DISSERTATIO
CATADIOPTRICA ELABORATA

PER

JOANNEM BAPTISTAM DE LASARRE,
HISTORIARUM ET GEOGRAPHIAE PROFESSOREM, ELECTORALIS SCIENTIARUM ACADEMIAE BOICAE MEMBRUM ORDINARIUM.

DE
CATADIOPTRICA SPHAERICA.

1.

Quæ ad noſtra usque tempora de Catadioptrica ſphærica dicta ſunt & ſcripta, ad ſolas luminis radiorum proprietates pertinent, qui radii, in ſpecula ſpærica cadentes, in ſuis ſuperficiebus absque refractione reflectuntur: eorundem radiorum proprietates, qui, in lenticulas vitreas ſphæricas cadentes, per ipſas tranſeunt, & tranſeundo refringuntur, quin reflectantur, hæ ſunt Dioptricæ ſphæricæ objectum.

2. Hi iidemque radii, in lenticulas vitreas ſphæricas ex una parte ſtanno obductas cadentes, ſi conſiderentur, hos radios dico refrangi ſimul & reflecti; unde horum ſpeculorum ſphæricorum vitreorum proprietates ut accuratius dignoſcantur, horum radiorum, in hæc ſpecula cadentium, reflexionis ſimul & refractionis effectus conſiderandi ſunt.

3. Hucusque nosco neminem, qui hujus partis opticæ, quoad radios reflexos simul & refractos, elementa tradiderit, aut regulam quamdam generalem, cujus ope in quibusvis speculis sphæricis vitreis focorum tam absolutorum quam relativorum distantiæ determinentur.

4. Hæc pars tamen minime despicienda videtur. 1° enim specularum sphæricorum vitreorum numerus major est, quam numerus specularum lucem reflectentium, aut lenticularum lucem tantum refringentium. Numerus specularum simpliciter reflectentium si multiplicetur per numerum lenticularum lucem tantum refringentium, productum tot specularum vitreorum species diversas administrabit.

5. Horum specularum proprietates non minus mirabiles sunt proprietatibus lenticularum vitrearum, speculisque sphæricis ex metallo: plures ipsis solis propriæ sunt, nec cæteris conveniunt: ipsorum usus extensior est speculis metallicis, suntque ad captum omnium; si quoad quasdam partes considerentur, perfectiones & utilitates continent, quæ in speculis metallicis difficile invenirentur. Deinde majorem luminis quantitatem reflectunt, ac proinde, cæteris utrinque paribus, majorem vim comburendi continent.

6. Aliunde ad specula metallica perfecte elaboranda quacumque methodo quis utatur, specula vitrea ad perfectionem facilius deducuntur; specula autem metallica etiam perfectissima non absque maxima sollicitudine conservantur, æruginem contrahunt, nitorque ipsorum facile hebetatur; hebetata semel aut ærugine exesa perfecte lævigari amplius non possunt, quin de primævo ni-

nitore multum perdant; ſpecula autem vitrea facile mundantur & conſervantur; immo novo ſtanno obduci & lævigari poſſunt, quin de prima perfectione aliquid deperdant.

7. Quapropter hac in diſſertatione horum ſpeculorum vitreorum ſphæricorum præcipuas proprietates detegere ſatagam.

8. Scientiam, hæc ſpecula tractantem, *Catadioptricam* dico & merito: ſcientia lucis tantum reflexæ dicitur *Catoptrica*, lucis autem refractæ *Dioptrica*; ſcientia ergo, cujus objectum eſt eadem lux reflexa ſimul & refracta, merito *catadioptrica* vocatur. Sequentibus in demonſtrationibus ſuppono notitiam elementorum Dioptricæ ſimul & Catoptricæ; unde

PRINCIPIA.

9. 1°. Angulus incidentiæ angulo reflexionis ſemper æqualis eſt.

10. 2°. Lucis radio ex aere per vitrum tranſeunte, ſinus anguli incidentiæ ſe habet ad angulum refractionis uti 3 ad 2. ſimilis autem radius ſi per vitrum aerem petat, uti 2 ad 3.

11. 3°. Radii Paralleli, in Speculum ſphæricum cadentes, poſt reflectionem vel in uno puncto colliguntur, aut verſus unicum idemque punctum diriguntur.

12. 4°. Radii paralleli, in ſuperficiem ſphæricam vitream cadentes, poſt refractionem vel in unico puncto concurrunt vel verſus idem punctum diriguntur.

12. 5°. Hoc punctum, in quo post reflexionem aut refractionem radii paralleli concurrunt aut diriguntur, dicitur focus radiorum parallelorum, sive focus absolutus, aut simpliciter *focus*.

14. 6°. Radii, in superficiem speculi sphærici vel in superficiem sphæricam refrangentem cadentes, si proveniant ab unico axeos puncto, aut si versus unicum idemque punctum diriguntur; post reflexionem aut refractionem in unico puncto se colligunt, aut versus idem punctum diriguntur.

15. 7°. Hæc axeos puncta, a quibus radii incipiunt vel versus quæ diriguntur, *foci respectivi*, aut foci radiorum obliquorum vocantur.

16. 8°. Radii paralleli si in speculum sphæricum cadant, ipsorum collectionis punctum sive focus post reflexionem distat ab hujus speculi superficie pro quarta parte diametri ejus sphæræ, cujus pars est.

17. 9°. Radii paralleli si ex vitro in aërem per superficiem sphæricam concavam aut convexam transeunt, ipsorum focus distabit a centro speculi pro tribus semidiametris sphæræ, cujus pars est.

18. 10°. Hoc in casu superficies si sit convexa, focus erit ultra speculum vitreum; sin concava, focus erit intra speculi crassitiem aut versus eamdem partem, a qua radii proveniunt.

19. 11°. In utroque hoc casu focus radiorum parallelorum distabit a superficie concava aut convexa pro diametro concavitatis aut convexitatis speculi.

20. 12°. Radii paralleli ſi ex aëre per ſuperficiem ſphæricam concavam aut convexam ſpeculum vitreum tranſeunt, focus ab hac ſuperficie diſtabit pro tribus ſemidiametris concavitatis aut convexitatis.

21. 13°. Hoc in caſu, ſuperficies ſi ſit concava, focus erit ultra vitrum, ſi autem ſit convexa, focus erit in ipſo vitro, id eſt, verſus eamdem partem, per quam radii ingrediuntur.

22. His principiis innituntur omnia, quæ de ſpeculorum vitreorum proprietatibus dicturi ſumus.

DEFINITIONES.

23. 1°. In ſpeculis vitreis duæ ſuperficies conſiderandæ ſunt, una ſtanno obducta, quæ lucem reflectit; altera non obducta, per quam radii libere tranſeunt.

24. 2°. Superficiem ſtanno obductam dico ſuperficiem reflectentem, ſuperficiem autem refringentem voco eam, quæ non obducta radiis luminaribus liberum tranſitum permittit.

25. 3°. Diametrum, ſemidiametrum, aut centrum ſuperficiei reflectentis aut refringentis dico eſſe diametrum, ſemidiametrum aut centrum ſphæræ, cujus pars eſt.

26. 4°. Speculi vitrei ſuperficiem refringentem indifferenter dicturus ſum ſuperficiem primam aut ſuperficiem refringentem.

27. 5°. Pariter per ſpeculorum ſuperficiem reflectentem intelligo ſecundam aut reflectentem ſuperficiem.

28. 6°. Lenticulæ superficies convexa si sit stanno obducta, hanc voco superficiem concavam; hæc enim relative ad radios, in ipsam cadentes, fit vere concava.

29. 7°. Similiter superficies concava si sit stanno obducta, hanc voco superficiem convexam.

30. 8°. Axis speculi sphærici est linea, quæ per bina superficierum centra transit, vel linea, binis his superficiebus perpendicularis.

31. 9°. Lenticula vitrea, cujuscunque speciei sit, cum in qualibet superficie stanno obduci possit, duas speculorum species diversas administrat.

32. 10°. Pro majori claritate, & vitanda confusione notandum est, quod lineæ duplicatæ uti H M N designent superficiem reflectentem; lineæ autem simplices H S N superficiem refringentem. Fig. 2.

33. 11°. Spatium autem duas inter has lineas per punctula designatum indicat speculi crassitiem.

34. 12°. Ad designandos luminis radios utor lineis nigris aut tantum punctuatis; per nigras designantur radii veri, id est, via, quam radii vere tenent, per lineas vero punctuatas designo prolongationem radiorum, id est, viam, quam tenerent radii, si per superficiem reflectentem non impedirentur, aut per superficiem refringentem avia recta non deturbarentur. His prænotatis,

PRO-

PROPOSITIO I.

LEMMA.

35. In triangulo, duo anguli si sint valde acuti, Summa duorum laterum, angulum obtusum formantium, æqualis est lateri, angulo obtuso opposito.

36. Similiter ex eodem puncto A duæ si ducantur lineæ A B & A C Fig. 1. ad circumferentiam concavam aut convexam circuli, ita ut forment angulum valde acutum B A C, & harum linearum una per centrum transeat, binæ hæ lineæ sunt sensibiliter æquales; idem etiam dico, licet nulla ex his lineis per centrum transeat, dummodo a se invicem non multum distent; differentia enim in his casibus tam modica est, ut nulla æstimari possit.

37. In pluribus Dioptricæ & Catoptricæ demonstrationibus hæc æqualitas supponitur. Æqualitas hæc integra est in angulis infinite parvis, in quibus lineæ infinite proximæ sunt; proinde demonstrationes, his principiis innixæ, uti vere geometricæ considerandæ sunt.

38. In Dioptrica sicut & in Catoptrica sæpius accidit, ut hæ lineæ, licet non infinite proximæ, uti æquales accipiantur, unaque alteri substituatur absque errore sensibili in omnibus proportionibus, in quibus his utimur, uti experientia constat.

PROPOSITIO II.

39. In qualibet speculorum vitreorum sphæricorum axi datur punctum, cujus proprietas est, quod radii, ab hoc puncto in speculum cadentes, post reflexionem & refractionem

ad

ad hoc punctum revertantur, vel quod omnes radii, in speculum cadentes, si versus hoc punctum dirigantur, post reflexionem & refractionem in hoc speculo, versus idem punctum iterum dirigantur; ita ut in omnibus speculis vitreis detur casus, in quo radii post reflexionem & refractionem in speculo factas, per eamdem lineam, qua venere, revertantur, radiusque incidens, radius refractus & reflexus sequantur directionem ejusdem lineæ in sensu contrario ante & post reflexionem refractionemque.

DEMONSTRATIO.

Sit radius incidens A S, (fig. 2. 3. 4. 5. 9. 10. 13.) qui cadens in superficiem refringentem H S N, per ipsam transit, ita ut post refractionem radius fractus S M sit superficiei reflectenti H M N perpendicularis. Evidens est, radium S M post reflexionem eidem superficiei adhuc esse perpendicularem, consequenter egredietur ex speculo per idem superficiei refringentis punctum S, per quod ingressus est; unde sequitur, quod post secundam refractionem, in hoc puncto factam, radius retrogrediendo sequetur eamdem lineam S A, quam antea speculum ingrediendo sequebatur.

Evidens autem est, quod in omnibus speculis vitreis detur casus in quo radii incidentes, facta refractione, speculum vitreum per primam superficiem H S N ingrediendo, secundæ superficiei H M N sint perpendiculares; ergo in omnibus speculis vitreis datur casus, in quo radii incidentes, refracti & reflexi secundum eamdem lineam tendunt, vel versus idem punctum diriguntur ante & post reflexionem & refractionem in superficiebus factas. Q. E. D.

40. Coro-

40. *Corollarium I.* (2. 3. 4. 13. fig.) Sequitur, quod in hoc casu, in quo radius fractus in occursu primæ superficiei est perpendicularis secundæ, radii, si veniant ab axeos puncto I ante speculum, post reflexionem & refractionem ad idem punctum I revertantur.

41. Si radii in speculum convergentes cadant, dirigantur-que versus axeos punctum I retro speculum, post reflexionem & refractionem revertentur per eamdem directionem lineæ AS, qua venere, eodemque modo ac si emanarent ab eodem puncto I.

42. Demum radii in speculum cadentes, si sint axi paralleli, post reflexionem & refractionem ex speculo egredientes adhuc axi paralleli erunt; unde dici potest, punctum I a speculo infinite distare. (Fig. 6. 8.)

43. *Corollarium II.* 7. fig. Eodem in casu superficies reflectens HMN si sit sphærica, radius fractus SM prolongatus transibit per centrum ejusdem superficiei reflectentis; superficies autem reflectens HMN si sit plana, tunc radius fractus SM erit axi CI parallelus.

44. *Nota.* Quod de radiis in specula cadentibus hic dico & in sequentibus dicturus sum, de radiis in puncta ab axi non multum distantia intelligi volo.

45. *Definitio.* Per centrum reflexionis intelligo hoc punctum I in axi, habens proprietatem jam demonstratam; evidens enim est, quod in speculis concavis simpliciter reflecten-

tibus omnes radii post reflexionem ad idem centrum, a quo venere, revertantur; in convexis autem radii, qui in ipsa cadunt, cum sint convergentes versus centrum, post reflexionem redeunt divergentes, ac si ab eodem centro provenirent. Merito ergo centrum reflexionis dico hoc punctum, quod in speculis sphæricis vitreis hanc habet proprietatem, licet ipsius figuræ centrum non sit: exceptis casibus, in quibus binæ superficies, reflectens nempe & refringens, sunt concentricæ.

PROPOSITIO III.

46. Dato qualicumque speculo sphærico vitreo invenire centrum reflexionis.

SOLUTIO.

Centrum reflexionis invenietur hac analogia.

Uti distantia centri superficiei reflectentis ad quoddam punctum, quod a superficie refringente magis distat quam suum centrum, pro integro diametro sphæra, cujus hæc superficies portio est, ad hunc eundem diametrum: Ita distantia centri superficiei reflectentis ad superficiem refringentem.

Pro qualibet speculorum sphæricorum vitreorum specie figuram delineavi, ut singulis in casibus radiorum via clarius innotescat, utque pateat differentia ab uno ad alterum casum; pro omnibus his casibus sufficit demonstratio propositionis præcedentis.

PRÆ-

PRÆPARATIO.

47. HSNM sit speculum vitreum, cujus axis sit IO, (2. 3. 4. 5. 9. 10. 13. fig.) SM sit radius superficiei reflectenti HMN perpendicularis, qui ex utraque parte infinite prolongatus hujus superficiei centrum transeat. Per punctum O, quatenus centrum superficiei refringentis HSN, ducatur recta OF rectæ CR parallela, hæc erit radius fractus protensus SM; recta OF designabit axim eorum radiorum, qui prodeuntes a parte interna a speculi S ei sunt paralleli.

Recta OF fiat æqualis tribus semidiametris superficiei refringentis HSN; punctum F designabit focum radiorum, qui a speculi vitrei parte interna prodeuntes, sunt paralleli lineæ OF (17); ergo radius MS, rectæ OF parallelus, egrediendo ex speculo per punctum S, habebit radium suum fractum SA, qui transit per punctum F, secatque axim IO in puncto I, & hoc punctum ex præcedenti propositione erit reflexionis centrum.

Jam per punctum O quatenus centrum superficiei refringentis HSN ducatur recta OR, lineæ SA parallela, quæve producta secet radium CR in puncto R; unde evidenter fit parallelogrammum ROFS; consequenter OR erit = FS & SR = FO.

Ex puncto O & intervallo OF fiat arcus BF, & ex intervallo OR fiat arcus RP; unde sequitur, quod OB = OF, & OP = OR (36), radius autem MSA si supponatur axi IO valde proximus, recta CR erit = CP, SF = Be, CS = Ce, & SI = Ie; ergo absque errore sensibili quælibet ex his lineis alteri substitui potest.

DEMONSTRATUR.

48. Propter lineas parallelas C R & O F, S F & O R bina triangula C R O, & C S I sunt similia: unde habetur hæc proportio; C R: R O:: C S: S I; jam si recta C P substituetur rectæ C R, & B e ponatur loco R O, C e loco C S, & I e loco S I, habebitur hæc altera proportio: C P: B e:: C e: I e; sed recta S F æqualis est diametro superficiei refringentis H S N (19); ergo B e, R O & O P huic diametro etiam sunt æquales; ergo C P est distantia centri C superficiei reflectentis H M N ad punctum P, quod a superficie refringente H S N pro toto diametro O P magis distat, quam centrum suum O; aliunde C e est distantia a C, centro superficiei reflectentis H M N ad superficiem refringentem H S N; denique I e est distantia ab eadem hac superficie refringente ad punctum I, centrum reflexionis; ergo uti distantia centri superficiei reflectentis ad punctum quodlibet &c. Q. E. D.

49. *Corollarium I.* Neglecta vitri crassitie & pro nulla reputata (quod absque sensibili errore fieri potest, nisi superficies sint portiones minimarum sphærarum, & inter se valde distantes) tertius proportionis terminus æqualis erit semidiametro superficiei reflectentis; unde habebitur hæc proportio.

Uti distantia ab centro superficiei reflectentis ad punctum, quod a superficie refringente magis distat, quam suum centrum pro toto diametro sphæræ, cujus hæc superficies portio est, se habet ad eundem hunc diametrum superficiei refringentis; ita semidiameter superficiei reflectentis se habet ad distantiam a speculo ad centrum reflexionis.

50. *Co-*

50. *Corollarium II.* Speculum ſi ſit ex utraque parte concavum aut convexum, primus proportionis terminus æqualis erit ſummæ ex ſemidiametro ſuperficiei reflectentis & tribus ſemidiametris ſuperficiei refringentis; proinde in hoc caſu, neglecta vitri craſſitie, erit hæc proportio:

Uti ſumma, ex ſemidiametro ſuperficiei reflectentis & tribus ſemidiametris ſuperficiei refringentis, ſe habet ad diametrum ſuperficiei refringentis; ita ſemidiameter ſuperficiei reflectentis ſe habet ad diſtantiam a ſpeculo ad centrum reflexionis.

51. *Corollarium III.* In eodem caſu concavitas & convexitas lenticulæ ſpeculum componentis ſi ſint æquales, id eſt, ſi utraque ſit ejusdem diametri, tunc primus proportionis terminus æqualis erit quatuor ſemidiametris unius ſuperficiei; & proinde habetur hæc proportio:

Uti duo diametri unius ſuperficiei ad unum ex his diametris; ita unus ſemidiameter ad diſtantiam a ſpeculo ad centrum reflexionis.

Seu quod idem eſt:

Uti 2. ad 1 ita ſemidiameter unius ſuperficiei ad diſtantiam a ſpeculo ad centrum reflexionis.

Unde in hoc caſu centrum reflexionis diſtabit a ſpeculo pro dimidietate ſemidiametri concavitatis aut convexitatis.

52. *Corollarium IV.* Specula si sint Menisci, id est convexo-concava, ex una parte stanno obducta; tunc, neglecta vitri crassitie, primus proportionis terminus erit æqualis differentiæ inter semidiametrum superficiei reflectentis, & tres semidiametros superficiei refringentis, terminusque tertius æqualis erit semidiametro superficiei reflectentis; unde sequitur hæc proportio:

Ut differentia inter semidiametrum superficiei reflectentis & tres semidiametros superficiei refringentis ad diametrum superficiei refringentis; ita semidiameter superficiei reflectentis ad distantiam a speculo ad centrum reflexionis.

53. *Corollarium V.* Hoc in casu binæ superficies si sint concentricæ, tunc centrum reflexionis coincidet cum binarum superficierum centro communi; unde sequitur, quod speculum vitreum, cujus binæ superficies sunt concentricæ, a speculo ex metallo nullatenus differat, aut ab alia quacumque materia lævigata, cujus concavitas aut convexitas æqualis est concavitati aut convexitati superficiei stanno obductæ.

54. *Corollarium VI.* In speculo menisco semidiameter superficiei reflectentis si sit æqualis tribus semidiametris superficiei refringentis, ceu quod idem est, si centrum superficiei reflectentis pro tribus semidiametris superficiei refringentis ab hac superficie distet; tunc radii, in speculum cadentes, cum axi sint paralleli, post reflexionem e speculo egredientes eidem axi etiam paralleli erunt.

DE-

DEMONSTRATUR.

55. Radii, axi paralleli, per ſuperficiem refringentem in ſpeculum cadentes, ita ſe refringunt, ut ipſorum refractionis focus ſit præciſe in centro ſuperficiei reflectentis (20); hoc centrum ergo ſupponatur a ſuperficie refringente præciſe pro tribus ſemidiametris diſtare; tunc radii, axi paralleli, peracta refractione dirigentur ad centrum ſuperficiei reflectentis; proindeque huic ſuperficiei perpendiculares erunt; ergo poſt reflexionem per eamdem viam regredientur; proindeque axi manebunt paralleli. Q. E. D.

56. *Corollarium VII* Speculum ſi ſit meniſcus ex parte concava ſtanno obductus, ſuperficiei reflectentis ſemidiameter ſi ſit minor tribus ſemidiametris ſuperficiei refringentis, aut centrum ſuperficiei reflectentis ſi ſit ſuperficiei refringenti pro tribus hujus ſuperficiei ſemidiametris proximior; tunc radii, in ſpeculum cadentes, ſi ſint axi paralleli, poſt reflexionem æque ac refractionem erunt divergentes; eodem in caſu ſuperficiei reflectentis ſemidiameter ſi ſit major tribus ſemidiametris ſuperficiei refringentis; vel ſi centrum ſuperficiei reflectentis plus diſtet a ſuperficie refringente pro tribus hujus ſuperficiei ſemidiametris, tunc radii, axi paralleli, in ſpeculum cadentes poſt reflexionem & refractionem erunt convergentes.

57. *Corollarium VIII.* In meniſco ex parte convexa ſtanno obducto ſemidiameter ſuperficiei reflectentis ſi ſit tribus ſemidiametris ſuperficiei refringentis minor, tunc radii, axi paralleli, in hoc ſpeculum cadentes, poſt reflexionem & refractio-

ctionem erunt convergentes; eodem in casu si superficiei reflectentis semidiameter sit tribus superficiei refringentis semidiametris major, tunc radii, axi peralleli, in hoc speculum cadentes, post reflexionem & refractionem divergentes erunt.

58. *Corollarium IX.* In omnibus casibus, in quibus radii axi paralleli, in speculum vitreum cadentes, post reflexionem & refractionem sunt convergentes, centrum reflexionis erit ante speculum; hi vero radii axi paralleli si post reflexionem & refractionem divergentes sint, reflexionis centrum erit retro speculum; quod bene notandum est.

59. *Corollarium X* Semidiameter superficiei refringentis relative ad semidiametrum superficiei reflectentis si fit infinite magnus, tunc superficies refringens erit portio sphæræ infinite magnæ, & proinde erit superficies plana, ergo radius MS 12.Fig. superficiei reflectenti HMN perpendicularis, egrediendo per punctum S, refrangetur suam habens directionem versus punctum in axi I, ita ut distantia CS vel CE a centro ad superficiem planam refringentem HSN sit ad IS vel IE, quæ est distantia a puncto I ad eamdem superficiem, uti 3, ad 2. id est, quod in superficiei refringentis planæ casu centrum reflexionis distabit ab hac superficie pro duabus tertiis distantiæ ejusdem superficiei ad centrum superficiei reflectentis; neglectaque vitri crassitie, distantia centri reflexionis ad speculum æqualis erit duabus tertiis semidiametri superficiei reflectentis.

60. *Corollarium XI.* Semidiameter superficiei reflectentis si relative ad semidiametrum superficiei refringentis sit infinite magnus, tunc superficies reflectens erit portio sphæræ infinite magnæ,

conſequenter plana; ergo radii perpendiculares uti S M, egrediendo ex ſpeculo per punctum S in ſuperficie refringente, ſecabunt axim in puncto I, Fig. 7. 11. ita ut recta I E æqualis ſit diametro ſuperficiei refringentis (18); ergo ſuperficies reflectens ſi ſit plana, centrum reflexionis a ſpeculo diſtabit pro toto diametro ſuperficiei refringentis.

61. *Corollarium XII.* Binæ ſuperficies, reflectens nempe & refringens, ſi ſint portiones ſphæræ infinite magnæ, tunc binæ planæ erunt, centrumque reflexionis erit in diſtantia infinita: unde ſequitur, quod in hoc caſu radii, in ſpeculum parallele cadentes, poſt reflexionem paralleli manebunt.

62. *Corollarium XIII.* Bina duarum ſuperficierum centra in ſpeculo vitreo poſſunt eſſe verſus eandem ſuperficiei partem, centrumque reflexionis verſus partem oppoſitam; uti in fig. 4. & 10.

63. *Corollarium XIV.* Specula vitrea ad tres ſpecies revocari poſſunt; prima ſpecies eorum eſt, quorum reflexionis centrum eſt coram ſpeculo: talia ſunt Fig. 2. 1° omnia ea, quæ ex lenticulis convexo-concavis conficiuntur; 2° Fig. 7. 12. lenticulæ plano-convexæ, ex una parte ſtanno obductæ; 3° Fig. 3. 4. 13. meniſci ſecundi caſus corollariorum VII & VIII.

64. Secunda ſpecies eſt eorum, quorum reflexionis centrum eſt retro ſpeculum; uti ſunt 1° Fig. 5. omnes lenticulæ concavo-concavæ; 2° Fig. 11. 12. lenticulæ plano-concavæ, ex una parte ſtanno obductæ; 3° Fig. 9. 10. omnes meniſci primi caſus corollarii VII et ſecundi caſus corollarii VIII.

65. Tertia denique species eorum est, quæ centro reflexionis proprie dicto carent, vel quorum centrum est in distantia infinita, uti sunt 1°. omnia specula, quorum binæ facies planæ sunt; 2°. omnes menisci, quorum in corollario VI. mentionem fecimus.

PROPOSITIO IV.

LEMMA.

66. Ex puncto I, valde proximo axi T S in circulo H N Fig. 14. si ducantur tres lineæ I F, I G, I E ad tria puncta circumferentiæ F, G, E, axi etiam perproxima, arcusque F G & G E sint æquales; dico, hos angulos F I G & G I E, per tres has lineas in puncto I formatos, absque errore sensibili pro angulis æqualibus accipi posse.

DEMONSTRATUR.

Protendatur G I usque ad circumferentiæ punctum O, ducanturque rectæ F O & E O; evidens est, angulos F O G & G O E esse inter se æquales; etenim verticem suum habent in eodem circumferentiæ puncto O, arcusque F G & E G ex constructione sunt æquales. Aliunde rectæ I E & I F, cum sint axi S T valde proximæ, faciantque angulum valde parvum E I E, quatenus æquales accipi possunt (36); eadem ratione rectæ O F & O E quatenus æquales possunt accipi; unde sequitur, bina triangula F I O & E I O uti æqualia accipi posse; ergo in triangulo F I O bini anguli F & O, collective sumpti, æquales sunt duobus angulis E & O in triangulo E I O; sed angulus F I G æqualis est duobus angulis O F I & I O F simul sumptis, & angulus G I E æqualis est duobus angulis O E I, & I O E etiam simul sumptis; ergo anguli F I G & G I E inter se æquales sunt. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO V.

67. Radius incidens per reflexionis centrum non transiens si cadat in speculum vitreum, inque idem reflectentis superficiei punctum, uti radius per reflexionis centrum transiens, dico, angulum duos inter hos radios comprehensum æqualem esse angulo, comprehenso inter hunc radium reflexionis centrum transeuntem, & inter alterum radium, qui, post reflexionem in superficie reflectente, egreditur refringendo se per superficiem refringentem.

PRÆPARATIO.

Punctum C sit centrum reflexionis speculi HN, GIM sit radius incidens, per reflexionis centrum C transiens: Fig. 15. post refractionem in puncto I refringentis superficiei HIN hic radius cadet perpendiculariter in punctum M reflectentis superficiei HMN; proindeque post reflexionem in puncto M, regredietur per eamdem viam versus punctum C.

Jam supponamus hunc radium GIM ab hac directione deviare, & tendere versus aliam FPM, ita ut cadens in punctum P superficiei refringentis HIN, post refractionem in hoc puncto peractam cadit nihilominus in idem punctum M superficiei reflectentis HMN.

Evidens est, quod radius refractus PM reflectetur in puncto M, secabitque refringentem superficiem HIN in puncto R, ita ut angulus PMI æqualis sit angulo IMR, (10), radiusque reflexus MR, egrediendo per hoc punctum R, refringetur, tendens versus aliam directionem RE.

His positis dico, quod, prolongatis tribus radiis, EP, GI ER, versus punctum n, hi radii facient angulos æquales F n G & G n E.

DEMONSTRATUR.

Radii PM, MI, MR considerentur, ac si procederent a puncto M, egredientes e speculo per refringentis superficiei H I N puncta P, I, R; hi radii si eamdem viam prosequerentur, quin vi refractionis tendendo per rectas M P D, M I L, M R K declinarent, evidens est, hos radios angulos æquales D M L & L M K facturos esse: sed hi radii, egrediendo ex speculo per puncta P, I, R, declinant a rectis P D, I L, R K; ad determinandam viam, per quam, ab his lineis declinando, tendunt, sit O centrum superficiei refringentis H I N: per hoc centrum O ducatur recta O L, rectæ M D parallela, O K paralella rectæ M L, & O E parallela lineæ M K.

Ex eodem puncto O, tanquam centro, & intervallo, tribus superficiei refringentis H I N semidiametris æquali, fiat arcus D E, ita ut secet tres parallelas O L, O K, O E in punctis F, G, E; per puncta P & F ducatur recta P F, per puncta I & G ducatur recta I G, & per puncta R & E ducatur recta R E; evidens est (17) lineas P F, I G, & R E designare radios refractos radiorum M P, M I, & M R, viamque, per quam post eorum egressum ex speculo tendunt; insuper evidens est, quod angulus D M L propter parallelas D M & L O sit æqualis angulo M L O, & propter parallelas M L & K O angulus M L O æqualis sit angulo L O K; ergo angulus D M L æqualis est angulo L O K.

Simi-

Simili modo propter parallelas L M, & K O angulus L M K æqualis eſt angulo M K O, & proptet parallelas M K & O E angulus M K O æqualis eſt angulo K O E; ergo angulus L M K æqualis eſt angulo K O E; ſed angulus D M L æqualis eſt angulo K O E; ergo arcus F G & G E ſunt æquales:

Sed punctum n ſuppouebatur axi O D valde proximum, & puncta F, G, E ab eadem axi parum diſtant, ergo ex lemmate præcedenti ſequitur, angulos F n G & G n E eſſe æquales. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

68. Dato ſpeculo ſphærico vitreo qualicunque, invenire ſocum radiorum purallelorum.

SOLUTIO.

Hunc focum dico ſemper eſſe dimidiam diſtantiam centri reflexionis ad ſpeculum; unde hæc diſtantia cum in propoſitione III pro omnibus caſibus determinata ſit, focus radiorum parallelorum etiam erit determinatus.

DEMONSTRATUR.

Vti in ſpeculo ſimpliciter ſphærico, lucem tantummodo reflectente, radius incidens & radius reflexus faciunt cum linea a centro ad punctum incidentiæ ducta angulos æquales; ita jam in præcedenti propoſitione demonſtratum eſt, quod in omnibus ſpeculis vitreis radius incidens & radius reflexus faciant cum ra-

dio, per reflexionis centrum & punctum incidentiæ transeunte, angulos æquales; ergo evidens est, quod uti per æqualitatem angulorum incidentiæ & reflexionis demonstratur, in speculis sphæricis simpliciter reflectentibus distantiam foci absoluti ad speculum esse dimidium semidiametri, id est, dimidietatem distantiæ centri ad speculi superficiem, ita & per æqualitatem angulorum, quos in speculis vitreis formant radius incidens & radius reflexus cum radio per reflexionis centrum & punctum incidentiæ transeunte, demonstratur, quod dimidietas distantiæ centri reflexionis ad speculum sphæricum vitreum sit distantia foci absoluti ad hoc speculum. Q. E. D.

69. *Corollarium I.* Speculum sphæricum vitreum quodcumque, sive plano-spharicum, sive sphærico-sphæricum considerari potest uti speculum sphæricum simpliciter reflectens, quod foret pars cujusdam sphæræ, cujus distantia a reflexionis centro ad speculum esset semidiameter, & radii a reflexionis centro provenientes, & in superficiem reflectentem in punctis axi perproximis cadentes considerari possunt uti semidiametri ejusdem sphæræ.

70. *Corollarium II.* Evidens ergo est, quod omne, quod in Catoptrica sphærica de speculis sphæricis simpliciter reflectentibus ratione focorum tam absolutorum quam relativorum radiorum in puncta axi valde proxima cadentium demonstratur, etiam speculis sphæricis vitreis applicetur, hæc si considerentur uti unicam superficiem sphæricam reflectentem habentia, cujus superficiei semidiameter esset distantia centri reflexionis ad speculum: proinde in proportionibus ordinariis Catoptricæ sphæricæ pro resolutione problematum speculorum sphæricorum simplici-

pliciter reflectentium, si loco semidiametri ponatur distantia centri reflexionis ad speculum vitreum, habebitur solutio eorumdem problematum pro his speculis.

71. *Corollarium III.* Specula vitrea primæ supradictæ speciei (63) æquivalent speculis sphæricis ex metallo habentque focum absolutum coram speculo.

72. Specula secundæ speciei (64) æquivalent speculis sphæricis convexis ex metallo, habentque focum suum imaginarium retro speculum.

73. Denique specula tertiæ speciei (65) licet sphærica, considerari possunt ut specula simpliciter plana.

74. *Corollarium IV.* Dantur specula plene concava, quorum superficies refringens sicut & reflectens concava est, hæc easdem habent proprietates eosdemque effectus, ac specula metallica convexa uti Fig. 10.

75. Dantur & alia totaliter convexa, quorum superficies reflectens & refringens convexa est, easdem proprietates eosdemque effectus habent ac specula ex metallo concava. Fig. 4.

76. Dantur denique specula, quæ cum sint concava aut convexa, plures speculorum planorum proprietates habent, uti Fig. 6. 8.

77. *Corollarium V.* In speculis vitreis plano - sphæricis, quorum superficies reflecteus plana est, focus absolutus distat a super-

superficie sphærica pro semidiametro sphaeræ, cujus pars est; hic focus est ante speculum, si superficies sit sphærica, Fig. 7. imaginarius autem est & retro speculum, si superficies sphærica sit concava, Fig. 2.

78. *Corollarium VI.* In speculis vitreis plano-sphæricis, quorum superficies reflectens est sphærica, focus absolutus distat a speculo pro sexta parte diametri; hic focus realis est & coram speculo, si superficies reflectens sit concava Fig. 12. imaginarius autem & retro speculum, si superficies reflectens sit convexa.

79. *Corollarium VII.* Duobus ex his corollariis sequitur, quod ex duobus speculis vitreis plano-sphæricis similibus, quorum sphæricitas eadem est, unum si sit ex parte superficiei planæ & alterum ex parte superficiei sphæricæ stanno obductum, primum speculum focum suum absolutum habebit in distantia triplici speculi secundi.

80. *Corollarium VIII.* In speculis vitreis sphæricis, ex lenticulis concavo-concavis aut convexo-convexis in una superficierum stanno obductis, compositis, si ipsorum concavitas aut convexitas pertinent ad sphæras æquales, tunc focus ipsorum absolutus distat a speculo pro octava parte diametri; hic focus est realis & coram speculo, si lenticula sit sphærico-sphærica Fig. 2. imaginarius autem & retro speculum, si lenticula sit concavo-concava. Fig. 5.

81. *Corollarium IX.* Specula vitrea si sint menisci, quorum superficies sunt concentricæ, focus ipsorum erit in distantia pro quarta parte diametri, ac si solam haberent superficiem reflectentem.

PRO-

PROPOSITIO VII.

82. Speculum vitreum si sit menisçus, cujus una superficies sit stanno obducta, cujusque superficiei reflectentis semidiameter sit sexies major semidiametro superficiei refringentis, neglecta vitri crassitie, focus radiorum axi parallelorum erit in puncto distante a speculo pro toto diametro superficiei refringentis.

DEMONSTRATUR.

Radii, axi paralleli uti AS, cadentes in superficiem refringentem HeN, (Fig. 16. 17.) post refractionem in occursu factam, dirigentur versus punctum axeos C distans ab hac superficie pro tribus semidiametris Oe (20): ita ut Ce æquale sit tribus semidiametris Oe; ergo radius refractus SM radii AS cadet in superficiem reflectentem HDN, si dirigatur versus axeos punctum in concavitate hujus superficiei HDN, & ab hac distans pro medietate sui semidiametri; hoc enim evidens est, quod, si lenticulæ crassities uti nulla aut insensibilis consideretur, recta Ce æqualis futura sit CD, consequenter CD æquale est tribus semidiametris superficiei refringentis HeN, quod est dimidium semidiametri DP superficiei reflectentis HDN, æquale sex semidiametris De superficiei refringentis HeN per suppositionem.

Sed in Catoptrices elementis demonstratur, quod radii, in superficiem sphæricam reflectentem cadentes, si dirigantur versus punctum axeos ejusdem sphæræ, cujus portio est, in distantia dimidii diametri, hi radii post reflexionem sunt axi paralleli; ergo radius Mn uti radius reflexus radii MS retrogrediendo

per ſuperficiem refringentem HeN, axi parallelus eſt; ſed radii, axi paralleli, e lenticula per ſuperficiem ſphæricam in aerem egredientes, diriguntur verſus punctum, quod pro toto diametro ſphæræ, cujus portio eſt, ab hac diſtat (19); ergo punctum F, in quo radius protenſus In poſt egreſſum e ſpeculo axim ſecat, ab eodem hoc ſpeculo ita diſtat, ut DF æquale ſit diametro ſuperficiei refringentis HeN; ergo ſpeculum, ſi ſit meniſcus, &c. Q. E. D.

83. *Corollarium I.* Propoſitio hæc immediate deduci potuiſſet ex corollario quarto propoſitionis III. (52); ſemidiameter enim ſuperficiei reflectentis cum ſit ſexduplus ſemidiametri ſuperficiei refringentis, hujus corollarii proportio pro hoc caſu in ſequentem vertitur:

Uti tres ſuperficiei refringentis ſemidiametri ad duos hos ſemidiametros: ita ſex hi ſemidiametri ad diſtantiam a ſpeculo ad centrum reflexionis.

Proinde hoc reflexionis centrum diſtat a ſpeculo pro quatuor refringentis ſuperficiei ſemidiametris; unde ſequitur (68) quod horum radiorum parallelorum focus diſtat ab ipſo pro toto hujus ſuperficiei diametro. Q. E. D.

84. *Corollarium II.* Binæ ſuperficies ſi ſint concavæ, focus erit imaginarius; realis autem erit, ſi binæ ſint convexæ.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

85. Conſtruere ſpecula vitrea, quorum binæ ſuperficies ſint concavæ, in quibus radiorum axi parallelorum focus ſit in ſecundæ ſuperficiei centro.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Sit C centrum ſuperficiei reflectentis QDT, Fig. 18. axis ſpeculi DI, vitri craſſities De, quæ minima ſive nulla ſupponitur; recta Ce æqualiter dividatur in puncto O; ab hoc puncto, quaſi centro & intervallo Oe fiat arcus HeN; his peractis dico, quod arcus HeN deſignet ſpeculi vitrei HNQT ſuperficiem refringentem, quodque hoc ſpeculum habeat focum radiorum, axi parallelorum, in puncto C.

Fiat CI=Ce; ex puncto I ducatur recta IS, hæc deſignabit radium incidentem obliquum, cadentem in ſuperficiem refringentem HeN in puncto S; per punctum O, quatenus hujusmet ſuperficiei centrum, ducatur recta R-n, parallela IS; per punctum C, ſuperficiei reflectentis centrum & per punctum S ducatur recta CS, ex utraque parte protenſa, ita ut ſuperficiem reflectentem QDT ſecet in puncto M, lineamque Rn in puncto R.

His peractis demonſtratur, quod recta Rn æqualis ſit tribus ſemidiametris Oe ſuperficiei refringentis HeN; nam recta CS cum ſit rectæ Ce valde proxima, ipſi æqualis eſt (36), proinde etiam æqualis rectæ CI; ergo triangulum ICS eſt iſoceles; ſed propter rectas parallelas Rn & IS, triangulum RCO ſimile eſt triangulo ICS; ergo pariter eſt iſoceles; conſequenter CO=CR; ſed bini anguli O & R cum ſint valde acuti, la-

tus OR æquale est duobus lateribus CO & CR simul sumptis (35); aliunde CO est semidiameter superficiei refringentis HeN; ergo OR æquale est duobus hujus superficiei semidiametris; sed ON est hujus superficiei semidiameter; ergo RO + ON, hoc est Rn æquale est tribus semidiametris superficiei refringentis HeN.

His demonstratis sequitur, quod radius refractus radii incidentis IS indicetur per rectam MS, & protensus transeat per centrum superficiei reflectentis QDT; ergo radius refractus MS huic superficiei perpendicularis est, & reflectens per eamdem viam, qua venerat, regreditur; e vitro egreditur in puncto S, aximque secat in puncto I, a quo venerat; ergo punctum I est centrum reflexionis speculi HNQT (45). Q. E. D.

86. *Corollarium I.* Evidens est, quod vitri crassities De si supponatur infinite parva, CD & CI æquales erunt semidiametro superficiei reflectentis QDT, & Oe superficiei refringentis semidiameter æqualis erit medietati semidiametri CD superficiei reflectentis.

87. Unde sequitur, quod speculum vitreum, in quo semidiameter superficiei reflectentis geminata erit semidiametri superficiei refringentis, binis his superficiebus suppositis concavis, focum suum habet in centro superficiei reflectentis, & in extremitate diametri superficiei refringentis, suumque reflexionis centrum in extremitate diametri superficiei reflectentis.

88. *Corollarium II.* Hoc corollarium, hæcque demonstrata propositio ex corollario IV tertiæ propositionis (52) immediate de-

deduci poterat, vitri craſſitie ſuppoſita nulla; ſemidiameter enim ſuperficiei reflectentis cum ſit geminata ſemidiametri ſuperficiei refringentis, evidens eſt, quod in hoc caſu differentia ſemidiametrum ſuperficiei reflectentis inter & tres ſemidiametros ſuperficiei refringentis, æqualis ſit ſemidiametro ſuperficiei refringentis; ergo proportio, in hoc corollario demonſtrata, mutatur in ſequentem.

Uti ſemidiameter ſuperficiei refringentis ad diametrum ejusdem ſuperficiei: ita ſemidiameter ſuperficiei reflectentis ad diſtantiam a ſpeculo ad centrum reflexionis. Ergo hoc centrum reflexionis eſt in extremitate diametri ſuperficiei reflectentis; ac proinde focus radiorum, axi parallelorum, eſt in ejusdem ſuperficiei centro (68). Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

89. Conſtruere ſpecula vitrea, quorum binæ ſuperficies ſint concavæ, & in quibus focus radiorum axi parallelorum ſit in centro primæ ſuperficiei.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

H e N ſit ſuperficies refringens, cujus centrum ſit O: Fig. 19. axis ſpeculi ſit D I; O I ſit æquale O e ſemidiametro ſuperficiei refringentis H e N; O I dividatur in duas partes æquales in puncto C; ex hoc puncto quatenus centro fiat arcus Q D T, ita ut C D ſit majus quam C e pro quantitate D e tam parva, ut negligi poſſit; his peractis, dico, quod arcus Q D T deſignabit ſuperficiem reflectentem, ſpeculumque H N Q T habebit ſuum radiorum, axi parallelorum, focum in puncto O, centro ſuperficiei refringentis.

Ex punćto I ducatur I S, hæc rećta indicabit radium incidentem, qui oblique cadet in superficiem refringentem H e N in punćto S. Per punćtum O, ejusdem superficiei centrum ducatur rećta R n, parallela ad I S; fiat R O æqualis duobus semidiametris O e superficiei refringentis H e N; per punćta R & S ducatur rećta R S, protendaturque, usque dum secet superficiem reflećtentem Q D T in punćto M; evidenS est, rećtam M S repræsentare radium refraćtum radii incidentis S I (17).

Jam demonstrandum est, quod rećta M R, quæ nihil aliud est, quam radius protensus M S, secet axim D I in punćto C; rećta enim I S cum sit rećtæ I e valde proxima, ipsi æqualis est (36); consequenter etiam æqualis est rećtæ O R. & propter parallelas I S & R u angulus I S C æqualis est angulo O R C, & angulus S I C æqualis est angulo R O C; ergo bina triangula S C I, & R C O similia sunt & in omnibus æqualia: ergo I C = C O.

Ergo evidens est, quod radius refraćtus M S, si prolongetur, transeat per punćtum C, quod est centrum superficiei reflećtentis Q D T; proindeque huic superficiei perpendicularis; reflexus autem regredietur per eamdem lineam M S, & exeundo e speculo per punćtum S secabit axim in eodem punćto I, a quo venerat; ergo punćtum I est centrum reflexionis hujus speculi.

Demonstravimus autem (68), quod focus radiorum, axi parallelorum, in speculo vitreo sit in dimidia distantia centri reflexionis ad speculum; ergo punćtum O, centrum superficiei refringentis H e N, quod est in dimidia distantia I e, est focus radiorum hujus speculi axi parallelorum. Q. E. D.

90. *Co-*

90. *Corollarium I.* Evidens eſt, quod, ſi vitri craſſities De ſupponatur infinite parva, DO æqualis ſit Oe, quæ eſt ſemidiameter ſuperficiei refringentis HeN, conſequenter recta DC æqualis erit ſemidiametro + dimidio ſemidiametri ejusdem ſuperficiei.

91. Unde ſequitur, quod ſpeculum vitreum, utrinque concavum, in quo ſemidiameter ſuperficiei reflectentis æqualis ſit ſemidiametro + ſemidiametri dimidio ſuperficiei refringentis, habebit focum ſuum radiorum, axi parallelorum, in centro ſuperficiei refringentis.

92. *Corollarium II.* Vitri craſſitie ſuppoſita nulla, hoc corollarium ſicut & propoſitio, ex qua deducitur, demonſtrari poſſunt per corollarium III. propoſitionis (52); nam ſemidiameter ſuperficiei reflectentis cum ſit æqualis ſemidiametro & dimidio ſemidiametri ſuperficiei refringentis, ſequitur, quod differentia ſemidiametrum ſuperficiei reflectentis inter & tria ſemidiametra ſuperficiei refringentis æqualis ſit ſemidiametro ſimul & dimidio ſemidiametri ſuperficiei refringentis; unde ſequitur, quod proportio in hoc corollario demonſtrata vertatur in ſequentem:

Uti ſemidiameter & dimidium ſemidiametri ſuperficiei refringentis ad diametrum ejusdem ſuperficiei; ita ſemidiameter ſuperficiei reflectentis ad diſtantiam centri reflexionis ad ſpeculum.

Hoc eſt, uti 3 ad 4, ita diameter ſuperficiei reflectentis ad diſtantiam centri reflexionis ad ſpeculum; ſequitur ergo, quod in hoc caſu diſtantia centri reflexionis ad ſpeculum major ſit ſemidiametro ſuperficiei reflectentis pro tertia parte ejusdem

dem semidiametri; sed hujus semidiametri tertia pars æqualis est dimidio semidiametri superficiei refringentis; ergo distantia centri reflexionis ad speculum æqualis est diametro superficiei refringentis; ergo radiorum axi parallelorum focus est in hujus superficiei centro, siquidem hoc centrum est in medio hujus distantiæ. Q. E. D.

93. *Nota.* Vitri crassitiem hucusque supposuimus nullam; hæc autem crassities tanta esse potest, ut pro vitandis erroribus negligi non possit. Quod hucusque demonstravimus, verum est in omnibus casibus, in quibus vitri crassities valde parva est, radiique cadunt in superficiei puncta, ab axi non multum distantia.

94. Pluribus in casibus, vitri crassities sive magna sit sive parva, licet hoc æque verum sit, sæpe tamen accidit, quod hoc, quod pro speculis vitreis minimæ crassitiei demonstratur, speculis majoris crassitiei convenire non possit.

95. Horum speculorum proprietates ergo examinandæ sunt, observata semper vitri crassitie, ex quo constructa sunt; hocque tentabo in sequentibus proportionibus, in quibus quasdam horum speculorum proprietates singulares demonstrandas mihi propono.

96. Observandum tamen est, quod, de radiis incidentibus loquendo, semper intelligo hos radios in puncta axi valde proxima cadentes; id autem nihil impedit, quominus hæc puncta sumantur in distantia sensibili, E. G. 15°, 20° aut plurium graduum, & hoc absque errore sensibili.

PRO-

PROPOSITIO X.

97. Data ſpeculi vitrei ſuperficie refringente, invenire ſuperficiem reflectentem requiſitam, ut hujus ſpeculi centrum reflexionis ſit in dato axeos puncto.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

HSN ſit data ſuperficies refringens, IC axis ſpeculi, (Fig. 2. 3. 4. 9. 10. 13. 20. 21. 22. 23. 24.) I punctum axeos datum, in quo reflexionis centrum eſſe debet; ex hoc puncto I ducatur recta IS, quæ ſuperficiem refringentem ſecet in puncto S, quæ recta cum axi IC faciat angulum valde parvum SIe; per centrum O ſuperficiei refringentis HSN ducatur recta OR, parallela ad IS, æqualis duobus hujus ſuperficiei diametris Oe; per puncta S & R ducatur recta SR, protendaturque, usque dum ſecet axim in puncto C.

Ex hoc puncto C, veluti centro, & intervallo qualicumque (dummodo in quibusdam circumſtantiis ſit majus, in aliis minus diſtantia Ce, a puncto C ad ſuperficiem refringentem) fiat arcus HMN vel QMT; his peractis dico, quod hic arcus deſignet ſuperficiem reflectentem deſideratam. Fig. 22. 23. 24.

Evidens enim eſt, quod recta SC repræſentet radium refractum protenſum radii incidentis IS (20); ſed recta SC ſuperficiei reflectenti HMN vel QMT perpendicularis eſt, tranſit enim per hujus ſuperficiei centrum C; ergo tangens hanc ſuperficiem in puncto M reflectitur, regrediturque per eamdem lineam MS; ergo exeundo e vitro per punctum S, ſequetur

eamdem directionem SI, quam in speculum cadens habebat, aximque secabit in eodem puncto I, a quo venerat; ergo punctum I est centrum reflexionis hujus speculi, & superficies HMN vel QMT est superficies reflectens desiderata. Q. E. D.

98. *Corollarium I.* Datum punctum I si sit præcise in foco radiorum, qui, ex vitro per superficiem refringentem in aerem transeuntes, axi sunt paralleli, id est, paralleli distantiæ duorum semidiametrorum ante superficiem refringentem datam, si sit convexa uti fig. 7. aut æquali distantiæ retro superficiem datam, si sit concava uti fig. 11. hoc in casu superficies reflectens debet esse plana, vitrique crassities major aut minor esse potest.

99. *Corollarium II.* Datum punctum si sit retro speculum duobusque semidiametris superficiei refringenti proximius, superficies hæc si sit concava, dico, quod desiderata superficies reflectens concava aut convexa esse poterit.

Convexa erit, si ex puncto C fiat arcus HMN ipsam designans, Fig. 5. ita ut hic arcus sit inter punctum C & superficiem refringentem HSN; hoc in casu intervallum CM, quo fit hic arcus, debet esse minus distantia Ce a puncto C ad superficiem refringentem HSN, tuncque vitri crassities minor esse potest distantia Ce, nunquam autem ipsa major.

Superficies reflectens concava erit, si ex puncto C fiat arcus QMT, Fig. 24. ita ut hoc punctum C sit inter hunc arcum & superficiem refringentem datam HSN; hoc in casu intervallum CM, quo fit hic arcus, majus aut minus esse potest, vitrique

que craſſities ad libitum, nunquam autem minor, quam diſtantia Ce a puncto C ad ſuperficiem refringentem.

100. *Corollarium III.* Punctum datum I ſi ſit duobus ſemidiametris ſuperficiei refringenti proximius & coram ſpeculo, ſi ſuperficies ſit convexa, uti Fig. 2. tunc dico 1°, quod deſiderata ſuperficies reflectens debet eſſe concava, 2°. quod intervallum CM, quo fit arcus HMN, hanc ſuperficiem repræſentans majus eſſe debet, quam diſtantia Ce, a puncto C ad ſuperficiem refringentem datam, 3°. hoc intervallum pro nutu magnum eſſe poteſt, nunquam autem minus, quam diſtantia Ce, 4°. in hoc caſu vitri craſſities major aut minor eſſe poteſt.

101. *Corollarium IV.* Punctum I ſi ultra duos ſemidiametros diſtet a ſuperficie refringente coram ſpeculo, hæc ſuperficies ſi ſit convexa uti in Figuris 4 & 22. dico, hanc ſuperficiem convexam aut concavam eſſe poſſe.

Convexa erit, ſi ex puncto C fiat arcus HMN, ita ut ſit inter punctum C & ſuperficiem refringentem datam HSN; hoc in caſu intervallum CM, Fig. 4. quo hic arcus formatus eſt, pro libitu minus eſſe poteſt, nunquam autem majus, quam diſtantia Ce, a puncto C ad ſuperficiem refringentem datam HSN, vitrique craſſities pro libitu parva eſſe poterit, nunquam autem major, quam diſtantia Ce.

Superficies reflectens concava erit, ſi ex puncto C fiat arcus QMT, Fig. 22. ita ut hoc punctum C ſit inter hunc arcum & ſuperficiem refringentem datam HSN; hoc in caſu intervallum CM, quo arcus conſtructus eſt, pro libitu majus aut minus

esse poterit, vitrique crassities major, nunquam vero minor distantia Ce.

102. *Corollarium V.* In superficie refringente concava datum punctum I si sit retro speculum, duobusque hujus superficiei diametris remotius; Fig. 10. dico, superficiem reflectentem tunc necessario concavam esse; hoc in casu intervallum, quo hæc superficies formata erat, majus esse poterit, sed nunquam minus, quam distantia Ce, a puncto C ad superficiem refringentem datam HSM, vitrique crassities major aut minor pro libitu.

103. *Corollarium VI.* Datum punctum I si sit retro speculum, superficiesque data sit convexa, uti in Figuris 9 & 23. dico, superficiem reflectentem concavam aut convexam esse posse.

Concava erit, si ex puncto C fiat arcus HMN, Fig. 9. ita, ut sit inter punctum C & superficiem refringentem HSN; hoc in casu intervallum CM, quo constructus est, pro libitu minus, nunquam autem majus esse poterit, quam distantia Ce a puncto C ad superficiem refringentem datam HSN; vitrique crassities pro libitu parva esse poterit, at nunquam major distantia Ce.

Superficies reflectens concava erit, si ex puncto C fiat arcus QDT, Fig. 23. ita ut punctum C sit inter hunc arcum & superficiem refringentem datam HSN; in hoc casu intervallum CM, quo hic arcus formatus est, pro libitu majus aut minus esse potest, vitrique crassities pro libitu magna, nunquam autem minor distantia Ce.

104. *Co-*

104. *Corollarium VII.* Datum punctum I si sit coram speculo, Fig. 3. 13. superficies refringens data cum sit concava, dico, quod superficies reflectens debet esse concava; in hoc casu intervallum CM, quo hæc superficies formata est, pro libitu majus esse potest, nunquam autem minus, quam distantia Ce a puncto C ad superficiem refriugentem datam HSN; vitri crassities major aut minor pro libitu esse poterit.

105. *Corollarium VIII.* Datum punctum I si sit præcise in centro superficiei refringentis datæ HSN, erit etiam centrum superficiei reflectentis.

106. Hoc in casu superficies refringens si sit concava, Fig. 21. superficies reflectens necessario concava erit: intervallum C, quo formata est, pro libitu majus esse potest, at nunquam minus, quam distantia Ce a puncto C ad superficiem refringentem datam HSN; vitri crassities ad libitum major aut minor esse potest.

107. Superficies refringens si sit convexa, dico, quod superficies reflectens convexa aut concava esse potest: convexa erit, si ex puncto C fiat arcus QMT, Fig. 20 ita ut sit inter superficiem refringentem datam HSN & punctum C. Intervallum CM, quo constructus est arcus QMT, pro libitu majus aut minus esse potest, nunquam vero majus distantia Ce a puncto C ad superficiem datam refringentem HSN; vitri crassities pro libitu minor esse potest, nunquam vero major semidiametro superficiei refringentis datæ HSN.

108. In eodem casu, superficies refringens si sit convexa, superficies reflectens concava erit, si fiat arcus QMT, Fig. 25.

ita ut punctum C sit inter superficiem refringentem datam HSN & hunc arcum : intervallum CM, quo hic arcus constructus est, pro libitu majus aut minus esse poterit ; vitri crassities etiam pro libitu major esse potest, nunquam vero minor semidiametro superficiei refringentis datæ HSN.

109. *Corollarium IX.* Speculum vitreum, si sit sphæra integra, cujus dimidia superficies stanno obducta sit, centrum suum reflexionis habebit in centro ipsiusmet sphæræ.

PROPOSITIO IX.

110. Data speculi vitrei superficie refringente invenire superficiem reflectentem, ita ut hujus speculi radiorum axi parallelorum focus sit in puncto dato ejusdem axeos.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

In axi si accipiatur punctum, quod a data superficie refringente pro duplici hujus puncti mensura distet, evidens est, quod desiderata superficies reflectens per præcedentem proportionem invenietur, ita ut speculum suum reflexionis centrum in hoc puncto habeat, proindeque focum suum in dato puncto (68).

111. *Nota.* Hoc tantum verum est in casibus, in quibus, sicut jam in præcedentibus corollariis demonstravimus, vitri crassities pro libitu minor esse potest; cæteris enim in casibus, in quibus vitri crassities major esset, focus absolutus non amplius erit in dimidia distantia centri reflexionis ad speculum, sed in alio puncto, prout vitri crassities major aut minor fuerit.

112. *Co-*

112. *Corollarium.* Per ea, quæ hucusque in præcedentibus propositionibus demonstravimus, evidens est, quod, dato speculo sphærico ex metallo, inveniri possunt infinita specula vitrea, singula per concavitates aut convexitates suas inter se diversa, centrum suum reflexionis habentia in distantia superficiei refringentis, quæ æqualis est semidiametro sphæræ, cujus speculum portio est; ergo horum specularum vitreorum focus distabit ab ipsorum superficie pro intervallo æquali distantiæ a foco hujus speculi metallici dati ad suam superficiem.

113. Unde sequitur, quod, dato speculo metallico, cujus superficies sit determinatæ sphæræ portio, facillime inveniantur infinita specula vitrea inter se diversa, quorum tamen idem effectus erit ac speculi metallici dati; ergo ope specularum vitreorum idem effectus infinitis modis produci potest, qui per speculum metallicum semel tantum fieri poterit.

PROPOSITIO XII.

114. Speculum vitreum si sit sphæra integra, cujus dimidia superficies sit stanno obducta, radii axi paralleli superficiem stanno obductam penetrantes facta reflexione in occursu superficiei stanno obductæ axim secabunt, antequam ex sphæra egrediuntur, in quodam puncto, quod distat a superficie stanno obducta pro sexta parte diametri.

SOLUTIO.

HNRD sit sphæra vitrea, cujus dimidia superficies HDN (26. Fig.) sit stanno obducta; RF sit axis hujus speculi; AS sit radius huic axi parallelus, cadens in punctum S superficiei stanno non obductæ.

Evi-

Evidens est (17), quod radius refractus S M sequatur directionem lineæ rectæ, axim secantis in puncto F, ita ut recta R F æqualis sit tribus sphæræ semidiametris.

E centro C ad punctum M, in quo radius refractus S M occurrit superficiei reflectenti, ducatur semidiameter C M.

Hic radius S M, reflectens in puncto M, formabit angulum C M E, æqualem angulo C M S (9), radiusque reflectens M E axim secabit in puncto I; per centrum C ducatur recta G K, parallela rectæ S M.

His præparatis demonstrandum est, quod distantia D I a puncto I ad punctum D æqualis sit sextæ parti diametri R D.

DEMONSTRATUR.

Diameter G K cum sit parallelus rectæ S M, accipi potest pro axi radiorum parallelorum, in superficiem reflectentem H D N cadentium; ergo radius S M, rectæ G K parallelus, facta reflexione in puncto M, diametrum secabit in puncto E, ita ut recta G E æqualis sit quartæ parti hujus diametri (36); unde sequitur, G E = C E; G E & G M autem cum sint valde proximæ, inter se etiam æquales erunt; ergo C E = E M; ergo quælibet harum rectarum æqualis est quartæ parti diametri sphæræ.

Jam R F cum sit æqualis tribus ejusdem sphæræ semidiametris, sequitur, quod D F æqualis sit semidiametro D C; consequenter C M & M F, cum sint rectæ C F valde proximæ, inter se æquales sunt; ergo triangulum C M F est isoceles, &

an-

anguli M C F & M F C ſunt æquales; ſed propter parallelas G K & S F angulus E C F æqualis eſt angulo M F C; ergo etiam æqualis eſt angulo M C F; ergo in triangulo C E M angulus E C M per rectam C I in duas partes æquales diviſus eſt.

Ergo evidens eſt, quod duæ partes E I & I M lateris E M lateribus E C & C M ſint proportionales, ita ut E C: C M:: E I: I M, & ſubſtituendo E M loco C E, quæ ipſi æqualis eſt, habebitur, E M: C M:: E I: I M; ſed E M eſt dimidia pars rectæ C M: ergo E I eſt etiam dimidia pars rectæ I M; conſequenter I M continet duas tertias rectæ M E vel æqualis eſt quartæ parti diametri, cui M E æqualis eſt; ergo æqualis eſt tertiæ parti ſemidiametri, conſequenter ſextæ parti totius diametri; ſed I D cum ſit rectæ I M valde proxima, ipſi æqualis eſt; ergo I D æqualis eſt ſextæ parti totius diametri. Q. E. D.

PROPOSITIO XIII.

115. In ſpeculo vitreo centrum ſuperficiei reflectentis ſi ſit in puncto, a ſuperficie refringente pro tribus hujus ſuperficiei ſemidiametris diſtante, aliunde ſit retro hanc ſuperficiem refringentem, ſi ſit convexa, vel coram ſpeculo, ſi ſit concava, dico, quod, quæcumque ſit vitri craſſities, radii axi paralleli in ſuperficiem refringentem cadentes poſt reflexionem & refractionem in ſpeculo etiam huic axi paralleli erunt.

DEMONSTRATUR.

Demonſtratio, quam dedimus in corollario VI. propoſitionis III. (55) in qua vitri craſſitiem ſuppoſuimus valde parvam, lenticulamque eſſe meniscum, hujus propoſitionis veritatem

etiam probat, licet vitri crassities sit valde ampla, & lenticula non sit meniscus, sed valde crassa, utrinque convexa; figura 6 & 8 demonstrant meniscos; figura autem 27 lenticulas utrinque convexas.

Evidens enim est, quod, licet semidiameter C M superficiei reflectentis major aut minor evadat pro libitu, proindeque lenticulæ crassities augeatur aut minuatur, radius A S, axi parallelus, refringendo se in puncto S, certe dirigetur versus punctum quoddam C, a superficie refringente pro tribus semidiametris distans (17), & hoc punctum C cum sit reflectentis superficiei centrum, sequitur, quod radius refractus S C vel S M huic superficiei perpendicularis erit, & revertetur per eamdem perpendicularem, egredieturque per punctum S, axi adhuc parallelum, uti antea exierat. Q. E. D.

116. *Corollarium.* Speculum HNPQ fig. 27 ex lenticula utrinque convexa, cujus superficies P Q D sit stanno obducta, pertinet ad tertiam speciem speculorum vitreorum, quorum mentionem fecimus in corollario 14° tertiæ propositionis (65).

PROPOSITIO XIV.

117. Speculi vitrei superficies refringens si sit convexa, distetque a superficie reflectente pro tribus suis semidiametris, dico, quod radii, axi paralleli, in hoc speculum cadentes facta reflexione & refractione in his superficiebus, egrediendo ex speculo eidem axi adhuc paralleli maneant, sive superficies reflectens sit plana, sive concava aut convexa.

DE-

DEMONSTRATUR.

HNPQ ſit ſpeculum vitreum, cujus ſuperficies refringens convexa ſit HIN; F ſit punctum in axi, diſtans a ſuperficie HIN pro tribus ſuis ſemidiametris. PQ ſit ſuperficies reflectens plana fig. 28, convexa fig. 29. aut concava 30, tranſiensque per punctum F. His poſitis

Evidens eſt 1°. quod AS ſi ſit radius incidens in ſuperficiem HIN, fig. 28. 29. 30. axique IF parallelus, radius ſuus refractus SF ſecabit hanc axim in puncto F (17); conſequenter cadet in idem punctum ſuperficiei reflectentis, in quo axis ipſum tangit; ergo ab hoc puncto F reflectetur per rectam FH, ita ut angulus SFI = IFH (9); ergo radius FH egredietur per punctum H eadem inclinatione, qua radius AS, dum ingrediebatur; ſed hic radius, ingrediendo per punctum S, erat axi parallelus; ergo egrediendo per punctum H eidem parallelus erit.

2°. Evidens eſt etiam, hoc pariter verum eſſe, ſuperficies reflectens PFQ ſive ſit plana, ſive convexa aut concava; reflexio enim ſemper fit in puncto F eodem modo, ac ſi ſpectaret ad planum perpendiculare rectæ FI. Q. E. D.

118. *Corollarium I.* Specula, de quibus in his ultimis propoſitionibus diſſeruimus, licet etiam habeant proprietatem, radios axi parallelos in ipſa cadentes parallelos remittendi; inter hæc tamen & ſpecula propoſitionis præcedentis differentia eſſentialis eſt, nimirum quia primi radii per eamdem viam eamdemque lineam, quam ſuperficiem reflectentem ingredientes percurrebant, regrediuntur; ſecundi autem per lineam oppoſi-

tam, & versus axis partem oppositam percurrunt, sed eidem lineæ, quam ante reflexionem in secunda superficie percurrebant, similem.

119. *Corollarium II.* Radii, in superficiem refringentem convexam cadentes, si sint divergentes, non autem paralleli & ab unico puncto proveniant, vel si sint convergentes, dirigantur-que versus unicum punctum retro superficiem refringentem convexam, ita ut in hujus superficiei occursu radii refracti axim secent in quodam puncto, in quo eadem axis tangit superficiem reflectentem, sive hæc sit plana, convexa, aut concava, dico, quod post reflexionem in hoc puncto factam egredientur per superficiem refringentem eadem obliquitate, quam ingrediendo habebant, aximque secabunt in eodem puncto, a quo procedebant, si divergentes sint; vel dirigentur versus idem punctum retro superficiem refringentem, versus quod antea dirigerentur, si essent convergentes.

Hujus demonstratio eadem est ac ea, quam dedimus pro casibus radiorum axi parallelorum.

120. *Corollarium III.* Hoc in casu corollarii præcedentis, radii in speculum cadentes si supponantur divergentes, superficies refringens necessario convexa erit, radiique a quodam axeos puncto, a superficie refringente ultra hujus superficiei diametrum integrum distante, provenire debent; si autem convergentes sint, superficies concava erit aut convexa.

121. *Corollarium IV.* In secunda propositione diximus, quod speculi vitrei centrum reflexionis sit quoddam punctum in axi;

axi, cujus proprietas eſt, quod radii ab hoc puncto in ſpeculum cadentes, poſt reflexionem & refractionem in his ſuperficiebus factas, ad illud revertuntur, ceu illud punctum, verſus quod radii poſt & ante reflexionem refractionemque diriguntur; hoc in ſenſu dici poteſt, quod ſpecula vitrea in caſibus duorum corollariorum præcedentum habeant duo reflexionis centra, inter ſe valde diverſa.

Aſt bene obſervandum eſt, quod in loco citato locuti ſumus de radiis, qui ſpeculum in & egrediendo non tantum verſus unicum punctum diriguntur, ſed eamdem lineam tenent in contrario ſenſu.

Sed radii in hoc caſu, licet verſus unicum idemque punctum dirigantur tam in quam egrediendo ſpeculum, egrediendo alteram, quam ingrediendo, viam tenent; unde per centrum reflexionis intelligi debet hoc punctum, verſus quod radii diriguntur tam in quam egrediendo, eamdem lineam in & egrediendo percurrentes.

PROPOSITIO XV.

122. Speculi vitrei denſitas, cujus prima ſuperficies convexa, ſecunda autem plana eſt, ſi ſit ſextæ partis diametri convexitatis, dico, quod radii, in hoc ſpeculum cadentes axique paralleli, poſt refractionem in prima ſuperficie factam, & reflexionem in occurſu ſecundæ ſuperficiei, ſe colligent in puncto axeos, primam ſuperficiem tangente.

DEMONSTRATUR.

HNPQ sit speculum vitreum, cujus superficies refringens HIN sit convexa, fig. 31. superficiesque reflectens PQ plana; vitri densitas DI sit æqualis sextæ parti diametri superficiei refringentis HIN; AS sit radius axi IF parallelus. Evidens est, quod hic radius, refringendo se in puncto S, dirigetur versus axeos punctum F, ita ut IF æqualis sit tribus superficiei refringentis HIN semidiametris (117).

Jam per punctum M superficiei reflectentis planæ PQ, in quod cadit radius refractus SM, & per punctum I, in quo axis tangit superficiem refringentem HIN, ducatur linea IM; per idem punctum M ducatur recta EM, perpendicularis superficiei reflectenti PQ, consequenter parallela rectæ IF; hoc peracto

Evidens est, quod propter parallelas IF & EM angulus DIM æqualis est angulo IME, angulusque DFM æqualis est angulo EMS; sed triangulum IMF isosceles est, nam DM perpendicularis est IF, & ID = DF, quælibet sextæ parti diametri superficiei refringentis HIN æqualis; ergo IM = MF, & angulus DIM = angulo DFM; consequenter angulus IME etiam æqualis est angulo EMS. Evidens ergo est, quod MI est radius reflexus radii SM (9); ergo radius reflexus radii SM axim secat in puncto I, superficiem refringentem HIN tangente. Q. E. D.

123. *Corollarium.* Superficies reflectens PQ si esset convexa, vitri densitate eadem semper manente, radius reflexus MI secaret axim in majori distantia superficiei reflectentis PQ quam DI;

D I; consequenter ipsam tantum secaret post egressum per superficiem refringentem H I N. Econtra superficies reflectens P Q si foret concava, radius reflexus M I secaret axim in puncto a superficie reflectente P Q minus distante, quam D I; ergo ipsam secaret, antequam egrederetur ex lenticula per superficiem refringentem H I N.

Unde sequitur, quod in singulis speculis vitreis, in quibus superficies reflectens æque ac refringens convexæ sunt, radii, axi paralleli, post refractionem in occursu superficiei refringentis factam, & reflexionem per superficiem reflectentem productam, axim secant in puncto superficiem refringentem tangente; vitri densitas major esse debet pro sexta parte diametri superficiei refringentis.

Superficie refringente autem eadem manente, superficies reflectens si fiat concava, vitri densitas major esse debet sexta parte diametri superficiei refringentis, ut radii, axi paralleli, post refractionem in occursu primæ superficiei factam, & reflexionem in secunda productam, secent eandem axim in puncto superficiem refringentem tangente.

PROPOSITIO XVI.

124. Data prima speculi vitrei superficie sphærica, invenire secundam superficiem sphæricam, ipsarumque distantiam inter se, ita ut speculum, quod terminant, colligat radios axi parallelos in axeos puncto primam superficiem tangente.

SO-

SOLUTIO.

HIN sit superficies refringens data, cujus axis sit FI; fig. 32. 33. 34. O sit centrum: FI sit æqualis tribus semidiametris IO hujus superficiei, AS sit radius, axi parallelus, cadens in punctum S superficiei HIN; per hoc punctum S & per punctum F ducatur recta SF, ad libitum protensa; evidens est (17) quod radius fractus radii incidentis AS tendet secundum directionem SF. Ex puncto qualicumque M lineæ protensæ S ducatur ad axeos punctum I, tangens superficiem refringentem HIN, recta MI, quæ cum recta MS formabit angulum IMS; hic angulus IMS dividatur in duas partes æquales per rectam ME, protendaturque, usquedum secet axim FI in quodam puncto C; ex hoc puncto C, quatenus centro & intervallo CM fiat arcus PDQ; dico, quod CM sit semidiameter superficiei reflectentis desideratæ, quod PDQ repræsentet hanc superficiem, & DI sit lenticulæ densitas desiderata.

DEMONSTRATUR.

CM cum sit semidiameter reflectentis superficiei PDQ, ei etiam perpendicularis est; sed angulus EMI factus est æqualis angulo SME; ergo MI est radius reflexus radii SM, cadentis in superficiem PDQ; ergo superficies hæc una cum superficie HIN terminat speculum HNPQ, colligens radios axi parallelos in puncto I superficiem refringentem tangente. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

125. Data secunda speculi vitrei superficie sphærica, invenire primam superficiem, distantiamque duas inter has superficies, ita ut speculum ab ipsis terminatum colligat radios axi parallelos in puncto primam superficiem tangente.

SO-

SOLUTIO.

PDQ ſit data ſuperficies reflectens, C ipſius centrum, DI axis ſpeculi; per centrum C ducatur ſemidiameter CM, protendaturque, ita ut cum axi faciat parvulum angulum MCD: evidens eſt, quod CM perpendicularis erit ſuperficiei reflectenti PDQ.

Ex puncto M ducatur recta MS, faciens angulum SME, quæque protenſa axim ſecet in puncto F. Ex eodem puncto M ducatur altera recta MI, ita ut faciat angulum EMI = SME, aximque ſecet in puncto I.

FI dividatur in tres partes æquales, quarum una ſit IO; ex puncto O, quatenus centro, & intervallo IO fiat arcus HIN, axim ſecans in puncto I, rectamque MS in puncto S.

His peractis dico, quod arcus HIN deſignabit ſuperficiem refringentem deſideratam; & DI erit denſitas ſpeculi vitrei deſiderati HNPQ.

DEMONSTRATUR.

Per punctum S ducatur SA, parallela rectæ FI; hæc deſignabit radium axi parallelum cadentem in punctum S ſuperficiei refringentis HIN; evidens eſt (17), quod radius refractus radii protenſi SA tranſeat per punctum F, diſtans ab hac ſuperficie pro tribus ſemidiametris IO; ergo radius refractus radii AS coincidet cum recta SM; unde ſequitur, quod angulus SME cum ſit æqualis angulo EMI, radius reflexus in

punćto M coincidet cum rećta M I; proindeque axim ſecabit in punćto I, ſuperficiem refringentem H S N tangente; ergo ſpeculum H N P Q eſt ſpeculum deſideratum. Q. E D.

136. *Corollarium.* Duabus in præcedentibus propoſitionibus tres caſus occurrere poſſunt 1° ſi binæ ſuperficies deſiderentur convexæ, 2° ſi binæ quærantur concavæ, 3° denique ſi prima ſuperficies deſideretur convexa & ſecunda concava.

In primo caſu ſuperficies refringens ſi data ſit, punctum M in rećta S F Fig. 34. ſumi debet in majori diſtantia ab hac ſuperficie, quam medietas rećtæ F I; alias problema impoſſibile erit; quod per corollarium propoſitionis XV. evidens eſt (123).

In tertio caſu punctum M ſumi debet in minori diſtantia a ſuperficie refringente data, quam medietas rećtæ F I, quod per idem corollarium certum eſt.

In primo caſu, ſuperficies data ſi ſit reflećtens, rećta M S fig. 34. axim ſecabit in punćto F, inter hanc ſuperficiem datam P D Q & centrum ſuum C.

In tertio caſu rećta S M axim ſecabit in punćto F, ita ut ſuperficies reflećtens data P D Q ſit inter centrum ſuum C & punctum F. (fig. 33).

In ſecundo caſu ſuperficies data ſi ſit refringens, punctum F fig. 32. ſumi poteſt in diſtantia majori aut minori ad arbitrium.

In eodem caſu ſuperficies data ſi ſit reflećtens, rećta M S ſecabit axim in punćto F, ultra centrum C; ſi enim ipſum ſecaret inter centrum & ſuperficiem, problema foret impoſſibile.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

127. Speculum vitreum, radios axi parallelos colligens in eodem puncto, in quo idem axis tangit primam superficiem, si constet ex duabus superficiebus concavis, fieri potest, ut duæ hæ superficies sint concentricæ

DEMONSTRATUR.

O sit centrum superficiei refringentis concavæ HIN, fig. 35. OI semidiameter; IF sit æqualis tribus semidiametris OI; ex puncto F & per punctum S in superficie HIN ducatur recta SF, ad arbitrium protensa, faciensque cum axi parvulum angulum IFS; per puncta I & S ducatur corda IS.

Per centrum O ducatur recta OE, perpendicularis chordæ IS, & protendatur, usquedum secet rectam protensam FS in puncto M; per puncta M & I ducatur recta MI. Ex puncto O quatenus centro & intervallo OM fiat arcus PDQ; hic arcus designabit superficiem reflectentem. His peractis, evidens est:

1°. Superficiem refringentem HIN & superficiem reflectentem PDQ idem habere centrum O.

2°. OM cum sit perpendicularis chordæ IS, ipsam in duas partes æquales dividet in puncto E; ergo bina triangula IEM & SEM in omnibus sunt æqualia: ergo angulus SEM = EMI.

3°. AS si sit radius axi parallelus cadens in punctum S, facta refractione in puncto S, dirigetur secundum lineam FM (17), cum punctum F distet a superficie refringente pro tribus semidia-

diametris OI; ergo radius refractus SM, tangens punctum M secundæ superficiei, reflectetur, ita ut dirigatur secundum lineam MI, & cum ipsa coincidet; ergo axim secabit in puncto I, superficiem refringentem tangente; ergo HNPQ est speculum utrinque concavum, cujus binæ superficies sunt concentricæ, radiosque axi parallelos colligit in axeos puncto superficiem refringentem tangente. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX.

128. Prima speculi vitrei superficies si sit plana, altera autem concava, binasque inter has superficies distantia sit æqualis quartæ parti diametri concavitatis, radii axi paralleli colligentur in puncto ejusdem axeos superficiem planam tangente.

DEMONSTRATUR.

Radii, axi paralleli, in hoc speculum cadentes, perpendiculares sunt primæ superficiei; ergo speculum ingredientur, quin refringantur; secundam in superficiem cadentes eidem axi adhuc paralleli erunt; ergo (16) colligentur in puncto ab hac superficie pro quarta diametri parte distante, & proinde in puncto primam superficiem tangente. Q. E. D.

129. *Corollarium I.* Distantia binas has inter superficies si quarta diametri concavitatis parte major sit, radii axi paralleli ipsum secabunt post reflexionem, antequam ex speculo egrediantur.

130 Co-

130. *Corollarium II.* Binarum ſuperficierum diſtantia ſi quarta diametri concavitatis parte minor ſit, radii axi paralleli ipſum tantum ſecabunt poſt egreſſum e ſpeculo per ſuperficiem planam, & poſt refractionem in hujus ſuperficiei occurſu factam.

131. *Corollarium III.* Radii in ſpeculum cadentes ſi ſint divergentes, procedantque ab ejusdem axeos puncto ante ſpeculum: dico, quod hi radii ut colligantur in puncto ſuperficiem planam tangente, neceſſe eſt, ut binarum ſuperficierum diſtantia major ſit quarta parte diametri concavitatis; ſi enim minor eſſet, radii axim tantum ſecarent poſt egreſſum e ſpeculo, & poſt refractionem in ſuperficie plana factam.

PROPOSITIO XX.

132. Duarum ſuperficierum diſtantia ſi ſit æqualis quartæ parti ſecundæ ſuperficiei, hæc ſi ſit concava, prima autem convexa; dico, quod radii, procedentes ab axeos puncto, pro tota convexitatis diametro a prima ſuperficie diſtante, poſt refractionem in occurſu hujus ſuperficiei factam, reflexionemque in occurſu ſecundæ, colligentur in axeos puncto primam ſuperficiem tangente.

DEMONSTRATUR.

Evidens eſt, quod radii procedentes a puncto, toto convexitatis diametro a convexa vitri ſuperficie diſtante, ſpeculum ingrediendo, poſt refractionem fiant axi paralleli; ergo in præſenti caſu radii, in ſuperficiem reflectentem cadentes, ſunt axi

paralleli; ergo (16) post reflexionem in hujus superficiei occursu factam colligentur in puncto, quarta sui diametri parte ab ipsa distante; ergo axim secabunt in puncto primam superficiem tangente. Q. E. D.

133. *Corollarium I.* In eodem casu, quod vitri densitas æqualis sit quartæ parti diametri secundæ superficiei, prima superficies si sit concava, radiique in hanc superficiem cadentes sint convergentes, diriganturque versus axeos punctum retro hanc superficiem, tota concavitatis suæ diametro ab hac superficie distans, radii per secundam superficiem reflexi colligentur in axeos puncto primam superficiem tangente.

134. *Corollarium II.* In eodem casu punctum, a quo radii procedunt, prima superficies si sit convexa, aut versus quod diriguntur, si sit concava, ab hac superficie si ultra concavitatis aut convexitatis suæ diametrum distet, post reflexionem radii colligentur in axeos puncto binas inter superficies.

Sed idem punctum, a quo radii procedunt, vel versus quod diriguntur, si toto convexitatis aut concavitatis diametro primæ superficiei proximius sit; reliquis manentibus, radii per 2^am^ superficiem reflexi axim tantum secabunt, quando egressi per primam superficiem refracti fuerint.

135. *Corollarium III.* Binarum superficierum distantia si quarta secundæ superficiei concavæ diametri parte major sit, radii procedentes a puncto, toto diametro a prima superficie distante, si sit convexa, vel si dirigantur versus axeos punctum retro hanc superficiem, si sit concava, quod punctum toto con-

ca-

cavitatis diametro ab hac distet; radii, per secundam superficiem reflexi, axim secabunt, antequam e speculo egrediantur.

Econtra binarum superficierum distantia si quarta superficiei reflectentis diametri parte minor sit, reliquis manentibus radii per hanc superficiem reflexi axim tantum secabunt, quando e speculo egressi & per primam refracti fuerint.

136. *Corollarium IV.* Prima superficies si sit convexa, secunda autem plana, radiique procedant a puncto, toto convexitatis diametro a prima distante, radii post reflexionem revertentur eadem via, qua venere, quæcumque fuerit vitri densitas.

PROPOSITIO XXI.

137. Data speculi vitrei superficie sphærica convexa, datoque axeos puncto, ab hac superficie ultra convexitatis suæ diametrum distante, invenire hujus speculi densitatem, ita ut, secunda superficie plana manente, radii ab hoc puncto procedentes axim secent post reflexionem in eodem puncto, in quo primam tangit.

SOLUTIO.

HIN sit data superficies convexa, AG axis speculi; fig. 37. A punctum datum in axi, a quo procedit radius obliquus AS: O sit centrum superficiei HIN; per hoc punctum O ducatur recta VF, parallela rectæ AS, æqualisque tribus semidiametris OV. Per puncta S & F ducatur recta SF; evidens est (17), quod

quod SF repræsentet radium fractum radii incidentis AS, & protensa secabit axim AG in puncto G.

His præmissis dico, quod si distantia GI a puncto G usque ad superficiem HIN dividatur in duas partes æquales in puncto D, distantia ID erit speculi densitas desiderata; rectaque PDQ perpendicularis rectæ AG, designabit secundam superficiem planam desideratam.

DEMONSTRATUR.

Per punctum M, in quo radius refractus SG secat superficiem planam PDQ, ducatur recta ME, parallela rectæ AG; per idem punctum M & punctum I, in quo axis tangit primam superficiem HIN, ducatur recta MI. His positis demonstrandum est, quod IM sit radius reflexus radii refracti SM, in superficiem reflectentem planam PQD cadentis in eodem puncto M.

Evidens enim est, quod triangulum GMI sit isosceles, siquidem DM perpendicularis est rectæ IG, & ID = DG, ergo angulus GIM = IGM; sed propter parallelos AG & ME angulus GIM = IME, & angulus IGM = EMS; ergo anguli IME & EMS æquales sunt; ergo (9) MI est radius reflexus radii MS, aximque secat in puncto I, in quo idem axis tangit primam superficiem HIN. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

138. Data ſpeculi vitrei prima ſuperficie ſphærica, datoque puncto in axi extra hanc ſuperficiem, invenire ſecundam ſuperficiem diſtantiamque, quam binæ hæ ſuperficies inter ſe habere debent, ut radii, a puncto dato procedentes, poſt reflexionem axim ſecent in puncto, in quo idem axis primam ſuperficiem tangit.

SOLUTIO.

HIN ſit data ſuperficies ſphærica, fig. 38. 39. 40. 41. 42. A punctum datum in axi AD: AS radius, procedens a puncto A, cadensque in punctum S ſuperficiei HIN. Per punctum O, tanquam hujus ſuperficiei centrum, ducatur IF, parallela rectæ AS, æqualisque tribus ſemidiametris OI; per puncta S & F ducatur recta SF, protendaturque, usquedum axim ſecet in puncto G.

Evidens eſt, radium refractum radii AS dirigi ſecundum rectam SF; in hac linea protenſa SF ſumatur punctum quodcumque M; per hoc punctum ducatur ad punctum I, ſuperficiem refringentem HIN tangens, recta MI.

Jam angulus IMS dividatur per rectam ME in duas partes æquales, hæc recta ME protenſa ſecabit axim in puncto C; ab hoc puncto quatenus centro & intervallo CM fiat arcus PDQ.

His peractis dico, quod hic arcus designet superficiem reflectentem desideratam, & recta DI sit distantia, quam binæ superficies HIN & PDQ inter se habere debent, ita ut radii, procedentes a puncto A, axim secent in primæ superficiei HIN puncto I, & hoc post reflexionem in occursu secundæ superficiei PDQ factam.

DEMONSTRATIO.

CM cum sit superficiei PDQ semidiameter, ipsi perpendicularis est; sed radius refractus SM cadit in punctum M, & anguli SME, EMI per constructionem æquales sunt; ergo radius reflexus radii fracti SM coincidit cum recta (9); ergo axim secat in puncto I. Q. E. D.

139. *Nota.* Propositio hæc tres casus habere potest. Primus casus est, quod superficies data si sit convexa, desideratur superficies reflectens concava, uti in fig. 38. 40.

Secundus, si data superficies refringens sit convexa, desidereturque superficies reflectens convexa, uti in fig. 39.

Tertius denique, si data superficies refringens sit concava, uti in fig. 41. 42. in hoc casu superficies reflectens necessario concava erit.

Notandum insuper, quod in primo casu punctum M in quocumque loco lineæ indefinite protensæ SF sumi potest.

In ſecundo caſu punctum M eſt neceſſario inter punctum G, ubi radius refractus SF axim ſecat, & punctum X, rectam GS æqualiter dividens; ſumendo enim hoc punctum extra lineam XG, problema erit impoſſibile.

Inſuper in eodem caſu punctum A a ſuperficie refringente ultra hujus ſuperficiei diametrum diſtare debet, alias problema erit impoſſibile. In cæteris autem caſibus hoc punctum A ad arbitrium ſumi poteſt, proximius aut remotius; nam problema ſemper poſſibile manet.

PROPOSITIO XXIII.

140. Radii, a puncto dato in axi ante ſpeculum vitreum procedentes, radii per ſecundam ſuperficiem reflexi colliguntur in puncto, in quo idem axis primam ſuperficiem tangit, binæ hæ ſuperficies ſi ſint concavæ, etiam poſſunt eſſe concentricæ.

DEMONSTRATIO.

HIN ſit ſuperficies concava refringens. Fig. 41. O ipſius centrum, & AD axis ſpeculi. A ſit punctum, a quo radii procedunt. Ex hoc puncto A ducatur radius AS, ſecans ſuperficiem refringentem HIN in puncto S; per centrum O ducatur FV, rectæ AS parallela, tribusque ſemidiametris OI vel OV æqualis.

Per puncta F & S ducatur recta FS, ad nutum protenſa. Per puncta S & I, in quibus axis ſecat ſuperficiem HIN, ducatur corda IS. Ex centro O ducatur perpendicularis huic cordæ

IS. Protendetur OE usquedum secet lineam protensam FS in puncto M; ex puncto O, velut centro, & intervallo OM fiat arcus PDQ; per puncta M & I ducatur recta MI; his peractis evidens est,

1°. SM esse radium refractum radii AS (17).

2°. Duos angulos SME, EMI esse æquales; recta ME cum sit cordæ IS perpendicularis, quæ proinde divisa est in duas partes æquales in puncto E.

3°. Recta OM cum sit etiam superficiei PDQ perpendicularis, sequitur (9) radium reflexum radii SM coincidere cum linea MI, & secare axim in puncto I.

4°. Duos arcus HIN, PDQ, duas superficies repræsentantes, idem habere centrum O; ergo speculum HNPQ binas suas superficies concentricas habet, radiosque, a puncto A ad primæ superficiei punctum I, in quo axis ipsam tangit, procedentes colligit. Q E. D.

PROPOSITIO XXIV.

141. Data distantia inter binas speculi vitrei superficies, invenire 1°. quæ hæ superficies esse debeant, ut radii, axi paralleli, ipsum secent post reflexionem secundæ superficiei, antequam ex vitro egrediantur, in puncto qualicumque dato binas inter has superficies.

2°

2°. Quales hæ ſuperficies eſſe debeant, ut radii, ab axeos puncto dato procedentes, ipſum ſecent, antequam vitrum egrediantur, in puncto qualicunque dato duas inter has ſuperficies.

Horum problematum ſolutio nullam patitur difficultatem, quia ex præcedentium propoſitionum demonſtrationibus per ſe ipſam evidens eſt. Unde

PROPOSITIO XXV.

142. Datis binis ſuperficiebus, ſpeculum vitreum terminantibus, dataque vitri denſitate invenire, utrum radii, axi paralleli, ipſum ſecabunt poſt reflexionem, in occurſu ſuperficiei reflectentis factam, in puncto inter has ſuperficies, antequam ex vitro per primam ſuperficiem egrediantur.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

HNPQ ſit ſpeculum vitreum, cujus ſuperficies refringens ſit HIN; fig. 32. 33. 34. PDQ ſit ſuperficies reflectens & DI vitri denſitas. AS ſit radius, axi parallelus; per punctum F, a ſuperficie refringente HIN tribus ſemidiametris diſtans, & punctum S ducatur recta SF, protenſa, usquedum ſecet ſuperficiem reflectentem PDQ in puncto M; SM repræſentabit ergo (17) radium refractum radii AS.

Ab hoc puncto M ducatur ad centrum C ſuperficiei reflectentis PDQ ſemidiameter CM, qui huic ſuperficiei perpendicularis erit, formabitque cum recta MS angulum CMS; per punctum M ducatur recta MI, formans angulum CMI = CMS.

His peractis evidens est, rectam MI repræsentare radium reflexum radii MS (9), sique protendatur, indicabit, utrum punctum I, in quo axim secat, sit intra vel ultra vitri densitatem.

PROPOSITIO XXVI.

143. Notis duabus superficiebus sphæricis speculum vitreum terminantibus, dataque vitri densitate, cum axeos puncto ante speculum, a quo radii obliqui in speculum cadentes procedunt, cognoscere, utrum hi radii post reflexionem in occursu secundæ superficiei factam, axim secturi sint in puncto binas inter has superficies, antequam per primam egrediantur.

SOLUTIO.

Speculum vitreum tale esse potest, fig. 38. 39. 40. 41. 42. ut radii, axi paralleli, in ipsum cadentes axim secent, antequam ex vitro egrediantur, in puncto binas inter superficies; attamen, hoc speculo eodem manente, radii, si fiant eidem axi obliqui, procedantque a puncto dato ejusdem axis, ipsum secant mox ante mox post egressum e speculo, reflexi per secundam superficiem; quid in hoc casu accidat, hoc modo innoteseet.

A sit punctum datum in axi, a quo radius, cadens in superficiem refringentem HIN, procedit; per punctum O, velut hujus superficiei centrum ducatur VF, rectæ AS parallela, tribusque suis semidiametris æqualis; per puncta F & S ducatur recta FS, protendaturque, usquedum secet superficiem reflectentem PDQ in puncto M, rectaque SM repræsentabit radium refractum radii SA (17). Per

Per punctum M & per punctum C, ſuperficiei reflectentis centrum ducatur ſemidiameter MC, & protendatur usque in E; conſequenter ME huic ſuperficiei PDQ perpendicularis erit, facietque cum linea MS angulum SME; per punctum M ducatur linea MI, quæ faciat angulum IME = SME.

His peractis, evidens eſt (9) lineam MI repræſentare radium reflexum radii SM; proinde ſi protendatur, usquedum axim ſecet, cognoscetur, utrum ipſum ſecet ante vel poſt egreſſum per primam ſuperficiem.

PROPOSITIO XXVII.

144. Conſtrui poſſunt ſpecula vitrea utrinque concava, vel utrinque convexa, aut convexo-concava, objecta repræſentantia, quin augeantur vel diminuantur.

Ea ſpecula dico utrinque concava, quorum ſuperficies refringens æque ac reflectens concavæ ſunt, utrinque convexa autem ea, quorum binæ ſuperficies convexæ ſunt.

Hic bene notandum eſt, ne confundantur ideæ, convexumque accipiatur pro concavo, quod eadem vitri ſuperficies, ſtanno non obducta, convexa eſt, obducta autem concava. Evidens enim eſt, quod ſtanni obductio reflexionem producens eſt concava; cum autem hanc ſuperficiem conſideremus tantum quatenus reflectentem, concava dici debet eodem modo vitri ſuperficies, ante ſtanni obductionem concava, poſt ſtanni obductionem convexa eſt. Jam demonſtretur propoſitio.

DE-

DEMONSTRATIO.

In propositione 13. (115) demonstravi, dari specula vitrea utrinque concava aut utrinque convexa, & alia convexo-concava, quæ parallelos remittunt radios, axi parallelos in ipsa cadentes; ergo hæc specula objecta non aliter repræsentant quam specula plana, consequenter ipsa repræsentant naturaliter nec majora, nec minora.

145. *Nota.* Hoc ut in praxi ad amussim fiat, horum speculorum superficies non debent esse portiones sphæræ nimium parvæ, ipsorumque densitas tam parva sit, ut fieri potest; horum speculorum latitudo etiam non sit majoris numeri graduum; alias objecta prope margines repræsentata deformata apparerent.

PROPOSITIO XXVIII.

146. Possibile est construere specula vitrea objecta inverse repræsentantia, quin appareant majora aut minora.

DEMONSTRATIO.

In propositione 11. demonstravi, dari specula vitrea, quæ parallelos remittunt radios, axi parallelos in ipsa cadentes, radiosque in specula versus unam axeos partem ingredientes versus partem oppositam egredi; ergo objectum si ab his speculis tantum distet, ut radii ab eodem puncto procedentes sint sensibiliter paralleli, dum in specula cadunt, ex iis etiam paralleli egredientur, radiique, a puncto objecti ad partem dexteram procedentes, per partem sinistram egredientur;

tur; conſequenter oculus hæc objecta per radios in his ſpeculis reflexos percipiens, ipſa videbit inverſa, quin majora aut minora appareant. Q. E. D.

147. *Nota.* Hoc in praxi difficile eſt 1° quia hæc ſpecula horrendæ magnitudinis eſſe deberent, conſequenter ad elaborandum difficillima, & elaboratorum uſus difficilis foret.

2° quia vitri denſitas ſi eſſet major aut minor, radiorum paralleliſmus multum turbaretur, conſequenter non ſequeretur idem effectus; ſed ut vitri denſitas non fieret nimium major aut minor, in elaborandis his ſpeculis maxima requireretur dexteritas, quæ in artificibus difficile invenitur. Sufficit ergo, horum ſpeculorum poſſibilitatem demonſtraſſe.

148. Eos autem, quibus horum ſpeculorum perfectio placeret, monitos volo, quod hujus ſpeciei ſpeculum, ſagaciter elaboratum, ut optimos habeat effectus, ſit illud, cujus binæ ſuperficies ſunt portiones ſphærarum, in quibus diameter unius ſit triplus diametri alterius, cujusque prima ſuperficies ſit convexa & portio ſphæræ minoris, & ſecunda concava & portio ſphæræ majoris, uti fig. 30.

PROPOSITIO XXIX.

149. Poſſibile eſt conſtruere ſpecula vitrea, objecta perfecte repræſentantia, quin videantur majora aut minora, in quocumque loco oculus collocatus ſit, prope aut procul a ſpeculo, quæ tamen focum habeant, in quo radii ſolares collecti maximum calorem producunt.

SOLUTIO.

HNPQ sit speculum, fig. 27. cujus prima superficies HNS sit convexa & secunda PDQ concava, in quo aliunde vitri densitas major sit tribus semidiametris superficiei HNS, centrumque superficiei reflectentis PDQ sit in axeos puncto C, a superficie refringente HSN tribus hujus superficiei semidiametris distante. Dico, hoc speculum producere effectum supra dictum.

DEMONSTRATIO.

Evidens est, quod radii inter se paralleli in primam superficiem HSN cadentes post refractionem colligentur in puncto C (17); consequenter radii, a sole procedentes, vi hujus collectionis maximum calorem producent in puncto C.

Hi iidem radii, progredientes ultra C, in superficiem reflectentem PDQ cadent, hoc punctum C cum sit hujus superficiei centrum: ergo reflexi per eamdem viam revertentur, & secundo colligentur in puncto C & primo productum calorem augebunt, proindeque in hoc puncto erit calor maximus.

Hi iidemque radii, in puncto C in transversum secti, egredientur per idem superficiei HIN punctum, per quod ingressi erant; ergo paralleli egredientur, sicuti paralleli ingressi fuerant.

Evidens ergo est, quod, objectum quodcumque ante hoc specnlum ponatur in tali distantia, ut radii, ab eodem puncto procedentes, sint sensibiliter paralleli, post reflexionem e speculo adhuc egredientur paralleli; ergo etiam evidens est, quod oculus ante speculum positus sive prope sive procul, per radios

dios parallelos hæc objecta ſemper percipiet; ſed oculus nonniſi extra ſpeculum collocari poteſt; ergo hoc ſpeculum objecta neque majora neque minora repræſentabit, attamen focum habebit, in quo maximum calorem producet. Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

150. Conſtrui poſſunt ſpecula vitrea concava objecta minora ſemper repræſentantia. Fig. 10.

DEMONSTRATIO.

Pro ſecundo caſu corollarii 8. tertiæ propoſitionis (57) vidimus, dari ſpecula vitrea concava, quæ omnes radios, in ipſa parallele cadentes, poſt reflexionem divergentes remittunt; ergo objecta, per horum ſpeculorum reflexionem percepta, minora ſemper apparebunt. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

151. Conſtrui poſſunt ſpecula vitrea concava, quæ ſolis ardoribus expoſita, in focis ſuis neque ignem, neque calorem ſenſibilem producere queunt.

DEMONSTRATIO.

Evidens eſt 1°. quod ſpecula, de quibus in præcedenti propoſitione, calorem nunquam producant.

2°. In propoſitione 13ª (115) demonſtravimus, fig. 8. dari ſpecula vitrea concava, quæ radios, in ipſa parallele cadentes, remittunt parallelos; ergo hæc ſpecula radiis ſolaribus expoſita, calorem nunquam producent. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXII.

152. Construi possunt specula vitrea convexa, quæ objecta majora repræsentare possunt, quæque, radiis solaribus exposita, in focis suis ignem producent.

DEMONSTRATIO.

Pro secundo casu corollarii 7. tertiæ propositionis (55) vidimus, fig. 4. quod dentur specula vitrea convexa, quæ radios, in ipsa axi parallele cadentes, colligunt in puncto axeos ante primam superficiem; evidens ergo est, hæc specula objecta majora repræsentare posse, & soli oppositа colligere radios in uno puncto, in quo ignem producere queunt. Q. E. D.

153. *Corollarium.* Erravit ergo P. Schottus affirmando (in Mag. univers. part. 1. lib. 7. prop. 6.) lenticulam ante convexam & retro concavam, in parte concava stanno obductam, soli expositam, ignem producere non posse.

PROPOSITIO XXXIII.

154. Construi possunt specula vitrea, in quibus objecta percipientur distantia præcise, ac si in prima superficie depicta essent.

DEMONSTRATIO.

Vidimus in propositionibus XV. XVI. XVII. XVIII. & XIX. fig. 32. 33. 34. 31. dari specula vitrea, quæ radios axi parallelos colligunt in puncto, primam superficiem tangente; evidens ergo est, quod objecta remota, quorum radii, ab unico puncto procedentes, in speculum cadunt, cum sint sensibiliter paralleli, imaginem suam in prima horum speculorum superficie pictam

ctam habebunt; conſequenter oculus, extra ſpeculum collocatus, ea in hac ſuperficie ſemper percipiet. Q. E. D.

In hoc caſu objecta percipientur inverſa.

In praxi, ſpeculum optimum effectum productum, foret illud, cujus prima ſuperficies convexa eſt, & ſecunda plana, cujus mentionem fecimus in propoſitione XV. (fig. 31.)

Speculum minoris denſitatis, in hoc caſu optimum effectum producens, eſt illud propoſitionis XVI. vel XIX. (fig. 33).

PROPOSITIO XXXIV.

155. Conſtrui poſſunt ſpecula vitrea, objecta ita remota repræſentantia, ac ſi eſſent in ſecunda ſuperficie depicta.

DEMONSTRATIO.

Evidens eſt, quod omnia ſpecula, quorum in propoſitione XIV. mentionem fecimus, radios axi parallelos in uno puncto ſecundam ſuperficiem tangente præciſe colligunt; ergo objecta remota, quorum radii, ab unico puncto procedentes, ſunt ſenſibiliter paralleli, in ſecunda ſuperficie percipientur. Q. E. D.

Hoc in caſu objecta inverſa percipientur.

Specula, quæ in hoc caſu optimos præſtant effectus, ſunt ea, quorum prima ſuperficies convexa eſt, ſecunda autem concava, ita ut ſemidiameter ſecundæ ſuperficiei ſit triplus diametri primæ, centrumque ſecundæ ſuperficiei ſit in axeos puncto primam ſuperficiem tangente. Fig. 30.

PROPOSITIO XXXV.

156. Construi possunt specula vitrea, in quibus, si quis se aspiciat, faciem suam in prima superficie percipiet. Fig. 37. 38. 39. 40. 41. 36. 42.

DEMONSTRATIO.

In propositionibus XX. XXI. XXII. XXIII. jam vidimus, dari specula vitrea, quæ in axeos puncto, primam superficiem tangente, colligunt radios ab ejusdem axeos puncto extra speculum procedentes; ergo evidens est, quod homo, in hoc puncto collocatus, faciem suam in prima superficie percipiet. Q. E. D.

Imago intuentis hisce in speculis inversa est.

PROPOSITIO XXXVI.

157. Possunt construi specula vitrea, in quibus prospiciens imaginem suam in intimo speculi super secundam superficiem percipiet.

DEMONSTRATIO.

Ex secundo corollario propositionis XIV. evidens est, dari specula vitrea, in quibus radii, ab axeos puncto extra speculum procedentes, colliguntur in puncto secundam superficiem tangente; ergo quidam coram speculo in hoc puncto collocatus in intimo speculi imaginem suam percipiet.

PROPOSITIO XXXVII.

158. Construi possunt specula vitrea, quæ objecta remota in qualicunque axeos puncto binas inter superficies in ipsamet vitri densitate repræsentant. 159.

159. Alia conſtrui poſſunt, in quibus propria imago videri poteſt in qualicunque axeos puncto binas inter ſuperficies.

Totum hoc per ſe evidens eſt, nullaque demonſtratione indiget; de his ſufficienter in propoſitione XXIV. locuti ſumus.

PROPOSITIO XXXVIII.

160. Conſtrui poſſunt ſpecula vitrea, quæ extra ſpeculum nullum calorem producunt, etiamſi radiis ſolaribus exponantur, licet ipſamet ſpecula ita calefiant, ut ardentia evadant.

DEMONSTRATIO.

Evidens eſt, quod omnia ſpecula vitrea, radios axi parallelos, antequam e ſpeculo egrediantur, in ejusdem axeos puncto binas inter ſuperficies colligentia, de quibus in pluribus præcedentibus propoſitionibus mentionem fecimus, hanc proprietatem habent.

PROPOSITIO XXXIX.

161. Poſſibile eſt conſtruere ſpecula ſphærica concava, quæ radiis ſolaribus expoſita in centro concavitatis ſuæ comburunt.

P. Caſparus Schotti in magia ſua univerſali part. 1. lib. 7. poſt propoſitionem VIII. hanc quæſtionem proponit: nempe, utrum poſſibile ſit, ita conſtruere ſpeculum, ut punctum ardens in ſpeculo concavo in centro inveniatur. P. Marinus Bettinus, ab ipſo citatus hanc quæſtionem affirmative ſolvit; imo pretendit, maximum calorem produci poſſe, ſi ſpecula concava ita elaborentur, ut punctum ardens præciſe in ipſorum centro inveniatur.

162.

162. Hoc ut obtineatur, speculum ita confici debet, ut radii solares, antequam in speculum sphæricum concavum cadant, colligantur & sese in transversum secent in centro; unde necessario sequetur, quod omnes radii in superficiem speculi sphærici concavi perpendiculariter cadant, seque reflectentes secunda vice in centro colligantur; consequenter per hanc duplicem collectionem, radii solares insolitam in centro comburendi vim obtinebunt.

163. Ut autem radii solares colligantur, seque in centro speculi sphærici concavi in inversum secent, P. Marinus Bettinus vult, ut construatur speculum parabolicum concavum, in medio perforatum, focusque ipsius sit retro hoc speculum, ut speculi parabolici concavi axis coincidat cum axi speculi sphærici concavi, utriusque focus, nempe speculi parabolici & speculi sphærici, sit in eodem puncto axis communis; his ita præparatis, evidens est, quod, duo hæc specula ita conjuncta si soli exponantur, radii se colligent in centro speculi sphærici concavi, antequam in suam superficiem cadant.

164. P. Schottus, allato hoc P. Bettini processu, quem ingeniosum sed parum solidum vocat, concludit, impossibile esse, construere speculum sphæricum concavum, ita ut in centro comburat; fatetur tamen, per hunc processum vim comburendi augeri; attamen negat, hoc medio effectum realiter comburendi obtineri posse.

165. Hujus rationem allegat, quod corpus combustibile, in centro collocatum, intercipiet omnes radios, qui in hoc puncto sese in inversum secare deberent, consequenter nullus radius in speculum sphæricum concavum caderet; unde demum concludit,

dit, impossibile esse, ut hoc medio speculum sphæricum concavum ullum effectum in centro producat.

166. Observandum est, tam quoad crisim P. Schotti, quam quoad P. Bettini processum ipsum 1°. dari corpora combustibilia transparentia; unde sequitur, hæc corpora, foco specularum P. Bettini exposita non impedire, quin radii solares progrediantur, cadantque in speculum sphæricum concavum; proinde objectio P. Schotti impossibilitatem absolutam effectus horum specularum non probat.

167. 2°. P. Bettinus facilius medium administrare potuisset, si loco speculi parabolici (quod in constructione impossibile puto) usus esset lenticula sphærica convexa ex vitro, cujus refractionis focus coincidisset cum centro speculi sphærici concavi.

168. Attamen fateri debemus, inconveniens a P. Schotto rationabiliter objectum per hoc non vitari in singulis casibus, ubi in foco collocarentur materiæ combustibiles opacæ.

169. 3°. P. Bettini methodus plura exigit specula, cum idem unico speculo fieri possit; quod per propositionem XXIX. (149) evidens est; in hoc tamen inconveniens est, nempe quod nullum corpus combustibile in foco collocari possit; consequenter hoc medio nullus alius effectus obtineri potest, quam ut vitrum hoc speculum componens egregie calefiat, cum in foco maximus calor produceretur.

170. Concludendum ergo est, hoc problema nulla ex his methodis perfecte solutum esse. Attamen per specula vitrea facile solvetur.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

171. Sit speculum vitreum, cujus focus absolutus sit præcise in centro primæ superficiei, uti descripsimus in propositione IX. (89).

172. Evidens est, quod quodlibet horum speculorum omnis generis materias combustibiles, sive opacas, sive transparentes comburet; primum in centro secundæ superficiei, & secundum in centro primæ, & hoc eodem modo eademque facilitate, ac alia specula caustica. Q. E. D.

173. Hæc unica methodus est, qua speculum concavum in centro suæ concavitatis comburere possit. Hujus praxis facilis est, nullæque occurrent aliæ difficultates, quam quæ generales sunt in construendis cæteris speculis.

174. Erravit ergo P. Schottus, affirmando impossibile esse, ut speculum sphæricum concavum præcise in centro suo comburat; *combustio*, inquit, *non potest fieri in centro speculi concavi.*

175. Adhuc observandum est, non tantum fieri posse, ut speculum præcise in centro suæ concavitatis comburat, sed data etiam qualicumque concavitate sphærica vitrea speculum ex ea constructum comburit in qualicumque axeos puncto dato ante hanc concavitatem: quod per propositionem XI. (140) evidens est.