebe so nach und nach der Theorie die gröſste Allgemeinheit, die man für sie fodern kann. Den Einfluſs, welchen die Röhrenwände und Verengungen oder Zusammenziehungen des Wassers, bey seinem Strömen durch vorgeschriebene Oeffnungen, auf die Bewegung haben, bringe ich so in Rechnung, wie solches schon längstens von mir in meinem Handbuche der Maschinenlehre geschehen ist. Es kommt hier, wie bey allen solchen Untersuchungen, darauf an, von einem richtigen Gesichtspuncte auszugehen, und die erste Frage so abzufassen, daſs wir darin schon das Ziel und die Möglichkeit, es zu erreichen, wahrnehmen. Nicht selten wird blos durch die Abfassung dieser Frage schon die Möglichkeit begründet und der Weg gebahnt.

§. 18.

Das Sperrventil sey anfänglich geöffnet, so daſs das Wasser in einem gewissen Augenblick mit der Geschwindigkeit c längs der Leitröhre abfliesse; in diesem Augenblick schlage das Sperrventil plötzlich an die Oeffnung und verschliesse solche, was wird erfolgen?

1. Die Wassermasse $\lambda\,\omega$ wird ihre Bewegung mit dem Bewegungsmoment c. $\lambda\,\omega$ fortzusetzen streben. Dieser Masse wirkt aber der Druck einer Wassersäule von der Höhe H — h entgegen. Hieraus entsteht eine verzögernde Kraft

$$= \frac{(H-h).\,\omega}{\lambda\,\omega} = \frac{H-h}{\lambda}.$$

2. Das Steigventil muſs sich nothwendig öffnen und (sein Gewicht als geringe bey Seite gesetzt) so lange geöffnet bleiben, bis

bis jene Kraft der Wassermasse $\lambda\omega$, wenn solche anfänglich ruhig stünde, nach und nach eine Geschwindigkeit $= - c$ beygebracht haben würde, welche die $+ c$ wieder aufhebt. Die hierzu erfoderliche Zeit heifse t; die zu c gehörige Höhe sey $= v$; so ist, wenn ich den vermöge einer beschleunigenden Kraft $\frac{H-h}{\lambda}$ in der 1ten Sec. durchlaufenen Raum mit g' bezeichne, $c = 2 . \frac{H-h}{\lambda} . g t$; also

$$t = \sqrt{\frac{c^2}{4 . \left(\frac{H-h}{\lambda}\right)^2 . g^2}}, \quad \text{oder} \quad t = \frac{\lambda}{H-h} . \sqrt{\frac{v}{g}},$$

wo g bekanntlich 15,625 rhl. Fuss bezeichnet.

Es sey x' der Raum, den ein einziges Wassertheilchen in dieser Zeit längs $\alpha\beta$ durchläuft, so ist

$$x' = \frac{c^2}{4 g'} = \frac{c^2}{4 . \frac{H-h}{\lambda} . g},$$

folglich die durch die Oeffnung des Steigventils in den Windkessel einströmende Wassermenge bis zu hergestellter Ruhe des Wassers

$$x' \omega = \frac{c^2 \omega}{4 g . \frac{H-h}{\lambda}};$$

also
$$M = \frac{v}{H-h} . \lambda \omega.$$

3. Hierbey ist aber auf die Nebenhindernisse noch nicht mitgesehen, welche das Wasser in Röhren leitet. Die Höhe, welche der Geschwindigkeit des Wassers in der Leitröhre zugehört, nachdem es darin irgend einen unbestimmten Weg x durchlaufen hat, sey $= v'$, und die ihm entgegenwirkende Kraft $= f$, so hat man vollständiger

$$f = \frac{H - h + \left(0{,}03 . \frac{\lambda}{d} + \frac{\omega^2 - \gamma^2 \omega^2}{\gamma^2 \omega^2} + \left(\frac{\omega}{\gamma \omega'}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega}\right)^2\right) . v'}{\lambda},$$

wo

wo γ den Zusammenziehungscoefficient des Wassers für die beygesetzte Oeffnung bezeichnet. Dafür will ich nur zur Abkürzung, wie in meinem Handbuche der Maschinenlehre,

$$f = \frac{H - h + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).v'}{\lambda}$$

setzen, so dafs $\mathfrak{A} = 0{,}03.\frac{\lambda}{d}$ ist, woraus sich zugleich die Bedeutung von $\mathfrak{B}$ ergiebt *).

4. Ein Körper, der mit der zu v gehörigen Geschwindigkeit der Richtung der Schwerkraft entgegen geworfen wird, mufs den Raum $v - v'$ durchlaufen, wenn ihm die zu v' gehörige Geschwindigkeit bleiben soll. Wenn also hier x den Raum bezeichnet, welchen die mit einer zur Höhe v gehörigen Geschwindigkeit anfänglich in Bewegung gesetzte Masse in der Leitröhre durchläuft, bis aus der gröfseren v die kleinere v' wird, so hat man die entgegen wirkende verzögernde Kraft

$$f = \frac{d(v - v')}{dx} = -\frac{dv'}{dx}.$$

Die Aenderungen von v' sind denen von x entgegengesetzt, weil v' abnimmt, indem x gröfser wird.

5. Aus 3 und 4 hat man nunmehr

$$\frac{H - h + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).v'}{\lambda} = -\frac{dv'}{dx}$$

oder

$$\frac{-\frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}.d\left(v + \frac{H-h}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}\right)}{v' + \frac{H-h}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}} = \frac{dx}{\lambda},$$

also

$$-\frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}.\mathrm{logn.}\left(v' + \frac{H-h}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}\right) = \frac{x}{\lambda} + \mathrm{Const.}$$

*) Ungewifsheiten, die in Bestimmung der Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegen, können uns hier nicht in Verlegenheit setzen, weil, wie wir sehen werden, v' allemal nur einen sehr kleinen Theil von h und um so mehr von $H - h$ ausmacht, so dafs der ungewisse Theil von $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{B}$ gar nicht zu achten ist. Wegen $\mathfrak{B}$ s. das Ende dieser Abhandl.

Wenn nun wie vorhin v die Geschwindigkeitshöhe für das Wasser in der Leitröhre in dem Augenblick bezeichnet, da die Sperrklappe anschlägt, so hat man, für $x = 0$, $v' = v$, also

$$\text{Const.} = -\frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}.\,\text{logn.}\left(v+\frac{H-h}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}\right).$$

Dieses im letzten Ausdrucke substituirt, giebt

$$\frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}.\left(\text{logn.}\left(\frac{H-h}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}+v\right)-\text{logn.}\left(\frac{H-h}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}+v'\right)\right)=\frac{x}{\lambda}$$

oder auch

$$\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).\,x}{\lambda}=\text{logn.}\,\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).\,v+H-h}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).\,v'+H-h}.$$

6. Das Steigventil schliefst sich wieder, wenn alle Bewegung in der Leitröhre ein Ende hat, oder für $v' = 0$. Verlangt man also x für diesen Augenblick, oder soll sich die Formel auf den zu diesem Augenblick gehörigen Werth von x beziehen, so wird

$$\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).\,x}{\lambda}=\text{logn.}\,\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).\,v+H-h}{H-h},$$

oder auch

$$\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).\,x}{\lambda}=\text{logn.}\left(1+\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).\,v}{H-h}\right).$$

7. Nach einigen Augenblicken öffnet sich nun wieder aus dem schon oben angegebenen Grunde die Sperrklappe; die Bewegung des Wassers in der Leitröhre beginnt aufs neue; das Sperrventil schliefst sich endlich wieder, und die Höhe, welche der Geschwindigkeit des Wassers in der Leitröhre in diesem Augenblick, da das Sperrventil von neuem an die Oeffnung anschlägt, zugehört, ist die in der Formel schon gebrauchte Höhe v. Die Formel gilt für jeden Werth von v. Da nun die beschleunigende Kraft, welche das Wasser längs $\alpha\beta$ herabtreibt, allemal viel kleiner als die der natürlichen Schwere ist, und die Zeit, während der das Sperrventil offen steht, allemal sehr klein ausfallen mufs, so bleibt v immer sehr vielmal kleiner als h, und um so mehr wird in der An-

wen-

wendung auf Fälle, wo $H-h$ vielmal grösser als h ist, $\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v}{H-h}$ ein kleiner Bruch, so dass schon die 3te Potenz von $\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v}{H-h}$ als unbedeutend bey Seite gesetzt werden kann.

Man kann daher mit hinlänglicher Genauigkeit

$$\text{logn.}\left(1+\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v}{H-h}\right)=\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v}{H-h}-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2.v^2}{2.(H-h)^2}$$

setzen; daher sehr nahe

$$\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v}{H-h}-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2.v^2}{2.(H-h)^2}=\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).x}{\lambda}$$

und $$x=\frac{2(H-h).v-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v^2}{2.(H-h)^2}.\lambda,$$

welches der Weg ist, den die Wassertheilchen in der Leitröhre während der Zeit, da das Steigventil offen steht, längs $\alpha\beta$ durchlaufen.

8. Man hat demnach, weil $M=x.\omega$ seyn muss,

$$M=\frac{\left(2(H-h).v-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v^2\right).\lambda\omega}{2(H-h)^2}.$$

9. Die zu diesem Abflusse erfoderliche Zeit heisse t, so hat man für jede Geschwindigkeit c des längs $\alpha\beta$ absliessenden Wassers, weil die Aenderungen von c und t während der Eröffnung des Steigventils einander entgegengesetzt sind,

$$-dc=2fg.dt.$$

Nun ist $$c=2\sqrt{gv'};\ dc=2.g^{\frac{1}{2}}.\tfrac{1}{2}v'^{-\frac{1}{2}}.dv'$$

und $$f=\frac{H-h+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v'}{\lambda};$$

daher $$-g^{\frac{1}{2}}.v'^{-\frac{1}{2}}dv'=2g\frac{\left((H-h)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v'\right).dt}{\lambda}$$

und $$-dt=\frac{v'^{-\frac{1}{2}}.dv'.\lambda}{\left(H-h+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v'\right).2g^{\frac{1}{2}}}.$$

Es

Es sey nun $H - h + . (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v' = z$, so ist

$$v' = \frac{z - H + h}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}, \quad d v' = \frac{d z}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$$

und nun
$$- d t = \frac{\lambda d z}{2 . (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^{\frac{1}{2}} . g^{\frac{1}{2}} . z . (z - H + h)^{\frac{1}{2}}} .$$

Es sey $(z - H + h)^{\frac{1}{2}} = y$; also $z - H + h = y^2$, so wird $d z = 2 y d y$

und
$$- d t = \frac{\lambda . 2 y d y}{2 . (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^{\frac{1}{2}} . g^{\frac{1}{2}} . y . (y^2 + H - h)}$$
$$= \frac{\lambda d y}{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^{\frac{1}{2}} . g^{\frac{1}{2}} . (y^2 + H - h)} .$$

Die Integration giebt

$$- t = \frac{\lambda}{\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . g}} . \frac{1}{\sqrt{(H - h)}} . \text{Arc. tang. } y . \sqrt{\frac{1}{H - h}} + \text{Const.}$$
$$= \frac{\lambda}{\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . g . (H - h)}} . \text{Arc. tang. } \left((\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v'\right)^{\frac{1}{2}} . \sqrt{\frac{1}{H - h}} + \text{Const.}$$

Für $t = 0$ ist $v' = v$, also

$$\text{Const.} = - \frac{\lambda}{\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . g . (H - h)}} . \text{Arc. tg. } \sqrt{\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v}{H - h}},$$

und nun

$$t = \frac{\lambda}{\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . g . H - h)}} . \left(\text{Arc. tg. } \sqrt{\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v}{H - h}} - \text{Arc. tg. } \sqrt{\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v'}{H - h}}\right).$$

Um die ganze Dauer des Einströmens nach erfolgtem Aufstossen des Steigventils zu bestimmen, muſs man $v' = 0$ setzen. Hiernach wird die Einströmungszeit

$$t = \frac{\lambda}{\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . g (H - h)}} . \text{Arc. tg. } \sqrt{\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v}{H - h}} .$$

Weil nun hier $\sqrt{\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v}{H - h}}$ allemal als ein kleiner Bruch angenommen werden kann, so kann man auch Arc. $\sqrt{\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v}{H - h}}$ statt Arc. tg. $\sqrt{\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v}{H - h}}$ schreiben; und weil überdas der Ausdruck Arc. $\sqrt{\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v}{H - h}}$ nur die Gröſse $\sqrt{\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v}{H - h}}$ bezeichnet, so hat man sehr nahe

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).g.(H-h)}} \cdot \sqrt{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v}{H-h}}$$

oder $$t = \frac{\lambda}{H-h} \cdot \sqrt{\frac{v}{g}} \text{ wie oben (No. 2)}$$

für die ganze Dauer der jedesmaligen Einströmung in den Windkessel. Dieser Werth wird immer sehr klein ausfallen, nicht leicht über 1/2 Sec. betragen, meistens aber weniger.

10. Bezeichnen wir die beschleunigende Kraft, welche, bey wieder erfolgendem Ausflusse durch das Sperrventil, in die Wassertheilchen längs $\alpha\beta$ wirkt, mit f', und setzen die Wassermasse von β bis zum Sperrventil bey Seite; bezeichnen wir überdas die veränderliche Höhe, welche der zunehmenden Geschwindigkeit des Wassers in der Leitröhre in irgend einem unbestimmten Augenblick zugehört, mit v'', so wird

$$f' = \frac{h - \left(0{,}03.\frac{\lambda}{d} + \frac{\omega^2 - \gamma^2\omega^2}{\gamma^2\omega^2} + \left(\frac{\omega}{\gamma\omega''}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega}\right)^2\right).v''}{\lambda},$$

wofür ich zur Abkürzung

$$f' = \frac{h - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').v''}{\lambda}$$

schreiben will. Dabey hat $\mathfrak{A}$ denselben Werth wie No. 3, woraus sich die Bedeutung von $\mathfrak{B}'$ von selbst giebt.

11. Um die zu v'' gehörige Geschwindigkeit in der Leitröhre zu erhalten, während das Sperrventil offen steht, müssen die Wassertheilchen längs $\alpha\beta$ einen gewissen Weg durchlaufen, den ich mit x'' bezeichnen will, und es wird

$$f' = \frac{dv''}{dx''},$$

daher $$\frac{h - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').v''}{\lambda} = \frac{dv''}{dx''}.$$

12. Man erhält daher wie oben No. 5, indem wir nur h statt H—h, uud $-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}')$ statt $+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ schreiben,

$$\frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'}\cdot \text{logn.}\left(v''-\frac{h}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'}\right) = -\frac{x''}{\lambda} + \text{Const.}$$

Hier wird aber für $x'' = 0$ auch $v'' = v$, daher

$$\text{Const.} = \frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'}\,.\,\text{logn.} - \frac{h}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'},$$

und nunmehr

$$\frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'}\cdot\left(\text{ln.}\left(v''-\frac{h}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'}\right)-\text{ln.}-\frac{h}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'}\right) = -\frac{x''}{\lambda}$$

oder

$$\frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'}\,.\,\text{logn.}\,\frac{h-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').v''}{h} = -\frac{x''}{\lambda}.$$

Fällt nun das Ventil bey e wieder zu, indem das Wasser in der Leitröhre die zur Höhe v gehörige Geschwindigkeit erlangt hat, so erhält man für diesen Augenblick

$$\frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'}\,.\,\text{logn.}\,\frac{h-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').v}{h} = -\frac{x''}{\lambda}$$

oder

$$\text{logn.}\left(1-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').v}{h}\right) = -\frac{x''}{\lambda}.(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'),$$

daher sehr nahe

$$-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').v}{h}-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}')^2.v^2}{2h^2} = -\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').x''}{\lambda}$$

und

$$x'' = \frac{2hv+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').v^2}{2h^2}.\lambda,$$

welches also der Raum ist, den die Wassertheilchen in der Leitröhre, während der ganzen Dauer des Ausströmens durch die Sperröffnung, längs $\alpha\beta$ durchlaufen müssen.

13. Weil nun $M' = x''.\omega$ ist, so hat man

$$M' = \frac{2hv+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').v^2}{2h^2}.\lambda\omega.$$

14. Man hat also nunmehr

$$E = \frac{MH}{(M+M').h}$$

$$= \frac{2.(H-h).v - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v^2.\frac{\lambda\omega.H}{2(H-h)^2}}{\left(\left(2(H-h).v+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v^2\right).\frac{\lambda\omega}{2(H-h)^2}+\left(2hv+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').v^2\right)\frac{\lambda\omega}{2h^2}\right).h}$$

oder

$$E = \frac{H - \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).Hv}{2(H-h)}}{H-\left(\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).hv}{2(H-h)} - \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').(H-h).v}{2h}\right)}.$$

Setzt man $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v$ und $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').v$ bey Seite, so wird

$$E = \frac{H}{H} = 1;$$

dabey mag $\frac{h}{H}$, so klein man will, seyn.

Ist $\frac{h}{H}$ sehr klein, so ist, mit Rücksicht auf die Nebenhindernisse,

$$E = \frac{H - \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v}{H + \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').\frac{v}{h}.H}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).\frac{v}{H}}{1 + \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').\frac{v}{h}}.$$

15. Setzt man die zur jedesmaligen Ausflußmenge M' gehörige Zeit $= t'$, so findet man, auf eine ähnliche Weise wie oben,

$$t' = \frac{\lambda}{h}.\sqrt{\frac{v}{g}}.$$

16. Oben (No. 9) war $t = \frac{\lambda}{H-h}.\sqrt{\frac{v}{g}}$,

also

$$t : t' = h : (H-h).$$

Setzt man die ganze zu einem zusammengehörigen Spiel der beyden Ventile gehörige Zeit $t + t' = T$, so hat man

$$T = \left(\frac{\lambda}{H-h} + \frac{\lambda}{h}\right).\sqrt{\frac{v}{g}}$$

oder

$$T = \frac{H\lambda}{(H-h).h}.\sqrt{\frac{v}{g}};$$

 auch

auch $(t + t') : t' = (h + H - h) : (H - h)$

oder $T : t' = H : (H - h)$;

ebenso $T : t = H : h$.

§. 19.

Zur Vergleichung des für die verschiedenen Zeiten gefundenen Verhältnisses mit der Erfahrung wären genaue Beobachtungen nöthig, deren Anstellung aber grofsen Schwierigkeiten unterworfen ist, und keine sehr grofse Schärfe zuläfst, so dafs man bis auf einige Terzien sicher wäre. Doch verdanken wir auch hierüber Hrn. Eytelwein mehrere belehrende Versuche, wobey er sich eines sinnreichen Verfahrens bediente, um sich dem wahren Verhältnisse wenigstens sehr zu nähern. Die hierhin gehörigen Versuche findet man in seiner Schrift S. 99. Sie sind in folgendem Täfelchen enthalten. Die Versuche beziehen sich auf die Sperrscheibe.

Nro.	Werthe von h.		Werthe von H.		Werthe von λ.		Zeit T in Terzien	Zeit des Aufsteigens.	Zeit des oberen Stillstandes.	Zeit des Niederganges.	Zeit des unteren Stillstandes.
	Fufs,	Zoll	F.	Z.	F.	Z.					
1	5.	10	31.	$5\frac{1}{4}$	21.	9	62	5	10	1,4	45,6
2	9.	10	31.	$5\frac{1}{4}$	21.	9	47	$9\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$18\frac{1}{2}$
3	9.	10	31.	$5\frac{1}{4}$	21.	9	56	9	16	4,8	26,2
4	6.	6	37.	$6\frac{1}{4}$	42.	6	105	10	17	4	74
5	9.	$5\frac{1}{4}$	37.	$6\frac{1}{4}$	42.	6	74	$11\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	$42\frac{1}{4}$

Dabey hatte man

Nro. 1. $17\frac{1}{2}$ Schläge in 18 Sec.
2. 47 — — 37 —
3. 32 — — 30 —
4. 16 — — 28 —
5. 26 — — 32 —.

Die

Die Gleichung $t = \frac{h}{H} . T$ giebt nun

$$\text{Nro. 1.} \quad t = \frac{70}{377\frac{1}{4}} . 62 = 11{,}5 \text{ Terz.}$$

$$2. \quad t = \frac{118}{377\frac{1}{4}} . 47 = 14{,}7$$

$$3. \quad t = \frac{118}{377\frac{1}{4}} . 56 = 17{,}5$$

$$4. \quad t = \frac{78}{450\frac{1}{4}} . 105 = 18{,}2$$

$$5. \quad t = \frac{113\frac{1}{4}}{450\frac{1}{4}} . 74 = 18{,}6.$$

In dem vorstehenden Täfelchen bezeichnet die Zeit des oberen Stillstandes zugleich die Werthe von t, so gut man solche zu beobachten vermochte; sie waren 10; $15\frac{3}{4}$; 16; 1; 17; $15\frac{1}{2}$. Die gröſste Abweichung von der theoretischen Bestimmung war die Nro. 5, wo sie aber doch nur 3 Terz. $= \frac{1}{20}$ Sec. betrug, daſs es also noch zweifelhaft bleibt, ob nicht bey der Beobachtung selbst um soviel gefehlt seyn könne.

Eben so hat man die Werthe von t′

nach der Theorie 50,5; 32,3; 38,5; 86,5; 55,4,

— — Beobacht. 52; $31\frac{1}{4}$; 40; 88; $58\frac{1}{2}$.

So zeigt sich also eine sehr gute Uebereinstimmung, auch für sehr verschiedene Werthe von λ, die auch nach der Theorie auf das Verhältniſs der Zeiten gar keinen Einfluſs haben, wohl aber auf die Gröſse der gesammten Zeit T.

§. 20.

Ich habe bis hierhin die Betrachtung des Windkessels noch ganz bey Seite gesetzt, um die Untersuchung anfänglich mehr zu vereinfachen. Ich werde diese jetzt nachholen, und man wird finden, daſs sich die Einrichtung immer so machen läſst, daſs der

 Wind-

Windkessel mit der Steigröhre auf den Effect keinen merklichen Einfluſs hat.

Die Druckhöhe, welche der Bewegung des Wassers in der Leitröhre bey Eröffnung des Steigventils entgegenwirkt, wurde bisher nur $= H - h$ angenommen, weil es immer dahin gebracht werden kann, daſs man nur diese in Rechnung bringen darf, wofern die Steigröhre lothrecht in die Höhe geführt wird.

Man nehme nun die Bedeutung der Buchstaben wie oben (§. 15), so ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in die Steigröhre einströmt $= \frac{\mathfrak{M}}{60 . \gamma . \mathfrak{w}}$; hierzu gehört eine Höhe $= \frac{\left(\frac{\mathfrak{M}^2}{3600 . \gamma^2 \mathfrak{w}^2}\right)}{4g}$, welche noch zu $H - h$ hinzukommen muſs.

Aber bey dieser Geschwindigkeitshöhe leidet das aufsteigende Wasser auch noch einen Widerstand, dem eine Druckhöhe $= \frac{\mathfrak{M}^2}{3600 . 4 g . \gamma^2 . \mathfrak{w}^2} . \frac{0,03 . \mathfrak{L}}{\mathfrak{d}}$ zugehört. Folglich muſs zu $H - h$ noch die Höhe $\frac{\mathfrak{M}^2}{14400 . g . \gamma^2 . \mathfrak{w}^2} . \left(\frac{0,03 . \mathfrak{L}}{\mathfrak{d}} + 1\right)$ hinzukommen. Diese Höhe will ich mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen; weil man nun $\gamma^2 \mathfrak{w}^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{w}^2$ setzen kann, so hat man

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{M}^2}{7200 . g . \mathfrak{w}^2} . \left(0,03 . \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{d}} + 1\right) .$$

Die obigen Formeln erhalten also in Bezug auf diesen Umstand ihre gröſsere Allgemeinheit, wenn man darin überall $H + \mathfrak{H} - h$ statt $H - h$ schreibt.

§. 21.

Bey lothrecht geführten Steigröhren wird nicht leicht $\mathfrak{L}$ so groſs vorkommen, daſs sich nicht $\mathfrak{d}$ groſs genug nehmen lieſse, um dadurch $\mathfrak{H}$ in Vergleichung mit $H - h$ unbedeutend zu machen. Hingegen kann auch $\mathfrak{H}$ sehr bedeutend und sogar viel gröſser als

H — h

H — h werden, wenn die Steigröhre zwar zu keiner beträchtlichen Höhe, aber nach einem etwas entfernten Puncte hingeführt wird, so daſs $\frac{\mathfrak{L}}{H}$ eine beträchtliche ganze Zahl wird; zumal wenn man dabey noch den Fehler begienge, $\mathfrak{d}$ klein zu nehmen.

Wäre z. B. $H = 480$ Zoll, $\mathfrak{L} = 36000$ Z., und nähme man hierzu eine einzöllige Steigröhre, so hätte man, $\mathfrak{M} = 1000$ C. Z. gesetzt,

$$\mathfrak{H} = \frac{1000000}{7200 . 12 . 15{,}62 . 0{,}785^2} \cdot \left(1 + \frac{0{,}03 . 36000}{1}\right)$$
$$= 1300 \text{ Zoll.}$$

Wäre hierbey $h = 80$ Z., so müſste man $400 + 1300 = 1700$ statt 400, d. i. statt $H - h$, in den obigen Formeln setzen. Nähme man aber eine 4zöllige Steigröhre, so würde $\mathfrak{H}$ sehr nahe nur $\frac{1}{4^5}$ oder etwa nur $\frac{1}{1000}$ so groſs, also beyläufig nur $= 1{,}3$ Zoll, also unbedeutend.

§. 22.

Die Abmessungen des Windkessels bedürfen zwar keiner sehr genauen Bestimmung; sie müssen aber doch groſs genug genommen werden, um zu bewirken, daſs sie durch ihre Kleinheit dem Effecte nicht nachtheilig werden. Der Hauptkörper des Windkessels ist cylindrisch; sein oberer Theil, der Deckel, der Aufsatz, die Haube, kann conisch oder gewölbt seyn.

Die Steigröhre greift bis auf eine gewisse Tiefe unter den Deckel in den cylindrischen Theil herab, die ich mit ζ bezeichnen will, vom höchsten Querschnitte des cylindrischen Theils herab gemessen.

Man mache die Einrichtung so, daſs das Wasser im Windkessel schon vermöge seines natürlichen Falls wenigstens die untere Steigröhrenöffnung erreicht, und daſs diese dem Steigventile so nahe als möglich gebracht werde. Wohl aber darf das Wasser im Wind-

kessel

kessel vermöge seines natürlichen Falles auch über die untere Steigröhrenöffnung hinauf steigen.

Ich will annehmen, das Wasser erreiche gleich anfänglich vermöge seines natürlichen Falls in der Steigröhre die Höhe δ; es liege also die untere Steigröhrenöffnung in der Tiefe δ unter dem Wasserspiegel im Zuflußbehältnisse. Steigt nun das Wasser vor dem ersten Schlage im Windkessel auf die Höhe y über die untere Steigröhrenöffnung, so ist die Höhe des mit Luft angefüllten Theils des Cylinders noch $\zeta - y$, und sein cubischer Inhalt $= (\zeta - y).(\mathfrak{W} - \mathfrak{w})$, wobey ich die Dicke der Röhrenwand bey Seite setze.

Die Federkraft der natürlichen Luft sey dem Drucke einer Wassersäule von der Höhe k gleich, so ist der Druck, den die versperrte Luft sammt dem auf die Höhe y über der unteren Steigröhrenöffnung im Windkessel stehenden Wasser gegen diese Oeffnung nach oben ausübt,

$$= \left(\frac{\zeta.(\mathfrak{W} - \mathfrak{w}) + b}{(\zeta - y).(\mathfrak{W} - \mathfrak{w}) + b} \cdot k + y\right)\mathfrak{w},$$

wo b den cub. Inhalt von der inneren Höhlung der Haube bezeichnet.

Der Gegendruck der Atmosphäre und des Wassers in der Steigröhre ist jetzt $= (k + \delta).\mathfrak{w}$. Jener muſs diesem gleich seyn, also

$$\frac{\zeta.(\mathfrak{W} - \mathfrak{w}) + b}{(\zeta - y).(\mathfrak{W} - \mathfrak{w}) + b} \cdot k + y = k + \delta.$$

Es sey $\frac{b}{\mathfrak{W} - \mathfrak{w}} = \varepsilon$, also $b = \varepsilon.(\mathfrak{W} - \mathfrak{w})$, so hat man

$$\frac{\zeta + \varepsilon}{\zeta - y + \varepsilon} \cdot k + y = k + \delta.$$

Käme zu der Druckhöhe δ, mit welcher das Wasser gleich anfänglich in der Steigröhre gegen ihre untere Oeffnung druckt, nach und nach noch die Höhe Δ hinzu, so müſste nothwendig auch y gröſser werden, und man erhält nunmehr y aus der Gleichung

$$\frac{\zeta + \varepsilon}{\zeta - y + \varepsilon} \cdot k + y = k + \delta + \Delta.$$

Hier

Hier genügt aber schon die Gleichung

$$\frac{\zeta+\varepsilon}{\zeta-y+\varepsilon}\cdot k=k+\delta+\Delta.$$

Für den Beharrungsstand der Maschine ist $\Delta=H-h+\mathfrak{H}$, so daſs hier auch schlechthin Δ statt $\delta+\Delta$ geschrieben werden kann, um für die Abmessungen des Windkessels eine genügende Bestimmung zu erhalten. Dieses giebt

$$(k+\Delta).(\zeta+\varepsilon)-(k+\Delta).y=(\zeta+\varepsilon).k$$

oder

$$y=\frac{\Delta.(\zeta+\varepsilon)}{k+\Delta}$$

$$=\frac{(H+\mathfrak{H}-h).(\zeta+\varepsilon)}{k+H+\mathfrak{H}-h}.$$

§. 23.

Die obige ganze Untersuchung über die Theorie dieser Maschine setzt eine Wirkung des Windkessels voraus, ohne welche die gefundenen Resultate unrichtig wären. Er soll nämlich durch die versperrte Luft den höchst wichtigen Vortheil leisten, daſs bey einer neuen Eröffnung des Steigventils die in der Steigröhre enthaltene Wassermasse nicht erst von neuem in Bewegung gesetzt werden darf, sondern in der einmal erlangten Geschwindigkeit beständig beharrt, weil sonst wieder neue Kraft erfoderlich wäre, um die verlorne Geschwindigkeit wieder zu ersetzen. Es darf also im Beharrungsstande der Maschine die Expansivkraft der versperrten Luft keine merkliche Aenderung leiden; folglich darf der cubische Inhalt des Theils vom Windkessel, den sie im Beharrungsstande einnimmt, sich nicht merklich ändern. Es muſs daher die in 1 Sec. in dem Windkessel einströmende Wassermenge M''' immer nur einen sehr kleinen Theil von $(\zeta-y+\varepsilon).(\mathfrak{W}-\mathfrak{w})$ ausmachen, oder der Werth von $\frac{M'''}{(\zeta-y+\varepsilon).(\mathfrak{W}-\mathfrak{w})}$ oder der von $\frac{(k+H+\mathfrak{H}-h).M'''}{k.(\zeta+\varepsilon).(\mathfrak{W}-\mathfrak{w})}$ sehr klein seyn. Zu diesem Zwecke ist es vollkommen hinreichend, ζ, ε und $\mathfrak{W}$ so groſs zu nehmen, daſs

$$\frac{(k+H+\mathfrak{H}-h).\,M'''}{k.\,(\zeta+\iota).\,(\mathfrak{W}-\mathfrak{w})} \text{ nicht } > 0{\cdot}04 \quad ^{*})$$

werde, oder daſs

$$(\zeta+\iota).\,(\mathfrak{W}-\mathfrak{w}) \text{ nicht } < \frac{(k+H+\mathfrak{H}-h).\,25\,M'''}{k}$$

werde. Weil die Wände des Windkessels desto schwächer seyn dürfen, je kleiner $\mathfrak{W}$ ist, so kann man ζ etwa $= 1{,}25.\,\mathfrak{d}$ oder auch $= 1{,}5.\,\mathfrak{d}$ nehmen.

§. 24.

1. Ich habe bisher den Einfluſs, welchen das Behältniſs E und das Röhrenstück $\mathfrak{d}$e auf den Effect der Maschine haben, ganz bey Seite gesetzt, weil er sich allemal unbedeutend machen läſst, und bey einer solchen Einrichtung wie (Fig. 6 u. 9) gar nicht in Betrachtung kommt. Indessen muſs man doch den Einfluſs dieser Stücke auf den Effect anzugeben wissen, um die Bedingungen vollständig kennen zu lernen, unter welchen sich die Maschine ihrer gröſstmöglichen Vollkommenheit mehr oder weniger nähert. Wir geben hiermit unserer Theorie dieser Maschine die gröſste Allgemeinheit. Nehmen wir die Bezeichnungen aus (§. 15) und gehen auf (§. 18) zurück, so erhalten wir dort statt des Nenners $\lambda\,\omega$ den

$$\lambda\omega + \frac{\omega}{W}\cdot\lambda'\omega + \lambda''\omega \text{ oder } \left(\lambda + \frac{\omega}{W}\,\lambda' + \lambda''\right)\cdot\omega,$$

und wir können dort, soweit die Betrachtung des Steigventils fortgeht, überall $\lambda + \frac{\omega}{W}\,\lambda' + \lambda''$ statt λ schreiben. Der Einfluſs, den das Sperrbehältniſs auf die Bestimmung von $\mathfrak{A}$ hat, ist ohnehin für Null zu achten.

2. Schreiben wir nun zugleich nach §. 20 $H+\mathfrak{H}-h$ statt $H-h$, über das $\mathfrak{v}$ statt v, so erhalten wir (§. 18. Nro. 8)

M =

*) Hrn. Eytelwein's Windkessel war nicht für alle Versuche so geräumig; doch schadete die Verminderung des Raums dem Effecte nur wenig, so daſs dieser Abgang ganz bey Seite gesetzt werden kann.

$$M = \frac{\left(2.(H+\mathfrak{H}-h).\mathfrak{v}-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v^2\right).\left(\lambda+\frac{\omega}{W}.\lambda'+\lambda''\right).\omega.}{o.(H+\mathfrak{H}-h)^2}$$

3. Wenn nämlich v die Geschwindigkeitshöhe des Wassers in der Leitröhre beym Anstossen des Sperrventils bezeichnet, so muſs man erwägen, daſs jetzt die Höhe, welche der Geschwindigkeit des Wassers in der Leitröhre beym Anstossen an die Steigklappe zugehört, nicht auch mit v bezeichnet werden kann, daher wir solche jetzt mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet haben. Schreiben wir nun zur Abkürzung L statt $\lambda+\frac{\omega}{W}\lambda'+\lambda''$, und l statt $\lambda+\frac{\omega}{2W}.\lambda'$, so wird

$$\mathfrak{v} = \frac{l^2}{L^2}.v;$$

demnach, wenn wir A statt $H+\mathfrak{H}-h$ schreiben,

$$M = \frac{\left(\frac{2A.l^2.v}{L^2}-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).l^4.v^2}{L^4}\right).L.\omega}{2A^2}$$

$$= \left(\frac{l^2 v}{LA}-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).l^4 v^2}{2A^2.L^3}\right).\omega.$$

4. Aus §. 18. Nro. 13 giebt sich, indem wir l statt des dortigen λ schreiben,

$$M' = \frac{2hv+(\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}').v^2}{2h^2}.l.\omega$$

5. Daher jetzt

$$E = \frac{M.H}{(M+M').h}$$

$$= \frac{\left(\frac{l^2.v}{L.A}-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).l^4.v^2}{2A^2.L^3}\right).H}{\left(\frac{l^2.v}{L.A}-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).l^4.v^2}{2A^2.L^3}+\frac{2hv+(\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}').v^2}{2h^2}.l\right).h},$$

oder

$$E = \frac{H-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).l^2.Hv}{2AL^2}}{\frac{L}{l}.(H+\mathfrak{H})-\left(\frac{L-l}{l}.h+\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).l^2.hv}{2A.L^2}-\frac{(\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}').L.Av}{2.l.h}\right)}.$$

Aus dieser Formel wird die §. 18. No. 14, wenn man $\mathfrak{H} = 0$ und $l = L$ setzt.

6. Die vorstehende allgemeine Formel läſst sich auch so ausdrücken:

$$E = \frac{H - \frac{l^2}{L^2} \cdot \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . H v}{2 A}}{\frac{L}{l} \cdot (H + \mathfrak{H} - h) + h - \left(\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . l^2 h v}{2 A . L^2} - \frac{(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}') . L . A . v}{2 . l . h} \right)}.$$

Könnte man die Glieder, welche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ enthalten, als unbedeutend weglassen, so wäre schlechthin

$$E = \frac{H}{\frac{L}{l} . (H + \mathfrak{H} - h) + h},$$

also offenbar E desto gröſser, je mehr sich bey bestimmten Werthen von H, $\mathfrak{H}$ und h der Quotient $\frac{L}{l}$ der 1 als seiner Gränze nähert.

Dasselbe findet aber auch noch mit Rücksicht auf die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Statt. Die vortheilhafteste Einrichtung der Maschine erfodert also $\frac{\omega}{2 \sqrt{V}} . \lambda' + \lambda''$ so klein als möglich zu machen. In dieser Hinsicht ist, besonders bey Versuchen mit nur kurzen Leitröhren, die Einrichtung Fig. 6 u. 9 vortheilhafter als die Fig. 5.

§. 25.

Für die Anwendung bleibt jetzt noch die wichtige Frage übrig: wie groſs soll man v nehmen? Auf die Bestimmung des Effectsverhältnisses hat sie wenig Einfluſs, weil sie nur in den Gliedern vorkommt, welche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ enthalten. Aber um für gegebene Werthe von H und h eine bestimmte Wassermenge $\mathfrak{M}$ erheben zu können, muſs man §. 18. No. 8 den Werth von v wissen, der immer sehr klein ausfällt. Wir können für diese Bestimmung in den obigen Versuchen λ' und λ'' als unbedeutend bey Seite setzen; auch

auch ist es für diesen Zweck nicht nöthig, $\mathfrak{H}$ besonders in Rechnung zu bringen, da diese Gröſse in gedachten Versuchen nur einige Zolle ausmacht, auf die es hier, wie wir sehen werden, nicht ankommen kann. Wir behalten daher für die Vergleichung mit einigen obigen Versuchen hier die einfachere Formel §. 18. Nro. 8 bey, nämlich

$$M = \frac{\left(2.(H-h).v-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).v^2\right).\lambda\omega}{2\,(H-h)^2},$$

wo man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus §. 18 Nro. 3 nimmt.

Ich wähle zur Anwendung zuerst den Versuch §. 17 VII. Den dort nicht bestimmten Werth von ω' setze ich $= 3$ Q. Z.

Man hatte dort $\omega = 3{,}69$ Q. Z., also $d = \sqrt{\frac{3{,}69}{0{,}785}} = 2{,}17$ Z.;

daher §. 18. Nro. 3 $\quad \mathfrak{A} = 0{,}03.\frac{261}{2{,}17} = 3{,}6.$

Ich setze $\gamma^2\,\omega^2 = 0{,}6.\,\omega^2$, und $(\gamma\,\omega')^2 = 0{,}5.\,\omega'^2$, so wird

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{0{,}6} - 1 + \frac{3{,}69^2}{0{,}5.9} - 1$$
$$= 2{,}69;$$

demnach $\quad \mathfrak{A}+\mathfrak{B} = 3{,}6 + 2{,}69 = 6{,}29;$

also aus obiger Gleichung für M, weil bey diesem Versuch M 13 C. Z. betrug,

$$13 = \frac{\left(2.(307-117\tfrac{1}{4}).v-6{,}29.v^2\right)261.3{,}69}{2.(307-117\tfrac{1}{4})^2}$$
$$= \frac{1}{189}.\,261.3{,}69.\,v - \frac{6{,}29.\,261.\,3{,}69}{2.\,189^2}.\,v^2$$

oder $\quad 2457 = 963{,}1.\,v - 16{,}2.\,v^2,$

also $\quad v^2 - 60{,}11.\,v = -153{,}37.$

Dieser Gleichung thun 2 Werthe von v Genüge; man findet nämlich

$$v = 30{,}5 \pm 27{,}87 \text{ Z.}$$

Es ist aber die gesammte Zeit T, in der ein Schlag geschah, $= 0{,}91$ Sec., also §. 18. Nro. 16

 $t' =$

$$t' = \frac{H-h}{H} \cdot T = \frac{190}{307} \cdot 0{,}91 = 0{,}56 \text{ Sec.}$$

Da nun ein Körper, von der natürlichen Schwere getrieben, in dieser Zeit nur die zu $0{,}56^2 . 183$ rhl. Z. gehörige Geschwindigkeit erlangt, so fällt in die Augen, dafs hier, wo eine so viel geringer beschleunigende Kraft wirkt, das bejahte Zeichen nicht gebraucht werden könne; man hat daher hier

$$v = 30{,}5 - 27{,}87 = 2{,}63 \text{ Z.},$$

wie sich auch aus dem Werthe von M' übersehen läfst, der $= \frac{1646}{66}$ = beynahe 25 C. Z. seyn soll. Weil nämlich, hier, wo eine beschleunigende Kraft wirkt, etwa die $\frac{1}{2{,}6}$ von der natürlichen Schwere ist, das Wasser in der Leitröhre, um die zu 2,63 Zoll gehörige Geschwindigkeit zu erlangen, einen Weg von etwa 2,6. 2,63 oder von etwa 6,84 Zoll durchlaufen mufs, und mit dieser Bewegung die Wassermenge $6{,}84 . 3{,}69 = 25{,}2$ C. Z ablaufen würde, so stimmt dieses mit der Angabe $M' = 25$ C. Z. ganz richtig zusammen.

Hier hat man also, für $h = 117$ Zoll, nur $\frac{v}{h} = \frac{2{,}63}{117} = \frac{1}{44{,}4}$.
Eine zweyte Anwendung sey die auf den Versuch §. 17 VI., der in Bezug auf Gröfse des Effectsverhältnifses nahe an den vorigen gränzt. Bey diesem wird

$$7.125 = \frac{(2 . 258 . v - 10{,}80 . v^2) . 510 . 3{,}69}{2 . 258^2}.$$

Daraus wird $$v^2 - 7{,}94 . v = -7{,}75$$

und $$v = 1{,}38 \text{ Z.}; \quad \text{also } \frac{v}{h} = \frac{1}{86{,}23}.$$

Einen äufserst geringen Werth für das Effectsverhältnifs gab der Versuch §. 17 I. Bey diesem wird

$$v = 33{,}3 - \sqrt{(33{,}3^2 - 30{,}74)} = 0{,}47;$$

also $$\frac{v}{h} = \frac{0{,}47}{17{,}5} = \frac{1}{37{,}23}.$$

Der

Der Effect würde beym Versuch §. 17 VI. noch über den VII. gestiegen seyn, wenn λ und ω besser zusammengestimmt hätten. Diese Vergleichungen bestätigen aufs neue, daſs $\frac{v}{h}$, und um so mehr $\frac{v}{H-h}$ immer noch kleiner ist, als nöthig wäre, um ohne merklichen Fehler die obigen quadratischen Ausdrücke für die natürlichen Logarithmen annehmen zu können.

§. 26.

Setzt man $\frac{h}{\mu}$ statt v, so folgt aus §. 18. Nro. 14, daſs das Effectsverhältniſs desto gröſser wird, je gröſser man den Werth von μ macht. Substituirt man $\frac{h}{\mu}$ statt v, und setzt die Anzahl Schläge in 1 Min. $= n$, welches $\mathfrak{M} = n . M$ giebt, so erhält man §. 18. Nro. 8.

$$\text{I. } \mathfrak{M} = \frac{\left(2(H-h) . \frac{h}{\mu} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . \frac{h^2}{\mu^2}\right) . n\lambda\omega}{2 . (H-h)^2}$$

und §. 18. Nro. 13.

$$\text{II. } \mathfrak{M}' = \left(\frac{1}{\mu} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}') . \frac{1}{\mu^2}\right) . n\lambda\omega;$$

also, wenn wir den gesammten Wasserzufluſs mit Z, für eine Minute, bezeichnen,

$$\text{III. } Z = \frac{n\lambda\omega}{2\mu^2} . \left(\frac{2(H-h) . h\mu - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . h^2}{(H-h)^2} + 2\mu + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}'\right).$$

§. 27.

Das Product $n\lambda\omega$ hat auf das Effectsverhältniſs gar keinen Einfluſs, weil es im Werthe von E ganz wegfällt. Man erhält nämlich

$$E = \frac{\left(2(H-h) . \frac{1}{\mu} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . \frac{h}{\mu^2}\right) . \mu^2 . H}{2(H-h)^2 . \left(\frac{2(H-h) . \mu h^2 (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . h^2}{(H-h)^2} + 2\mu + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}'\right)},$$

also

also

$$\mathrm{IV.}\left\{\begin{array}{l} E = \dfrac{\big(2(H-h).\mu-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h\big).H}{2\mu.(H-h).h-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h^2+(2\mu+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').(H-h)^2}; \\ \text{oder auch} \\ E = \dfrac{\big(2(H-h).\mu-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h\big).H}{2\mu.(H^2-Hh)-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').H-)^2}. \end{array}\right.$$

Wäre $\frac{h}{H}$ sehr klein, so würde beynahe

$$E = \frac{2\mu H^2}{(2\mu+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}').H^2} = \frac{2\mu}{2\mu+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'},$$

also E desto gröſser, je gröſser μ ist.

§. 28.

Wenn indessen gleich das Product $n\lambda\omega$ aus dem Werthe von E ganz herausfällt, so sind doch die einzelnen Factoren desselben für das Effectsverhältniſs nicht ganz gleichgültig. Es hängt nämlich die im Werthe von E vorkommende Gröſse $\mathfrak{A}$ zugleich von λ und von ω ab, weil man $\mathfrak{A} = \frac{0{,}03.\lambda}{d}$ hat. Um nun den zu einem bestimmten Werthe von λ gehörigen Werth von ω zu finden, muſs man in der Gleichung für $\mathfrak{M}$ (vor. §. I.) diesen Werth statt $\mathfrak{A}$ setzen. So findet man $0{,}785\,d^2$ statt ω gesetzt,

$$d^2 - \frac{\frac{h}{\mu}.0{,}03.\lambda}{2(H-h)-\frac{h}{\mu}.\mathfrak{B}}.d = \frac{\mu(H-h)^2.\mathfrak{M}}{0{,}392.n.\lambda.\left(2(H-h)-\frac{h}{\mu}.\mathfrak{B}\right).h}$$

und daher

$$\mathrm{V.}\ d = \frac{0{,}03.\lambda h}{4\mu.(H-h)-2\mathfrak{B}h} + \sqrt{\left(\left(\frac{0{,}03.\lambda h}{4\mu(H-h)-2\mathfrak{B}h}\right)^2 + \frac{\mu(H-h)^2.\mathfrak{M}}{0{,}392.n.\lambda h\left(2(H-h)-\frac{h}{\mu}.\mathfrak{B}\right)}\right)};$$

woraus sich $\omega = 0{,}785.d^2$ ergiebt. Offenbar gilt hier nur die bejahte Wurzel. Wären also H, h, n, λ, μ und $\mathfrak{M}$ gegeben, so lieſse sich hiernach der erfoderliche Durchmesser d der Leitröhre

finden,

finden, da dann auch ω' und ω'' bestimmt wären, indem $\gamma\,\omega' = \gamma\,\omega'' = \omega$ genommen werden kann. Die Bestimmung von d aus dem Werthe von Z s. unten §. 33. Sämmtliche Formeln §. 26, 27 und hier (I bis V) erhalten eine gröſsere Allgemeinheit, wenn man darin $H + \mathfrak{H} - h$ statt $H - h$ schreibt. Ich behalte übrigens jetzt allemal die Voraussetzung bey, daſs λ nicht merklich von L verschieden sey, wie es für eine richtige Anlage seyn muſs.

§. 29.

Da sich ω wie d^2 verhält, und das zweyte Glied unter dem Wurzelzeichen bey weiten das Bedeutendste ist, so erhellet, daſs unter sonst gleichen Umständen ω ungefähr in demselben Verhältnisse gröſser werden muſs, wie $n.\lambda$ kleiner wird. Weil nun Vergröſserung von ω zugleich Verminderung von $\mathfrak{A}$ zur Folge hat, so gehört es zur Vollkommenheit der Maschine, $n.\lambda$ so klein zu machen, als es die Umstände gestatten. Kann man dem Producte $n.\lambda$ einen bestimmten Werth geben, so ist es wieder der vollkommenen Einrichtung gemäſs, λ so klein zu nehmen, als es sich thun läſst, weil hiermit der Werth von $\mathfrak{A}$ aufs neue vermindert wird. Hiermit ist dann zugleich Vergröſserung von n verbunden, welches wieder den Effect begünstigt, weil μ desto gröſser werden kann, je gröſser die Anzahl von Schlägen in 1 Min. ist.

Das Verhältniſs der 3 Gröſsen μ, λ und n unter einander ergiebt sich aus §. 18. Nro. 16, nämlich

$$\text{VI. } T = \frac{H\lambda}{(H-h).\sqrt{\mu g h}}.$$

Hieraus wird

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60.(H-h).\sqrt{\mu g h}}{H\lambda},$$

also

$$\text{VII. } \lambda = \frac{60.(H-h).\sqrt{\mu g h}}{n H}.$$

Man kann nun nach §. 28. V d abermal so bestimmen, daſs die Wassermenge $\mathfrak{M}$ in 1 Min. gefördert werden kann, was auch

n, μ

n, μ und λ für Werthe haben mögen; aber bey minder richtiger Wahl wird $\mathfrak{M}'$ grösser als bey besserer Einrichtung. Darum darf man jene 3 Grösen nicht nach Willkühr annehmen. Vor allen Dingen muss μ gross genug genommen werden. Die obigen Vergleichungen (§. 25) zeigen schon, dass wir ohne Anstand in der Anwendung $\mu = 100$ voraussetzen dürfen, indem dieses allemal durch den Werth von λ erreicht werden kann, der bey allen angestellten Versuchen zu beschränkt war. Dieses giebt doch schon (§. 27) $E = \frac{200}{200 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}'} = \frac{1}{1 + \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}{200}}$, wenn $\frac{h}{H - h}$ sehr klein ist. Den Werth von n können wir nicht so nach Willkühr festsetzen, weil hier vieles auf die Hand des Künstlers ankommt, um einen grossen Werth für n zu erhalten. Um daher dem Künstler die Arbeit zu erleichtern, setze man nur $n = 15$, und berechne hiernach λ, so wird

$$\text{VIII. } \lambda = \frac{60.(H - h).\sqrt{100.gh}}{15.H} = \frac{40(H - h).\sqrt{gh}}{H},$$

oder allgemeiner

$$\text{IX. } \lambda = \frac{60.(H + \mathfrak{H} - h).\sqrt{100.gh}}{15.H}$$

$$= \frac{40.(H + \mathfrak{H} - h).\sqrt{gh}}{H}.$$

Nunmehr läſst sich aus §. 28. V, der Werth von d, also auch von ω bestimmen.

In der Ausführung muſs nun, weil man alsdann die verfertigten Röhren von der so bestimmten Röhrenweite ω gebrauchen muſs, dafür gesorgt werden, daſs $n.\lambda = \frac{600(H - h).\sqrt{gh}}{H}$ bleibe, wenigstens nicht beträchtlich kleiner, damit auch der erfoderliche Werth von ω sich nicht merklich ändere.

Es kann der Hand des Künstlers gelingen, es noch früher, als λ die berechnete Gröſse beym Zusammenfügen der Röhren erlangt hat, dahin zu bringen, daſs n λ den vorhin genannten Werth

und

und selbst noch einen grösseren erlange. In diesem Falle wäre es natürlich, die Leitröhre nicht ferner zu verlängern, sondern es dabey zu belassen. Tritt aber dieser Fall nicht ein, so fährt man fort, die Leitröhre zu verlängern, bis man den so bestimmten Werth von $n\,\lambda$ erhält, wenn man auch λ merklich grösser als nach Nr. IX nehmen müſste. Weil mit dieser vergröſserten Länge der Leitröhre zugleich ein genügender Werth von n immer leichter zu erhalten wird, indem solcher für gröſsere Werthe von λ immer kleiner werden darf, so hat es in der Ausführung keinen Anstand, endlich dahin zu gelangen, das $n\,\lambda\,\omega$ einen Werth erhalte, der von dem berechneten nicht mehr merklich verschieden ist. Käme man auf einen Werth des Products $n\,\lambda\,\omega$, welcher gröſser als nach der vorstehenden Rechnung wäre, so wäre dieses ein Beweis, daſs man für μ, welches in der Formel nur $= 100$ gesetzt worden ist, zum Vortheile des Effects einen gröſseren Werth erhalten hat, indem die Theorie es möglich läſst, μ sogar $= 120$ und noch gröſser zu erhalten. Der Werth $\mu = 100$ ist nur darum von mir zum Grunde gelegt worden, weil er auch ohne sehr groſse Länge der Leitröhre, selbst bey einem ziemlich geringen Werthe von n, wie die Formeln ergeben, erhalten werden kann, und demnach zu einem schon hinlänglich grossen Effecte führt.

§. 30.

Ex. Es sey die Druckhöhe $h = 119$ Z. gegeben; man soll in jeder Min. 570 C. Z. Wasser auf die Höhe $H = 377$ Z. erheben; wie groſs muſs man λ und ω machen, und wie viel Wasser muſs der Maschine überhaupt zuflieſsen?

Ich setze nach vor. §. nur $n = 15$; auch will ich anfänglich $\mathfrak{H}$ bey Seite setzen; so erhält man (vor. §. Nr. VIII), g auf Zolle gebracht,

$$\lambda = \frac{40.258.\sqrt{12.15{,}625.119}}{377} = 4089 \text{ Z.};$$

 also

also (§. 28. V), $\mathfrak{B} = 3{,}8$ gesetzt,

$$0{,}03 . \lambda . h = 14600$$

$$4 \mu . (H - h) - 2 \mathfrak{B} h = 102295$$

$$\mu (H - h)^2 . \mathfrak{M} = 3794148000$$

$$0{,}392 . 15 . \lambda . h = 24047 . 119$$

$$2 (H - h - \frac{h}{\mu} . \mathfrak{B} = 512,$$

demnach
$$d = \frac{14600}{102295} + \sqrt{\left(\left(\frac{14462}{102295}\right)^2 + \frac{3794148000}{24047 . 512 . 119}\right)}$$
$$= 0{,}142 + \sqrt{(0{,}0204 + 2{,}59)}$$
$$= 1{,}75 \text{ Z.};$$

also
$$\omega = 0{,}785 . 1{,}75 = 2{,}4 \text{ Q. Z.}$$

Nunmehr hat man auch

$$\mathfrak{A} = \frac{0{,}03 . 4089}{1{,}75} = 70.$$

Setzen wir also nach obigen Bestimmungen $\mathfrak{B}' = 2{,}75$; so erhalten wir aus §. 26. II

$$\mathfrak{M}' = \left(\frac{1}{160} + \tfrac{1}{2} . 74 . \frac{1}{10000}\right) . 15 . 4051 . 2{,}29$$
$$= 2005 \text{ C. Z.}$$

demnach
$$E = \frac{377 . 570}{119 . (570 + 2005)} = 0{,}701.$$

Der wirkliche Versuch gab $E = 0{,}882$. Der Künstler brachte es aber auch dahin, dafs $n = 80$ wurde, wofür ich nur 15 angenommen habe. Beym Versuch war $n . \lambda = 80 . 510 = 40800$; hier ist $n . \lambda = 15 . 4089 = 61335$; daher beym Versuch $n . \lambda$ in der That noch zu klein.

Lassen wir $n . \lambda = 61335$, behalten $\omega = 2{,}404$ Q. Z. bey, und setzen nun nach und nach die Röhrenstöcke zusammen, bis wir $n . \lambda$ beynahe $= 61335$ erhalten, so dürfen wir auch einen viel gröfseren Werth von E erwarten. Wenn auch der Künstler bey diesem Verfahren nicht bis zu $n = 80$, sondern nur bis zu $n = 60$ gelangen sollte, so dafs jetzt $\lambda = \frac{61335}{60} = 1022$ Zoll wäre, so hätte man

$$\mathfrak{A} = \frac{0{,}03 . 1022}{1{,}75} + 17{,}5 \text{ also jetzt}$$

$$\mathfrak{M}' = \left(\frac{1}{100} + \tfrac{1}{2}\, 20{,}25 . 0{,}0001\right) . 60 . 1022 . 2{,}404$$
$$= 1621 \text{ C. Z.}$$

also $$E = \frac{377 \cdot 570}{119 . (570 + 1621)} = 0{,}824.$$

Jetzt wollen wir λ, $\mathfrak{M}'$ und E für die Voraussetzung, daſs $n = 80$ sey, bestimmen. Wir haben nunmehr

$$\lambda = \frac{6135}{80} = 766.7,$$

wofür wir $\lambda = 767$ setzen wollen.

In der Voraussetzung, daſs wir die Röhrenstücke schon für $\omega = 2{,}404$ Q. Z. haben fertigen lassen, wird jetzt

$$\mathfrak{A} = \frac{0{,}03 \cdot 760}{1{,}75} = 13{,}15;$$

$\mathfrak{B}'$ bleibt $= 2{,}75$, also $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'$ beynahe $= 16$;

daher $$\mathfrak{M}' = (0{,}01 + 8 . 0{,}0001) . 61335 . 2{,}4$$
$$= 1590 \text{ C. Z.}$$

und $$E = 0{,}836.$$

Bestimmen wir aber auch ω nach unserer Formel §. 28. V, so finden wir $d = 1{,}626$ Z.; also $\omega = 0{,}785 \cdot 2{,}64 = 2{,}07$ Q. Z.;

also jetzt $$\mathfrak{A} = \frac{0{,}03 . 767}{1{,}62} = 14{,}2;$$ $\mathfrak{B}'$ bleibt wie vorhin;

daher $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'$ beynahe $= 17$,

und $$\mathfrak{M}' = 0{,}0108 . 61335 . 2{,}017 = 1371;$$

folglich $$E = \frac{377 \cdot 570}{119 . (570 + 1371)} = 0{,}930.$$

Bey Versuch §. 17. VI war $E = 0{,}88$.

§. 31.

In der Anwendung auf Anlagen im Groſsen, wo diese Maschine für geringes Gefälle von Bächen oder Flüſsen benutzt werden

 soll,

soll, erhält man kleinere Werthe für λn, als man ohne die vorstehende Theorie vermuthen möchte. Dieses erhellet sogleich aus dem Anblick der Formel

$$n\lambda = \frac{60.(H-h).\sqrt{\mu g h}}{H},$$

wo im Grofsen h z. B. 16 = 18 = 24 Zolle u. s. w. betragen kann, da vorhin h = 119 Z. war. Hier mufs sich E dem Werthe

$$\frac{2\mu}{2\mu + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}'} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1 + \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}'}{200}}$$

und eben darum auch der 1 sehr nähern, wenn nur $\mathfrak{A}$ nicht sehr grofs ausfällt, weil $\mathfrak{B}'$ allemal = 2,75 gemacht werden kann, und $\mathfrak{B} = 3{,}8$. Wir wollen zuerst eine Anwendung auf den Versuch §. 17. I machen. Bey diesem war

$$\left.\begin{aligned} H &= 377 \text{ Z.} \\ h &= 17{,}5. \\ \mathfrak{M} &= 16 \text{ C. Z.} \end{aligned}\right\}, \text{ also } \lambda = \frac{40.359{,}5\sqrt{187{,}5.17{,}5}}{377} = 2185.$$

Nunmehr wird aus §. 28. V

$$d = \frac{0{,}03.2186.17{,}5}{400.359{,}5 - 7{,}6.17{,}5} + \sqrt{\left(\left(\frac{0{,}03.2186.17{,}5}{400.359{,}5 - 7{,}6.17{,}5}\right)^2 + \frac{359{,}5^2.17.100}{17{,}5.0{,}392.32790.(719 - 0{,}665)}\right)}$$

$$= \frac{1147{,}65}{143668} + \sqrt{\left(\left(\frac{1147{,}65}{143668}\right)^2 + \frac{236708000}{17{,}5.9232798}\right)}$$

$$+ 0{,}008 + \sqrt{(0{,}000064 + 1{,}3597}$$

$$= 0{,}008 + 1{,}166 = 1{,}174 \text{ Zoll.}$$

Hieraus findet man

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}' = \frac{0{,}03.2185}{1{,}174} + 2{,}75 = 58{,}58;$$

daher §. 26. II

$$\mathfrak{M}' = (0{,}01 + 0{,}0029).15.2185.0{,}785.1{,}378$$
$$= 457 \text{ C. Z.}$$

und nun

$$E = \frac{17.377}{(17+457).17{,}5} + \frac{6409}{8295} = 0{,}772.$$

Beym

Beym Versuch war nur $E = 0{,}088$, also über 8mal kleiner. Dort war $\omega = 3{,}69$ Q. Z. Hier ist ω nur $= 1{,}082$, also noch nicht $\frac{1}{3}$ so groſs als dort; dagegen war die Länge der dortigen Leitröhre nur $= 510$ Zoll, hier $= 2185$ *).

§. 32.

Ein Beyspiel zu einer Anlage im Groſsen sey folgendes.

Man soll bey einer Druckhöhe $h = 20$ Zoll in jeder Minute 4 C. Fuſs Wasser auf eine Höhe H von 160 Fuſs $= 1920$ Z. fördern. Wie viel Wasser muſs der Maschine in jeder Min. zuflieſsen, und wie groſs muſs man n, λ und d nehmen?

Die Länge der Steigröhre L soll 7000 Zolle betragen.

Hier

*) Ich habe später (s. unten §. 37 nahe am Ende) noch eine Bemerkung gemacht, nach welcher bey beträchtlichen Werthen von $\mathfrak{M}'$ die Werthe von $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{B}'$ beträchtlich gröſser ausfallen müssen, als ich in diesem §. angenommen habe. Es kann aber dennoch auch bey sehr bedeutenden Werthen von $\mathfrak{M}'$ dahin gebracht werden, daſs E einen so hohen Werth erhalte, als man bey einem Wasserrade mit Saug- oder Druckwerken nicht erwarten kann, wenn gleich h sehr klein in Vergleichung mit H wäre. Uebrigens muſs ich hier noch bemerken, daſs der Werth von $n\lambda$ nicht immer desto gröſser wird, je gröſser $\frac{h}{H}$ ist. Wird nämlich für einen bestimmten Werth von H die Druckhöhe h als veränderlich betrachtet, so giebt sich das Maximum von $n\lambda$, wenn man

$$\frac{d(H-h).\sqrt{h}}{dh} = 0$$

setzt. Es wird daher $n\lambda$ am gröſsten, wenn

$$h = \tfrac{1}{3} H$$

wird. Für diesen Fall hat man

$$n\lambda = \frac{60.(H - \frac{1}{3}H).\sqrt{\mu g.\frac{1}{3}H}}{H}$$
$$= 40.\sqrt{\tfrac{1}{3}\mu g H};$$

oder, $\mu = 100$ gesetzt,

$$n\lambda = 400.\sqrt{\tfrac{1}{3} g H}.$$

Ist also h gröſser oder kleiner als $\frac{1}{3}$ H, so wird allemal

$$n\lambda < 400.\sqrt{\tfrac{1}{3} g H}.$$

Hier kann die Gröſse $\mathfrak{H}$ nicht auſser Acht gelassen werden, ohne $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{w}$ vorher so genommen zu haben, daſs $\mathfrak{H}$ bey Seite gesetzt werden darf. Man hat aber §. 20

$$\mathfrak{H} = \frac{16.\ 1728^2}{7200.\ 187,5.\ \mathfrak{w}^2} \cdot \left(\frac{0,03.\ 7000}{\mathfrak{d}} + 1\right)$$

$$= \frac{1728^2}{45 \cdot 1875 \cdot \mathfrak{w}^2} \cdot \left(\frac{0,03.\ 7000}{\mathfrak{d}} + 1\right).$$

Um diese Hinderniſshöhe möglichst zu verkleinern, darf man nur $\mathfrak{d}$ groſs genug nehmen, und so könnte man auch hier $\mathfrak{H}$ unbedeutend machen, wenn man die Steigröhre im Durchmesser 12zöllig nähme. In Rücksicht auf Kostenersparung, deren Gränze in jedem einzelnen Falle gleichfalls gegeben ist, will ich zuerst $\mathfrak{d} = 6$ Z. annehmen, so wird $\mathfrak{w} = 28,26$ Q. Z. und

$$\mathfrak{H} = 0,044 \cdot 36 = 1,58 \text{ Z.}$$

Weil nun auch noch für $\mathfrak{d} = 3$ Zoll, welches eine bedeutende Kostenersparung giebt, erst

$$\mathfrak{H} = 2^4 \cdot 0,044 \cdot (2 \cdot 35 + 1) = 51 \text{ Z.}$$

giebt, so will ich hier

$$\mathfrak{d} = 3 \text{ Z., also } \mathfrak{w} = 7,065 \text{ Q. Z.}$$

beybehalten.

Nunmehr setze ich $n = 15$, so wird §. 29. IX

$$\lambda = \frac{40 \cdot (1920 + 51 - 20) \cdot \sqrt{187,5 \cdot 20}}{1920}$$

$$= 2487 \text{ Z.}$$

Die Gleichung §. 28. Nr. V giebt jetzt

$$d = 47,4 \text{ Z., also } \mathfrak{b} = 0,785 \cdot 47,4^2 = 1763 \text{ Q. Z.}$$

Hierzu würde ein bedecktes parallelepipedisches Gerinne zu 20 Zoll tief und 88,15 Zoll breit erfoderlich seyn.

Aus §. 26. II wird nun ferner

$$\mathfrak{M}' = (0.01 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{0,03.\ \lambda}{d} + 2,75\right) 0,0901) \cdot 15 \cdot 2487 \cdot 1763$$

$$= 0,01018.\ 65742270 = 669256 \text{ C. Z.}$$

$$= 387 \text{ C. Fuſs für eine Minute.}$$

Folg-

Folglich werden in jeder Sec. $\frac{\mathfrak{M}+\mathfrak{M}'}{60}+\frac{391}{60}=6{,}51$ C. F. Wasser für die Maschine erfodert. Dabey findet man

$$E=\frac{M.H}{(M+M').h}=\frac{\frac{1}{15}.1924}{6{,}51.20}=\frac{128}{130}=0{,}984.$$

Jetzt ist noch die Bestimmung der Abmessungen für den Windkessel übrig. Nach §. 23 soll

$$(\zeta+\varepsilon).(\mathfrak{W}-\mathfrak{w})\text{ nicht }<\frac{(k+H+\mathfrak{H}-h).25\,M'''}{k}$$

seyn. Hier ist $M'''=\frac{4}{60}$ C. F.; also, alles in Füssen ausgedrückt, die Grösse zur Rechten

$$=\frac{(32+160+3{,}58-1{,}66).25.4}{32.60}$$

$$=10\text{ C. F.}$$

Ich nehme nun $\zeta=1{,}25.\mathfrak{D}$; $\varepsilon=\frac{1}{6}\mathfrak{D}$; also $\varepsilon+\zeta=1{,}416.\mathfrak{D}$. Es ist ferner $\mathfrak{W}=0{,}785.\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{w}=28{,}26$ Q. Z. $=0{,}196$ Q. Fuſs. Demnach soll

$$1{,}416.\mathfrak{D}.(0{,}785.\mathfrak{D}^2-0{,}196)\text{ nicht }<10$$

seyn; oder

$$\mathfrak{D}^3-0{,}249.\mathfrak{D}\text{ nicht }<9.$$

Dieser Foderung thut schon $\mathfrak{D}=2{,}2$ Fuſs vollkommen Genüge. Man hätte also nunmehr auch

$$\zeta=2{,}75\text{ F.}\quad\varepsilon=0{,}37\text{ F.}$$

Macht man die Haube conisch, so kann man sie bis zur Spitze 16 Zoll hoch machen, und dann zum Einlassen der Steigröhre sie gehörig abstülpen. Unterhalb der unteren Steigröhrenöffnung kann zwischen ihr und dem Ventile ein 9 Zoll hoher Zwischenraum seyn, so daſs die ganze Höhe vom cylindrischen Theile des Windkessels $2{,}75+0{,}75=3{,}5$ Fuſs betrüge.

Ich habe der Rechnung geflissentlich ihren einfachen Gang lassen wollen, um dabey bemerken zu lassen, wie man bey der Anordnung des Ganzen oft am Ende auf Resultate geführt werden

könne,

könne, die sich nicht so beybehalten lassen. Denn es geht nicht an, ω' oder die Gröfse der Oeffnung im Steigventile $= \omega = 1763$ Q. Z. oder $= 12{,}2$ Q. F. machen zu wollen. Die Bodenfläche des Windkessels $\mathfrak{W}$ ist sehr nahe $= 3{,}8$ Q. Fufs; also wäre der Raum bey weiten nicht hinlänglich, um ein so grofses Ventil anzubringen. Um indessen die Ventilöffnung ω' nicht zu sehr zu verkleinern, kann man $\omega' = 3$ Q. Fufs machen, und zu dem Ende $\mathfrak{D}$ etwa $= 2{,}6$ Fufs nehmen. So wird jetzt

$$\mathfrak{M}' = (0{,}01 + \frac{0{,}03.\,\lambda}{2.\,\mathrm{d}.\,10000} + 0{,}0022).\ 65854635 \text{ C. Z.}$$
$$= 808363 \text{ C. Z.} = 467{,}8 \text{ C. F.};$$

also die in 1 Sec. erfoderliche Wassermenge

$$\frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'}{60} = \frac{471{,}8}{60} = 7{,}84 \text{ C. F.},$$

und jetzt

$$\mathrm{E} = \frac{\frac{1}{15}.\,1920}{7{,}84.\,20^{\circ}} = \frac{1920}{2354} = 0{,}81,$$

welches noch immer ein sehr bedeutender Nutzeffect ist *). Auf den Werth von d hat diese Abänderung keinen merklichen Einflufs.

§. 33.

Wir wollen noch eine Anwendung auf einen Fall machen, wie er etwa bey Wiesenwässerungen vorkommen könnte. Ich hole hier zugleich eine Aufgabe nach, welche zur Ergänzung des 28. §. dient. Nämlich:

Es sey die gesammte Wassermenge Z gegeben, welche in jeder Minute für die Maschine benutzt werden kann, nebst der Druckhöhe h und der Förderungshöhe H; wie grofs mufs man λ und d nehmen, und wie viel Wasser wird die Maschine in jeder Minute auffördern?

Aufl.

*) Ein unterschlächtiges Wasserrad mit einem Druckwerke gäbe noch nicht $\mathrm{E} = 0{,}2$.

Aufl. Zur Beantwortung dient uns §. 26. Man hat nämlich

$$\frac{2\mu^2.(H-h)^2}{n\lambda}.Z=\Big(2.(H-h).h\mu+(2\mu+\mathfrak{B}').H-h)^2\Big).0{,}785.d^2-h^2\mathfrak{B}.0{,}785.d^2$$

$$+\Big((H-h)^2-h^2\Big).\frac{0{,}03.\lambda}{d}.0{,}785.d^2$$

$$=\Big(2.(H-h).h\mu+(2\mu+\mathfrak{B}').(H-h)^2-\mathfrak{B}h^2\Big).0{,}785.d^2$$

$$+\Big((H-h)^2-h^2\Big).0{,}03.0{,}785.\lambda.d,$$

oder

$$\frac{84{,}926.\mu^2..(H-h)^2}{n\lambda}.Z=\Big(2.(H-h).h\mu+(2\mu+\mathfrak{B}').(H-h)^2-\mathfrak{B}h^2\Big).\frac{d^2}{0{,}03}$$

$$+(H^2-2Hh).\lambda.d.$$

Ich setze nun die in Z multiplicirte Grösse $=\pi$, die in $\frac{d^2}{0{,}03}$ multiplicirte $=\Sigma$, so hat man

$$\pi.Z=\frac{\Sigma}{0{,}03}.d^2+(H^2-2Hh).\lambda.d,$$

also

$$d^2+\frac{0{,}03.(H^2-2Hh).\lambda}{\Sigma}.d=\frac{0{,}03.\pi.Z}{\Sigma}$$

und daher

$$d=-\frac{0{,}015.(H^2-2Hh).\lambda}{\Sigma}+\sqrt{\left(\frac{0{,}015^2.(H^2-2Hh)^2.\lambda^2}{\Sigma^2}+\frac{0{,}03\,\pi Z}{\Sigma}\right)}.$$

Den Werth von λ nehmen wir aus §. 29 und die Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ geben sich aus §. 26.

§. 34.

Es soll aus einem Bach, der in jeder Minute 280 C. F. Wasser hergeben kann, bey einer Druckhöhe h = 3 Fufs, zur Wiesenbewässerung soviel Wasser, als durch eine solche Maschine geschehen kann, auf die Höhe von 13 Fufs gefördert werden; wie grofs mufs man λ und ω nehmen, und wie viel Wasser kann in jeder Minute aufgefördert werden?

Ich setze n = 15 und nehme nun aus §. 29. VIII, weil $\mathfrak{H}$ unbedeutend gemacht werden kann,

$$\lambda=\frac{40.10.\sqrt{15{,}6.3}}{13}=210\ \text{F.}$$

Wir

Wir finden nunmehr im vor. §.

$$n = \frac{84,926 . 10000 . 100}{15 . 210} = 26960$$

$$\Sigma = 20 . 3 . 100 + (200 + 2,75) . 100 - 3,8 . 9 = 26241$$

$$\frac{0,015 . (H^2 - 2 H h) . \lambda}{\Sigma} = \frac{286}{26241};$$

daher

$$d = -\frac{286}{26241} + \sqrt{\left(\left(\frac{286}{26241}\right)^2 + \frac{0,03 . 26960 . 280}{26241}\right)}$$

$$\doteq 2,927 \text{ Fuſs},$$

und nun $\omega = 0,785 . 2,927^2 = 0,785 . 8,58$ Q. F. $= 6,72$ Q. F.

Jetzt wird

$$\mathfrak{M} = \frac{\left(2 . 10 . 0,03 - \left(\frac{0,03 . 210}{2,93} + 3,8\right) . 0,0009\right) . 15 . 210 . 0,785 . 8,58}{200}$$

$$= 63,08 \text{ C. F.}$$

folglich $\mathfrak{M}' = 280 - 63,08 = 216,92$ C. F.;

dabey ist $n \lambda \omega = 21168$.

Berechnet man $\mathfrak{M}'$ nach §. 26. II besonders, so findet man

$$\mathfrak{M}' = \left(0,01 + \left(\frac{0,03 . 210}{5,87} + 1,37\right) . 0,0001\right) . 21168$$

$$= 216 \text{ C. F.},$$

so daſs $\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' = 63,08 + 216 = 279,08$ C. F. statt 280 herauskäme, welches für so mannigfaltige Berechnungen ein unbedeutender Unterschied ist.

Zur Ausgleichung können wir

$$\mathfrak{M} = 63 \text{ C. F. und } \mathfrak{M}' = 217 \text{ C. F.}$$

setzen. Hiernach wird nun

$$E = \frac{63 . 13}{280 . 3} = \frac{819}{840} = 0,975.$$

Es tritt aber auch hier wieder der Umstand ein, daſs man ω' und ω'' beträchtlich kleiner annehmen muſs, als diese Berechnungen voraussetzen, z. B. nur $\frac{1}{4}$ so groſs. Hierdurch werden ω'^2 und ω''^2 16mal verkleinert, also $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ 16mal vergrössert. Wir erhalten daher jetzt für denselben Werth von ω

$$\mathfrak{M} = \frac{(0,6 - (2,25 + 16 . 3,8) . 21168}{200}$$

$$= 57 \text{ C. F.}$$

Aber jetzt wird auch α sehr genau in dem Verhältnisse 57 : 63 kleiner; es bleibt daher nur noch

$$\mathfrak{M} = \frac{57}{63} \cdot 57 = 51{,}5 \text{ C. F.},$$

und hiernach

$$\mathfrak{M}' = 280 - 51{,}5 = 228{,}5 \text{ C. F.},$$

also
$$E = \frac{51{,}5 . 13}{280 . 3} = 0{,}797.$$

§. 35.

Sowohl die französischen Mathematiker Bossut und Cousin als Eytelwein haben in den angeführten Schriften aus den Resultaten ihrer Versuche den Schluſs gezogen, daſs der hydraulische Stösser für kleine Werthe von $\frac{h}{H}$ nur wenig leiste. Eytelwein giebt sogar die Formel

$$E = 1{,}12 - 0{,}2 . \sqrt{\frac{H-h}{h}},$$

so lange $\frac{H-h}{h}$ zwischen 1 und 20 falle (a. a. O. S. 92). Es ist aber aus der hier vorgetragenen Theorie offenbar, daſs auch für sehr kleine Werthe von $\frac{h}{H}$ noch

$$E = \frac{1 - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . \frac{v}{2H}}{1 + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}') . \frac{v}{2h}} \quad (\text{§. 18. Nr. 14})$$

werden müsse. Wenn nun bey einem kleinen Werthe von $\frac{h}{H}$ auch n klein ist, so erhält das Wasser in der Leitröhre zwischen zwey Schlägen Zeit genug, eine Geschwindigkeit zu erreichen, für welche $\frac{v}{h}$ kein sehr kleiner Bruch mehr ist, wenn dabey λ nicht groſs genug genommen wird, wie solches bey allen uns mitgetheilten Versuchen, bey kleinen Werthen von $\frac{h}{H}$, der Fall war. Dann muſs freylich der Werth von

$$\mathrm{E} = \frac{1 - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot \frac{v}{2\,\mathrm{H}}}{1 + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}.') \, \frac{v}{2\,h}}$$

ziemlich klein ausfallen. Es liegt daher nicht in der Natur der Maschine, sondern in nicht zusammenpassenden Werthen von λ, ω und n, daſs bey kleinen Werthen von $\frac{h}{\mathrm{H}}$ die Werthe E in den mitgetheilten Versuchen so gering ausfielen. Man sehe oben §. 31. Eben darum geht es auch nicht an, blos aus Resultaten so beschränkter Versuche, bey welchen nie λ über 510 Zoll betrug, allgemeine Formeln für E ableiten zu wollen.

§. 36.

Ich muſs hier noch ein Urtheil beyfügen, das die vortreflichen französischen Mathematiker **Bossut** und **Cousin** in der oben angeführten **Abbild. u. Beschreib.** etc. S. 22 zum Nachtheil dieser Maschine ausgesprochen haben:

> „— — — Nimmt man also an, daſs der hydraulische „Widder für den ersten Fall (für einen kleineren Werth von „H) die erfoderlichen Abmessungen habe, so wird er sie darum „nicht auch für den zweyten Fall (für einen gröſseren Werth „von H) haben, ein **Nachtheil, welchem die hydraulischen Räder nicht unterworfen sind.**"

Es ist unbegreiflich, wie Mathematiker von diesem Range sich einen solchen Ausspruch erlauben konnten.

Man denke sich doch ein Druckwerk in Verbindung mit einem unterschlächtigen Rade in der erfoderlichen Vollkommenheit für die Förderungshöhe von 40 Fuſs eingerichtet. Jetzt verlangt man, es soll die Maschine das Wasser auf eine Höhe von 160 Fuſs erheben, so wird das Rad nicht nur bey weiten nicht mehr den gröſstmöglichen Effect eines unterschlächtigen Rades, sondern es wird **gar nichts mehr** leisten. Man muſs jetzt ent-

entweder ein neues Druckwerk mit Stiefeln von kleinerem Durchmesser oder ein neues Wasserrad von gröfserem Durchmesser anlegen, und nach Beschaffenheit des schon vorhandenen Wasserrades können beyde Aenderungen zugleich nothwendig werden. Dieselbe Bewandnifs hat es auch mit einem oberschlächtigen Wasserrade, wo das neue zwar nicht höher, aber bey weiten breiter als das erste seyn, und überdas auch wohl neue engere Stiefel angebracht werden müfsten. Und ein ähnlicher Erfolg mufs nothwendig auch bey dem hydraulischen Stösser eintreten, also ein Nachtheil, den er mit den hydraulischen Rädern gemein hat.

§. 37.

Um auf die wahre Beschaffenheit dieser Maschine aufmerksam zu machen, und nichts dabey zu übersehen, was zu ihrer genauen Kenntnifs gehört, mufs ich hier noch auf einen Umstand hinweisen, welcher der Anwendung der vorstehenden Theorie entgegen zu seyn scheint. Die gewöhnlichen Klappenventile haben nämlich das Nachtheilige, dafs bey Erhebung derselben das Wasser von Augenblick zu Augenblick einen immer freyeren Durchgang findet. Beym Rückfallen ist es umgekehrt. Dieses scheint einer Foderung entgegen zu seyn, die bey der vollkommenen Einrichtung dieser Maschine als unnachläfslich zum Grunde liegt.

> Es mufs nämlich bey der vortheilhaftesten Einrichtung dieser Maschine dafür gesorgt seyn, dafs die Geschwindigkeit des Wassers in der Leitröhre, bey welcher die Sperrklappe zuschlägt, und deren zugehörige Höhe ich oben $= \frac{h}{100}$ gesetzt habe, gerade so grofs sey, als sie durch den Wasserverlust M' bey jedem Schlage erlangt werden kann.

Zu dieser wichtigen Foderung gehört, dafs das Wasser während des Ausflufses keinen Augenblick seine Bewegung in der Leitröhre fortsetze, ohne dafs seine Geschwindigkeit gleichförmig beschleunigt zu werden fortfahre; d. h. wenn ein Wassertheilchen längs der Leit-

Leitröhre den Weg S durchlaufen hat, so dafs seine Geschwindigkeit einer gewissen Höhe u zugehört, und dasselbe nun durch einen Raum S′ weiter vorrückt, so mufs jetzt seine Geschwindigkeit der Höhe $\frac{S+S'}{S}.u$ zugehören. Gesetzt, dieser Erfolg trete bis zu einem gewissen Augenblicke ein, und es verfliessen von diesem Augenblicke an noch 10 Terzien bis zum Anschlagen der Sperrklappe; diese gestatte aber bey ihrer ferneren Annäherung zum Schlusse der Ventilöffnung dem Wasser in der Leitröhre nicht, die Bewegung mit zunehmender Geschwindigkeit in diesen letzten 10 Terzien fortzusetzen, sondern es fliesse das Wasser von jenem Augenblicke an mit unveränderter Geschwindigkeit längs der Leitröhre fort, so dafs die schon vorher gehabte Geschwindigkeit u auch beym Anschlagen der Klappe noch $= u$ ist, so hat man jetzt nur $v = u$, und die in den letzten 10 Terzien ausgeflossene Wassermenge ist barer Verlust, der den Werth von M′ ohne Nutzen vergröfsert. Die in den letzten 10 Terzien ausgelaufene Wassermenge heifse m′, so ist hier durch die Wassermenge M′ die zu v gehörige Geschwindigkeit erlangt worden, die man schon durch $M' - m'$ erlangt hätte. Wäre man dergleichen Erscheinungen als ungefähren Zufällen bey dem hydraulischen Stösser wirklich ausgesetzt, so würde die hier vorgetragene Theorie gar keine Anwendung leiden, und wir müfsten es dem Ungefähr überlassen, welchen Effect die Maschine leisten werde.

Aber bey näherer Ueberlegung fallen diese Zweifel weg. Soll nämlich das Wasser in der Leitröhre beschleunigt zu werden aufhören, so müfste die Sperrklappe solches verhindern, welches sie nicht kann, wenn nicht grobe Fehler dabey begangen werden. Gesetzt auch, sie versperrte (welches kein möglicher Fall ist) noch vor dem Zuschlagen dem Wasser allen Ausflufs aus dem Sperrbehältnifse, so könnte dennoch die beschleunigte Bewegung des Wassers bis zum erfolgten Anschlage in der Leitröhre fortdauern. Sollte die beschleunigte Bewegung in irgend einem Augenblicke aufhören, so müfste die Klappe den hierzu erfoderlichen Rückgang versagen und sich, wenn ihre Fläche $= Z$ gesetzt wird, mit einer

Kraft $= (h - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . v') . Z$ der Bewegung widersetzen. In diesem Falle würde das Wasser die einmal erlangte Geschwindigkeit, welche der Höhe v' zugehört, in der Leitröhre vermöge der Trägheit fortsetzen, und das Wasser durch den ihm noch gestatteten Ausgang zwischen der Klappe und der Ventilöffnung abfliessen. Da aber die Einrichtung so gemacht wird, dafs die Klappe auch ohne den Wasserdruck schon für sich zurück zu fallen strebt, wozu die Feder bey ζ (Fig. 9) auch noch behülflich ist, so findet jener Widerstand nicht Statt. Vielmehr kann die Klappe dem Wasserdrucke leicht folgen und hierdurch gewinnt das aus der Leitröhre strömende Wasser neuen Raum im Sperrbehältnifse, so dafs der in den letzten Augenblicken von der Klappe durchlaufene körperliche Raum von diesem aus der Leitröhre beyfliefsenden Wasser ausgefüllt wird. Wenn daher auch beynahe gar kein Wasser mehr ausfliefst, so kann dennoch die Bewegung des Wassers in der Leitröhre ferner beschleunigt werden, indem die Klappe sich dieser Beschleunigung nicht widersetzt, sondern mit der erfoderlichen Geschwindigkeit folgt, um dem Wasser aus der Leitröhre neuen Platz im Sperrbehältnisse einzuräumen. Denn der Raum zwischen der Klappe und der Wand, an die sie anschlägt, war vorher als dem Behältnisse entzogen zu betrachten, und dieser wird durch das Zurückfallen der Klappe wieder gewonnen und von dem aus der Leitröhre nachfolgenden Wasser ausgefüllt. Nur weil auch während des Rückfallens der Sperrklappe immer noch Wasser durch den sich allmählig verengenden Ausgang ausfliefst, wird die Klappe dem nachfolgenden, d. h. dem in das Sperrbehältnifs einströmenden Wasser minder schnell Platz machen dürfen, als wenn dieser Ausflufs ganz gehemmt wäre. In dem Maafse, wie weniger Wasser durch die Ventilöffnung, die immer mehr verdeckt wird, ausfliefsen kann, mufs mehr Wasser im Sperrbehältnisse zurückbehalten werden. Man sieht, dafs die Klappe sogar schneller zufallen müfste, als nöthig wäre, um dem mit beschleunigter Bewegung aus der Leitröhre abfliefsenden Wasser hinlänglichen Platz zur Ausfüllung zu gestatten, wenn nicht die dadurch entstehende Leere im Behältnisse oder vielmehr der dieser Leere entgegen wirkende atmosphärische Druck solches verhinderte. Wenn auch bey der ersten Eröffnung des Sperrventils der Umstand eintritt, daſs das Wasser, welches den körperlichen Raum ausfüllt, den die Klappe bey ihrer ersten Eröffnung durchläuft, nothwendig das Sperrbehältniſs verlassen muſs, ohne daſs hiermit Abfluſs aus der Leitröhre verbunden seyn darf, daſs also auf diese Weise schon Wasserverlust vorhanden ist, bevor das Wasser noch einige Geschwindigkeit in der Leitröhre erhalten hat, so tritt dagegen beym Rückfallen der Klappe der entgegengesetzte Fall ein, daſs mit der noch zunehmenden Geschwindigkeit des Wassers in der Fallröhre der Wasserverlust durch die Ventilöffnung, die immer mehr verdeckt wird, von Augenblick zu Augenblick kleiner wird, indem das Wasser aus der Leitröhre von Augenblick zu Augenblick mehr Raum im Behältnisse findet. Das in den ersten Augenblicken der Eröffnung vergeblich verlorne Wasser wird also in den letztern Augenblicken des Zurückfallens wieder gewonnen. Inzwischen verliert hierdurch der Werth von ω'' an seiner Bestimmtheit, wenn auch gleich das Effectsverhältniſs dadurch nicht verändert wird. Daſs aber Gröſse und Gewicht und selbst Form des Sperrventils auf seine Bewegung Einfluſs haben müssen, so daſs sowohl die Gröſse als die Anzahl seiner Schwingungen davon abhängen und eben hierdurch auch v bestimmt wird, fällt gleich in die Augen. Die zweckmäſsige Einrichtung des Ventils besteht nun im Allgemeinen darin, ihm diejenige Gröſse, Form und Gewicht zu geben, daſs v klein genug werde, weil hiervon das Effectsverhältniſs E abhängt (§. 18. Nro. 14). Es kommt aber nicht bloſs auf die Gröſse des Effectsverhältniſses, sondern auch auf die Werthe von M und von M′ an, um den verlangten Effect der Maschine zu bewirken, also zugleich auf die dazu passende Gröſse von ω''. Hierüber theoretische Untersuchungen anzustellen, würde eine ganz fruchtlose Bemühung seyn. Ich habe mich daher auch durchaus nicht auf theoretische Bestimmungen dieser Art eingelassen, sondern solches als Sache des Künstlers angesehen, der bey der Anlage der Maschine

schine dafür zu sorgen hat, daſs ihm mannigfaltige Abänderungen des Sperrventils möglich und leicht bleiben.

Es ist aber auch der gedachte Umstand der allmähligen Vergröſserung und der allmähligen Verkleinerung des Wasserausgangs durch die Ventilöffnung selbst für die Quantität M' nicht so bedeutend, als es anfänglich scheinen möchte. Gesetzt nämlich, daſs statt der oben überall angenommenen Gröſse ω'' wegen dieser mit der Bewegung der Klappe verbundenen Veränderlichkeit von ω'' auch nur das arithmetische Mittel zwischen o und ω'' gebraucht werden dürfte oder nur $\frac{1}{2}\,\omega''$, also nur $\frac{1}{4}\,\omega''^2$ statt ω''^2, so wird darum der Werth von M' nicht auch im Verhältnisse $\omega'' : \frac{1}{2}\,\omega''$ oder $1 : \frac{1}{2}$ vermindert; denn es bleibt (§. 18. Nro. 13)

$$M' = \frac{2\,h\,v + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}') \cdot v^2}{2\,h^2} \cdot \lambda\,\omega$$

oder

$$M' = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}{2\,\mu^2}\right) \cdot \lambda_{,}\omega.$$

Machen wir nun $\mu = 100$ und setzen $\mathfrak{B}'$, welches bisher $= 2{,}75$ war, $= 4 \cdot 2{,}75 = 11$, so wird die während eines Schlages ausflieſsende Wassermenge nur beyläufig um $\frac{1}{19}$ verändert, und zwar nicht vermindert, sondern vergröſsert. Das Wasser braucht nämlich jetzt in der Leitröhre längere Zeit, um die zu $\frac{1}{100}$ h gehörige Geschwindigkeit zu erlangen, als vorher. Man erhält aber eben darum jetzt weniger Schläge in 1 Minute. Erwägen wir nun noch überdas, daſs unter den verschiedenen Zeitabschnitten während des Ausflusses des Wassers die Zeit des Stillstandes des Ventils bey der gröſsten Eröffnung gerade der gröſste ist, so wird hierdurch der Einfluſs, den die allmählige Aenderung von ω'' auf den Werth von M' hat, noch sehr vermindert.

§. 38.

Die Veränderlichkeit von ω'' während der Bewegung der Klappe zu vermindern, habe ich (Fig. 7) eine Form beygefügt, über deren Brauchbarkeit Versuche entscheiden mögen. Sie bildet ein hohles Prisma, dessen eine Grundfläche a b c hier dem Auge zugekehrt ist; a b ist ein mit c a beschriebener Bogen, so dafs die Bodenfläche a b c g dieses Ventils ein Stück einer cylindrischen Fläche bildet; c d ist die Umdrehungsaxe dieses Ventils; e f zeigt Länge und Dicke der beym Zufallen des Ventils anschlagenden Wand. Diese Wand oder Platte ragt unten von a bis f hervor, und so auch an den Seiten, um die Oeffnung gehörig verschliessen zu können. Die Seitenfläche c b c d ist offen, und in dieser ein Steg m n′ mit dem Gewicht k′ angebracht, an dessen Stelle man gröfsere oder kleinere Gewichte höher oder tiefer anschrauben kann. Der Boden a b c g dieses Ventils streicht bey seinen Schwingungen genau über den unteren Rand der rectangelförmigen Sperröffnung hin, ohne sich jedoch an letzterem zu reiben. Auch die beyden Wände, welche die Grundflächen c a b und d g c bilden, streichen am Umfange der Sperröffnung hin, ohne Reibung zu leiden. So verschlösse also dieses Ventil auch während seiner Bewegung dem Wasser von allen Seiten den Ausgang.

Diesen gestattet ihm aber das Ventil durch die Oeffnung von a nach g (s. Fig. 8), welche nur schmal, aber desto länger ist. Diese Oeffnung ist die oben immer mit ω'' bezeichnete. Sie könnte bey Versuchen, wie die Eytelwein'schen sind, etwa 3—4 Linien breit und etwa 1 Fufs lang seyn. Im Grofsen könnte ihre Breite einige Zolle und ihre Länge mehrere Fuss betragen. Durch eingelegte festgeschrobene Leistchen liefse sich ihre Breite nach Belieben vermindern. Solange sich diese Hohlklappe mit ihrer ganzen Bodenöffnung innerhalb dem Sperrhehältnifse befindet, bleibt der Durchgang ω'' unveränderlich, und ihre Veränderlichkeit fällt nur auf einen sehr kurzen Zeitabschnitt.

§. 39.

Ich mufs hier noch etwas zur Geschichte dieser Erfindung beyfügen. Sehr unrichtig heifst es in der oben angeführten Abbildung und Beschreibung etc. S. 7.

„Die Maschine, welche von dem berühmten Montgolfier „den Namen des hydraulischen Widders erhielt, hat die besondere

„dere und grosse Eigenschaft, das Wasser weit über sein
„Niveau zu heben, und es sogar bis zu einer beträchtlichen
„Höhe zu führen. Hiermit wird dann auch das alte Axiom,
„das die Hydrauliker und Brunnenmeister als Grundsatz an-
„nahmen, dass sich das Wasser nicht über sein Ni-
„veau emporheben könnte, gänzlich widerlegt.

Karsten erinnert schon in der 1770 von ihm herausgegebenen Hydraulik XVIII. Abschn. S. 476 an einen Versuch mit einer Glasröhre, die an beyden Enden offen sey: man verschliesse solche in freyer Luft am obern Ende mit dem darauf gedruckten Daumen, senke sie dann in ein mit Wasser angefülltes Gefäss, und nehme nun plötzlich den Daumen vom obern Ende weg, so werde man wahrnehmen, dass das Wasser in der lothrechten Röhre nicht etwa mit dem äusseren Wasser nur auf gleiche Höhe steige, sondern vielmehr, dass es sich nun eine ziemliche Höhe über die Oberfläche des Wassers erhebe etc.

Wenn daher in der Biblioth. physico-économique etc. par une Société de Savans, d'Artistes etc. redigée par Sonnini T. I. p. 289 (s. die angef. Beschreib. §. 7) gesagt wird:

„der hydraulische Widder enthält in seiner Zusammensetzung
„ein Princip der Bewegung, das bis jetzt noch unbekannt
„gewesen ist"

so verräth dieser Ausspruch gänzliche Unbekanntschaft mit den längst bekannten Gesetzen nicht nur der Hydraulik, sondern der Mechanik überhaupt. Karsten schrieb fast 30 Jahre vor der Erfindung des Belier hydraulique. Und schon vor Karsten kannten Joh. und Daniel Bernoulli das Gesetz des Steigens des Wassers über das Niveau seines Ursprungs.

§. 40.

Die Wirkungsart des hydraulischen Stössers leitete mich sehr natürlich auf den Gedanken, dieselbe Wirkung des Stosses für ein Druckwerk zu benutzen. Ich habe ein solches im Kleinen verferti-

gen

gen lassen, dessen Einrichtung man aus der 7ten und 8ten Tafel ersieht.

Aus einem Behältnisse A, das immerhin Zufluſs hat, um mit Wasser angefüllt zu bleiben, wird eine Leitröhre a a a unter einem Gefälle, wie es die Gelegenheit giebt, abgeleitet. Nahe am Ende derselben bey b wird ein Stiefel, wie bey einem Druckwerk, mit einem soliden Kolben k angebracht. Das Endstück der Röhre ist bey c mit einer Klappe versehen. Dieses Endstück greift in einen Windkessel W ein, welcher mit einer Steigröhre e e communicirt, die tief in den Windkessel herab greift. Sowohl der Stiefel als der Windkessel müssen gröſsere Durchmesser haben, als die Zeichnung angiebt. Auch darf die Steigröhre unterhalb m n nicht, wie in der Zeichnung, verjüngt werden.

Der Kolben k wird durch eine Kurbel betrieben, an deren Umlaufsaxe ein eisernes Schwungrad *S S* angebracht ist. An der Klappe c im Windkessel ist eine Feder d zum Andrucken und zur Beschleunigung ihres Rückfalls angebracht, welche treffliche Dienste leistet.

Die Wirkungsart dieses Druckwerks bedarf nunmehr keiner weiteren Beschreibung. Es geht dabey kein Wasser verloren, weil beym Niedergange des Kolbens das Wasser, welches der Windkessel nicht aufnimmt, immer wieder in das Zufluſsbehältniſs zurückgetrieben wird.

Nacherinnerung.

Diese Abhandlung lag schon im März ganz druckfertig da. Sie wurde durch die Preisfrage der königl. Akademie zu Berlin veranlaſst, welche auf die genügendste Theorie dieser Maschine (des Bel. hydr.) für dieses Jahr einen Preis von 50 Duc. ausgesetzt hatte. So ungewiſs es auch ist, ob die hier vorgetragene Theorie den Foderungen der Berliner Akademie ganz entsprechen werde, so wenig finde ich doch auch Grund zu der Vermuthung, daſs ihr die Akademie allen Beyfall versagt haben würde. Aber ich wollte lieber einer mir schmeichelnden Hoffnung entsagen, als die Erfüllung einer Pflicht, die sich auf das Vertrauen gründet, welches die kön. Akademie zu München in mich gesetzt hatte, länger aufschieben. Dieses ist der einzige Grund, warum ich die gegenwärtige Schrift nicht nach Berlin, sondern nach München schickte.
Heidelberg, den 5. April 1810. *Der Verfasser.*

Corrigenda

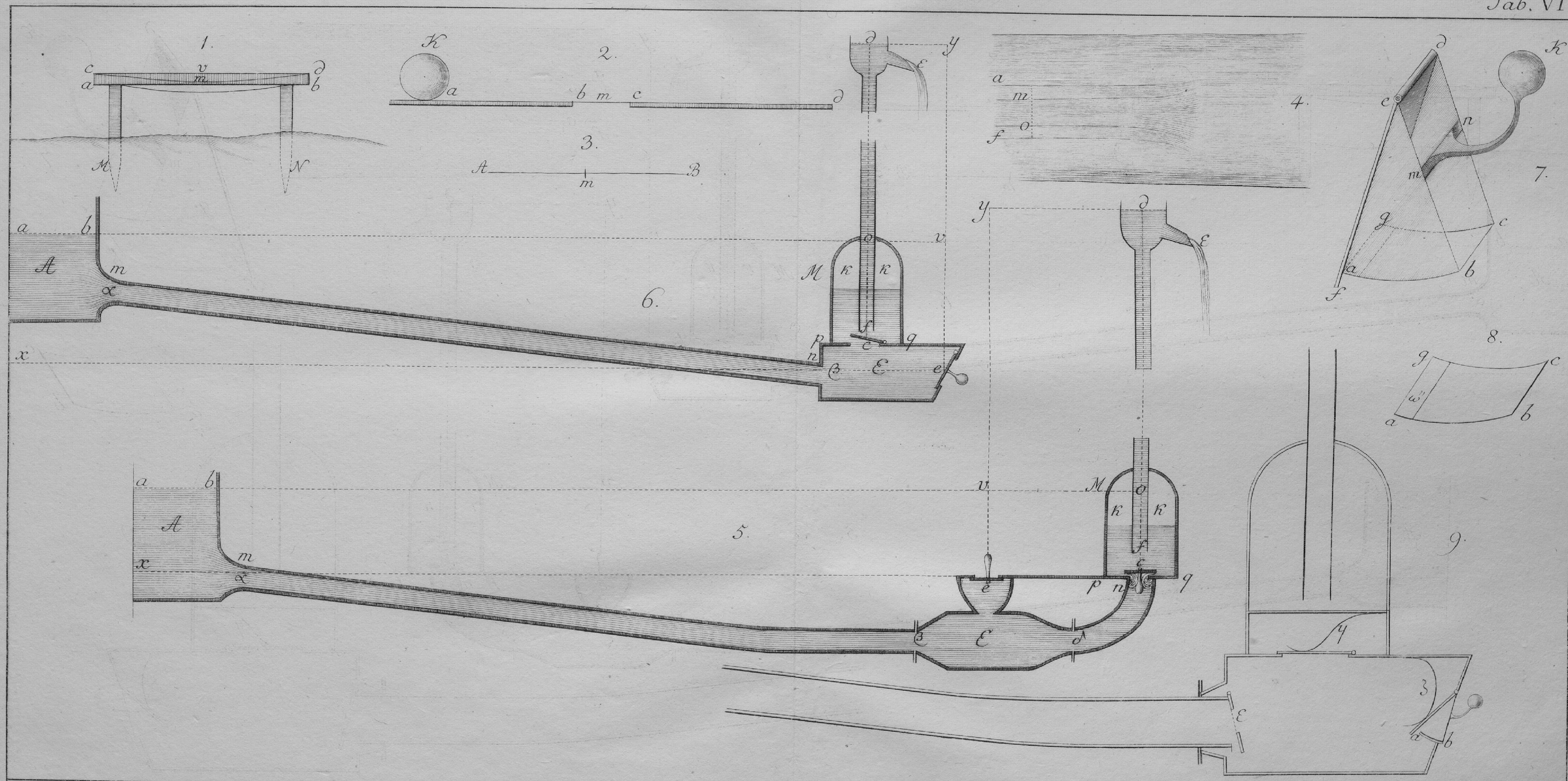
in den Abhandlungen der mathem. physik. Classe.

S. 14. Z. 7 v. o. *statt* Wasserfliegen *lies* Waffenfliegen.
S. 18. Z. 3 v. u. *st.* AB und AC — *l.* Ab und Ac.
S. 67. Z. 6 v. o. *st.* Worte *l.* Werthe.
S. 72. Z. 12 v. o. *st.* Nieſswurz *l.* Weiſswurz.
S. 117. Z. 1 v. o. *st.* blauliches *l.* bauchiges.
S. 118. Z. 9 v. u. *st.* Orten *l.* Stücken.
S. 401. Z. 3. weit in Wasser.
S. 404. Z. 5 v. u. *st.* poles *l.* gaſes.
S. 405. Z 9. *st.* auſspr. *l.* anspr.
S. 406. Z. 6. Stadt oder Land.
S. 406. Z. 8. *st.* Säulen *l.* Säule.
S. 407. Z. 3 v. u. *st.* 45 *l.* 21.
— — Z. 2. v. u. *st.* nur 21 *l.* 45.
— — Z. 1 v. u. (Nach kommen füge hinzu: — wenn eine gewisse Quantität Hydrogengas in 45 Minuten an einer der Spitzen des von einander getrennten Paares der Spitzen auftritt, so tritt die gleiche Quantität Hydrogengas in 21 Minuten an einer der Spitzen des einander nächsten Paares der Spitzen auf.
S. 408. Z. 4. *st.* noch nicht einmal *l.* nicht viel mehr als.
S. 408. Z. 17. nach Draehte *l.* oder gemeiner Clavier Saiten.
S. 408. Z. 23. leitet.
S. 110. Z. 17. als die.
S. 410. Z. 2. v. u. *st.* 35 *l.* 70 (nämlich 35 durchs Hydrogengas und 35 durchs Oxygengas erfolgende)
S. 416. Z. 27. *st.* 33″. *l.* 33″;
S. 439. Z. 24. *st.* d∫n — dλ + *l.* dδn + dλ —
S. 451. Z. 24. *st.* 13,02 + *l.* 13,02 —
S. 469. Z. 27. *st.* ♂ *l.* δ
S. 506. Z. 14. *st.* 13,02 + *l.* 13,02 —

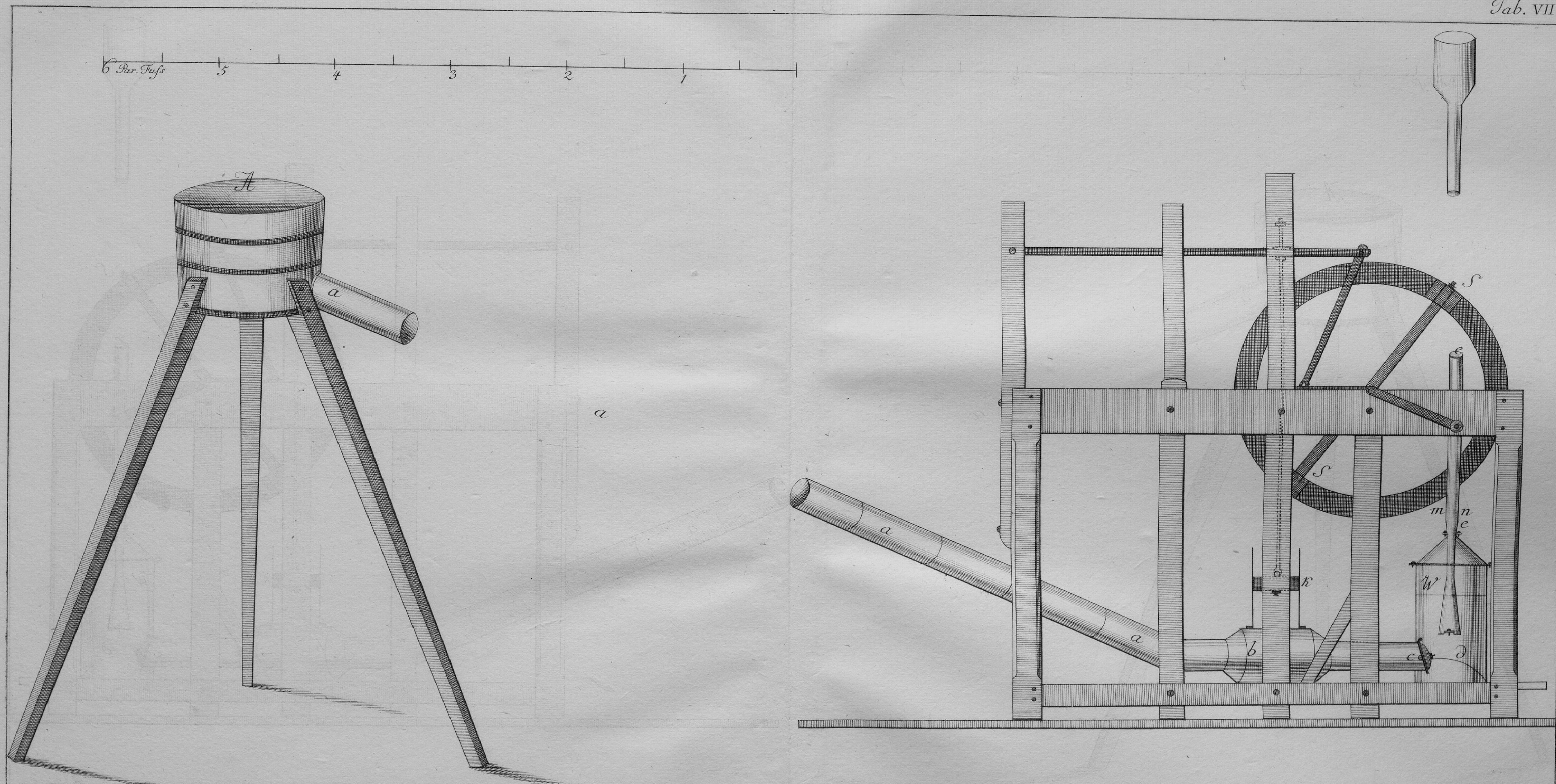
S. 506. Z. 10.		Aranjuctii		Aranjuetii.
S. 508. Z. 7.	*st.*		*l.*	
S. 510. Z. 17. 21.		Aranjuctium		Aranjuetium.

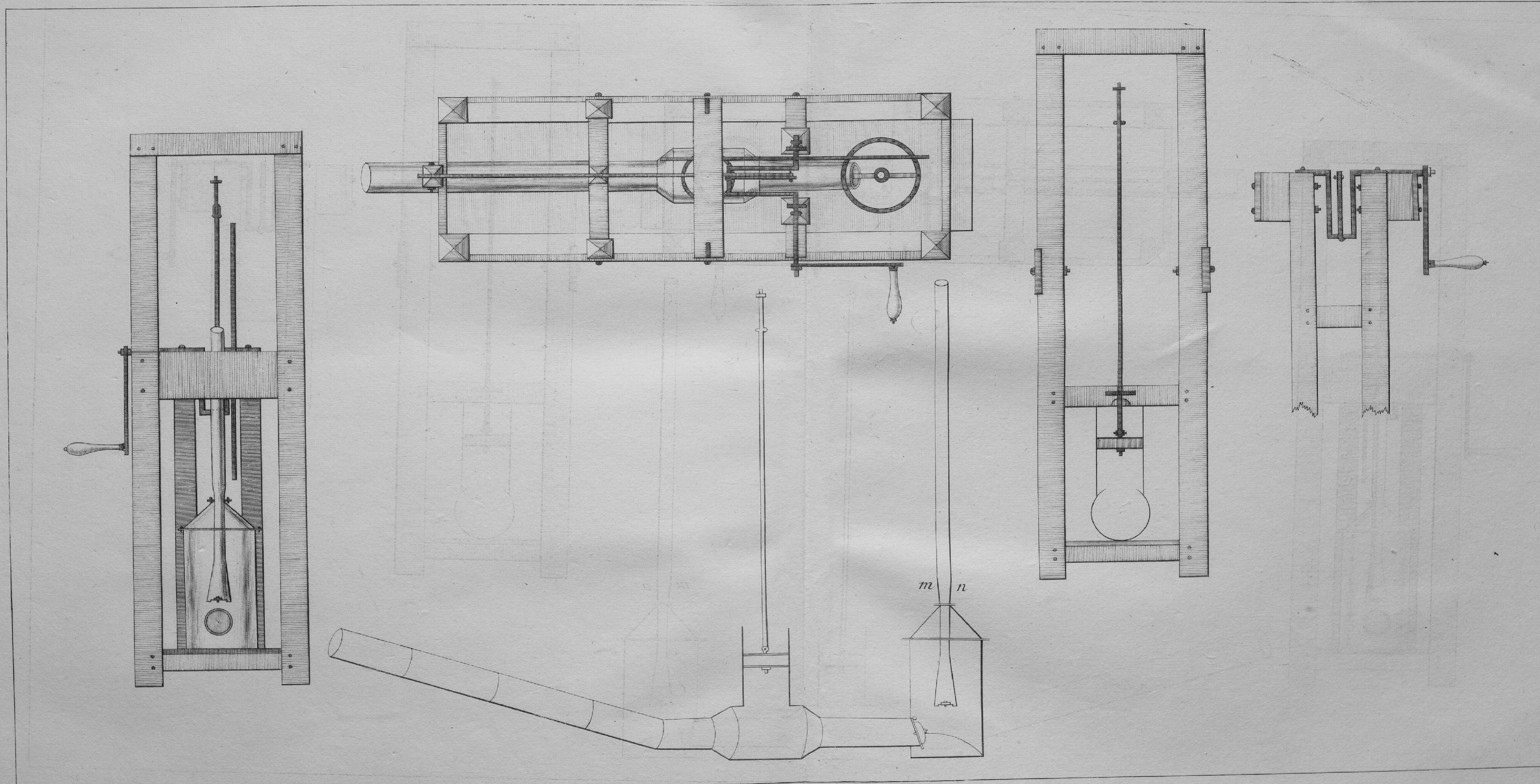
S. 507. Z. 1. *st.* + 1,1018 *l.* + 1,2081.
S. 508. Z. 20. *st.* Snidnitii *l.* Suidnitii.
S. 509. Z. 30. *st.* το *l.* τοῦ.
S. 514. Z. 4. Van Bek Colcoen *deleatur.*

Tab. VI.



Tab. VII.




m
n