Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1899. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1899.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die Vertheilung der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler.

Hugo
Von H. Seeliger.

(*Eingelaufen 7. Januar.*)

Es war schon lange mein Wunsch, meine vor vielen Jahren in den „Astron. Nachrichten"[1]) veröffentlichten Untersuchungen über das genannte Thema von Neuem darzustellen. Die früheren Aufsätze leiden an einigen Stellen an allzu grosser Kürze, was ihre Lectüre unnöthig erschweren musste und umgekehrt dürften an andern Stellen Kürzungen zum Vortheile gereichen. Ich benutze ausserdem diese Gelegenheit, um ein Versehen zu corrigiren, das in dem ersten der beiden Aufsätze untergelaufen ist und durch welches zwei Formeln beeinflusst worden sind. Ich bin Herrn Professor Harzer aufrichtig dankbar, dass er mich auf die Nothwendigkeit einer Correctur aufmerksam gemacht hat.

Wenn man eine Reihe von Messungsresultaten durch eine Interpolationsformel oder durch eine ausgearbeitete Theorie darzustellen hat, so wird eine solche Darstellung dann als eine zufriedenstellende angesehen werden können, wenn die übrig bleibenden Fehler im Mittel eine gewisse durch die Genauigkeit der Messungen bedingte Grösse nicht überschreiten und wenn die Fehlerreihe die Kriterien des Zufalls erfüllt. Für eine Fehlerreihe, deren Anordnung durch Zufall entstanden ist, wird es sehr unwahrscheinlich sein, dass sich etwa die positiven Fehler zu wenigen grossen Gruppen zusammenfinden werden,

---

[1]) Nr. 2284 und 2323.

vielmehr wird mit überwiegender Wahrscheinlichkeit eine Vertheilung der Vorzeichen entstehen, die sich von einer gewissen wahrscheinlichsten Vertheilung nicht allzu sehr entfernt. Die Anzahl der Zeichenwechsel wird sich, mit andern Worten gesagt, zu der Anzahl der Zeichenfolgen in ein bestimmtes Verhältniss setzen und zwar mit einer um so grösseren Wahrscheinlichkeit, je grösser die Zahl der Fehler ist, aus welcher sich die vorliegende Reihe zusammensetzt. Auf diese längst bekannte Wahrheit wird bei Ausgleichungsrechnungen nicht selten Rücksicht genommen, die nähere Behandlung der sich so darbietenden Wahrscheinlichkeitsaufgabe dürfte aber von mir zuerst gegeben worden sein. Betrachtet man weiter die erste Differenzenreihe der ursprünglichen Fehlerreihe, so wird in dieser die Zahl der positiven und der negativen Differenzen ebenfalls gewissen Gesetzen des Zufalls zu gehorchen haben. Man kann noch weiter gehen und auch die Zahl der Zeichenwechsel in der ersten Differenzenreihe untersuchen, jedoch beschränke ich mich, was für eventuelle Anwendungen allein in Frage kommen dürfte, im Folgenden nur auf die Betrachtung der Zeichenwechsel in der gegebenen Fehlerreihe (§ 1) und die Anzahl der positiven Vorzeichen in der ersten Differenzenreihe (§ 2).

1.

Wir denken uns die positiven Fehler etwa durch schwarze und die negativen Fehler durch weisse Kugeln dargestellt. Für eine Fehlerreihe, deren Anordnung durch Zufall entstanden ist, bietet sich dann die folgende Aufgabe dar: Es seien $\mu = m + n$ Kugeln, von denen m schwarz $(+)$ und n weiss $(-)$ sind, absichtslos, also den Gesetzen des Zufalls gemäss, in eine Reihe neben einander gelegt. Es soll die Wahrscheinlichkeit W_y dafür bestimmt werden, dass in dieser Reihe y Uebergänge von Kugeln der einen zu solchen der andern Farbe oder kurz gesagt y Farbenwechsel stattfinden. Wird $m > n$ angenommen, so können offenbar höchstens $2n$ Farbenwechsel stattfinden, da diese Maximalzahl nur dann erzielt werden kann, wenn jede weisse Kugel zwischen zwei schwarze zu liegen kommt. Es ist also jedenfalls

$$y \leq 2n.$$

Für $m = n$ ist, wie sofort ersichtlich, diese Maximalzahl $2n - 1$. Ferner soll $n > 0$ vorausgesetzt werden, woraus dann folgt:

$$1 \leq y \leq 2n.$$

Die Abzählung aller möglichen Fälle, in denen y Farbenwechsel vorkommen, geschieht am einfachsten, wenn man gerade und ungerade y unterscheidet. Ist $y = 2x$ und bezeichnet man eine Aufeinanderfolge (Gruppe) von lauter schwarzen Kugeln mit $G(+)$ und eine solche von lauter weissen Kugeln mit $G(-)$, so sind die beiden Anordnungen möglich:

$$\left.\begin{array}{l} G_1(+)\,G_1(-)\,G_2(+)\,G_2(-)\ldots G_x(+)\,G_x(-)\,G_{x+1}(+) \\ G_1(-)\,G_1(+)\,G_2(-)\,G_2(+)\ldots G_x(-)\,G_x(+)\,G_{x+1}(-). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Bezeichnet man also mit $f(y, n)$ die Anzahl, wie oft n Elemente in y Gruppen, von denen jede wenigstens ein Element enthält, untergebracht werden können, wobei aber nur jene Vertheilungen als von einander verschieden angesehen werden sollen, die sich durch die Anzahl der in jeder Gruppe enthaltenen Elemente von einander unterscheiden und bildet man auf diese Weise die Anzahl aller möglichen Fälle (1), so findet man:

$$A_{2x} = \Pi(m)\,\Pi(n)\,[f(x, n)\,f(x+1, m) + f(x+1, n)\,f(x, m)].$$

$\Pi(n)$ ist hierin die Gauss'sche Bezeichnung für $n! = 1.2\ldots n$. Der Factor $\Pi(m)\ \Pi(n)$ kommt dadurch zu Stande, dass alle Elemente $+$ und ebenso alle Elemente $-$ unter sich vertauscht werden müssen, um alle möglichen Fälle zu erhalten.

In gleicher Weise kommen für $y = 2x + 1$ die beiden Anordnungen:

$$\begin{array}{l} G_1(+)\,G_1(-)\,G_2(+)\,G_2(-)\ldots G_{x+1}(+)\,G_{x+1}(-) \\ G_1(-)\,G_1(+)\,G_2(-)\,G_2(+)\ldots G_{x+1}(-)\,G_{x+1}(+) \end{array}$$

in Betracht und hieraus ergiebt sich:

$$A_{2x+1} = 2\,\Pi(m)\,\Pi(n)\,f(x+1, n)\,f(x+1, m).$$

Die Wahrscheinlichkeiten W_{2x} und W_{2x+1} für das Vorkommen von $2x$ bezw. $2x+1$ Zeichenwechseln ergeben sich durch Division der Anzahlen A durch die Zahl der möglichen Vertauschungen aller Elemente, also:

$$W_{2x} = \frac{A_{2x}}{\Pi(m+n)}, \qquad W_{2x+1} = \frac{A_{2x+1}}{\Pi(m+n)}.$$

Es ist nun noch die Anzahl $f(y+1, n)$ zu finden, welche angiebt, wie oft sich n Elemente in $y+1$ Gruppen unterbringen lassen. Man erreicht diese Anordnung auch, wenn man zuerst 1 Element absondert und die $n-1$ übrig bleibenden in y Gruppen vertheilt, oder 2 Elemente in eine Gruppe bringt und die übrigen $n-2$ in y Gruppen u. s. f., schliesslich $n-y$ Elemente in eine Gruppe und die y übrig bleibenden in y Gruppen. Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft, denn jede Gruppe soll mindestens ein Element enthalten. Die eben beschriebene Procedur durch eine Formel dargestellt giebt:

$$f(y+1, n) = f(y, n-1) + f(y, n-2) + \ldots + f(y, y).$$

Fügt man die Bedingungen

$$f(y, y) = 1, \qquad f(1, n) = 1$$

hinzu, so ist die Funktion f vollständig bestimmt, denn man kann nun leicht $f(2, n)$, $f(3, n)$ etc. berechnen. Man findet so:

$$f(y, n) = \frac{n-1\,.\,n-2\ldots n-y+1}{1\,.\,2\ldots y-1} = \binom{n-1}{y-1} = \frac{\Pi(n-1)}{\Pi(y-1)\,\Pi(n-y)}.$$

Hiermit ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} W_{2x} &= \frac{\Pi(m)\,\Pi(n)}{\Pi(m+n)}\binom{n-1}{x-1}\binom{m-1}{x-1}\cdot\frac{m+n-2x}{x} \\ W_{2x+1} &= 2\,\frac{\Pi(m)\,\Pi(n)}{\Pi(m+n)}\cdot\binom{n-1}{x-1}\binom{m-1}{x-1} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Als Rechencontrole kann aufgestellt werden:

$$1 = \sum_{x=1}^{x=n} W_{2x} + \sum_{x=0}^{x=n-1} W_{2x+1}$$

$$= \frac{\Pi(m)\,\Pi(n)}{\Pi(m+n)} \cdot (m+n) \cdot \sum_{x=1}^{x=n} \binom{n-1}{x-1} \binom{m-1}{x-1} \frac{1}{x}.$$

In der That kann man die letzte Summe auch als hypergeometrische Reihe

$$F(-n+1,\ -m+1, 2, 1) = \frac{\Pi(m+n-1)}{\Pi(m)\,\Pi(n)}$$

schreiben.

Es wird sich empfehlen, statt der W die Grösse V_x

$$V_x = W_{2x} + W_{2x-1} = \frac{\Pi(m)\,\Pi(n)}{\Pi(m+n)} \binom{n-1}{x-1} \binom{m-1}{x-1} \frac{m+n}{x} \tag{3}$$

zu betrachten und dem x alle Werthe von 1 bis n zu ertheilen, da $m > n$ vorausgesetzt worden ist.

Hat man nun eine Reihe von positiven Gliedern:

$$g_1\, g_2 \ldots g_l\, g_{l+1} \ldots g_m\, g_{m+1} \ldots g_r \ldots g_\mu \tag{4}$$

und nehmen die g von links nach rechts zu bis zu einem Maximalglied g_m, von wo ab sie wieder fortwährend abnehmen sollen, so aber, dass:

$$\frac{g_m}{g_{m-1}} < \frac{g_l}{g_{l-1}}, \quad \frac{g_{m-1}}{g_{m-2}} < \frac{g_{l-1}}{g_{l-2}} \text{ etc.}$$

$$\frac{g_m}{g_{m+1}} < \frac{g_r}{g_{r+1}}, \quad \frac{g_{m+1}}{g_{m+2}} < \frac{g_{r+1}}{g_{r+2}} \text{ etc.}$$

oder, was dasselbe bedeutet:

$$\frac{g_m}{g_l} < \frac{g_{m-1}}{g_{l-1}} < \frac{g_{m-2}}{g_{l-2}} \ldots$$

$$\frac{g_m}{g_r} < \frac{g_{m+1}}{g_{r+1}} < \frac{g_{m+2}}{g_{r+2}} \ldots$$

Dann folgt sofort:

$$\frac{g_m}{g_l} < \frac{g_m + g_{m-1} + g_{m-2} + \dots + g_l}{g_l + g_{l-1} + g_{l-2} + \dots + g_{2l-m}}; \quad \frac{g_m}{g_{l'}} < \frac{g_m + g_{m+1} + \dots + g_{l'}}{g_{l'} + g_{l'+1} + \dots + g_{2l'-m}}.$$

Bezeichnet man mit $(l\,m)$ die Summe der Glieder $g_l + g_{l+1} + \dots + g_m$ und mit $(m\,l')$ die Summe $g_m + g_{m+1} + \dots + g_{l'}$, so ist also:

$$(l\,m) > \frac{g_m}{g_l}(g_l + g_{l-1} + \dots + g_{2l-m})$$

$$(m\,l') > \frac{g_m}{g_{l'}}(g_{l'} + g_{l'+1} + \dots + g_{2l'-m}).$$

Ist ferner L die Summe aller Glieder in (4) links von g_l, das letztere nicht mit eingeschlossen, und R die Summe aller Glieder rechts von $g_{l'}$, dieses ebenfalls ausgeschlossen, so ist offenbar:

$$\left.\begin{aligned} L &< (g_l + g_{l-1} + \dots + g_{2l-m})\frac{l-1}{m-l+1} \\ R &< (g_{l'} + g_{l'+1} + \dots + g_{2l'-m})\frac{\mu - l'}{l' - m + 1} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und man hat demzufolge:

$$(l\,m) > \frac{g_m}{g_l} L \cdot \frac{m-l+1}{l-1}; \quad (m\,l') > \frac{g_m}{g_{l'}} R \cdot \frac{l'-m+1}{\mu - l'}; \quad (6)$$

nennt man den **kleineren** der beiden Factoren von L und R in diesen beiden Gleichungen a, so ist sicher:

$$(l\,m) + (m\,l') > a(L + R).$$

Ist Σ die Gesammtsumme aller Glieder (4) und $(l\,l')$ die Summe aller Glieder zwischen g_l und $g_{l'}$, wobei indessen strenge genommen g_m doppelt gezählt wird, was übrigens bei einer sehr grossen Zahl von Gliedern nicht in Frage kommt, so hat man:

$$(l\,l') = (l\,m) + (m\,l'); \quad \Sigma = (l\,l') + L + R,$$

und deshalb

$$(l\,l') > \frac{a\Sigma}{1+a}. \quad (7)$$

Diese nach der Ars conjectandi von J. Bernoulli gebildeten Formeln sollen nun auf die Function (3) angewendet werden. Hier ist

$$\frac{V_x}{V_{x-1}} = \frac{(n-x+1)(m-x+1)}{x\cdot(x-1)}.$$

Dieser Quotient nimmt, wenn man von $x = 2$ ausgehend x wachsen lässt, fortwährend ab. Er ist zuerst grösser als 1, von einer bestimmten Stelle an wird er aber < 1. Daraus folgt, dass die V_x bis zu einem gewissen Werth von x wachsen, hier ein Maximum erreichen, um wieder fortwährend abzunehmen. Die Einzelwerthe von V_x erfüllen also die für die g angenommenen Bedingungen. Das Maximum findet bei einer der beiden ganzen Zahlen statt, welche den Werth:

$$x = \frac{m\,n}{m+n+1} + 1$$

einschliessen. Nennt man diese beiden Zahlen ν und $\nu + 1$, so ist also

$$\nu - 1 < \frac{m\,n}{m+n+1} < \nu.$$

Man setze in der ersten Formel (6):

$$m = \nu,\ l = \nu - t,\ a_1 = \frac{V_\nu}{V_{\nu-t}}\cdot\frac{t+1}{\nu-t-1},$$

und in der zweiten

$$m = \nu+1,\ l' = \nu+t,\ \mu = n,\ a_2 = \frac{V_{\nu+1}}{V_{\nu+t}}\cdot\frac{t}{n-\nu-t}.$$

Da dann $\Sigma = 1$, so wird, wenn das k l e i n e r e der beiden a gewählt wird, die Wahrscheinlichkeit Ω dafür, dass die Anzahl der Zeichenwechsel zwischen

$$\left.\begin{array}{c} 2\nu - 2t + 1 \ \text{ und } \ 2\nu + 2t - 2 \\ \text{liegt:} \qquad \Omega > \dfrac{a}{1+a}. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Die Werthe der a sind in extenso geschrieben:

$$a_1 = \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)\ldots(n-\nu+t)\cdot(m-\nu+1)\ldots(m-\nu+t)}{(\nu-1)^2(\nu-2)^2\ldots(\nu-t)^2}$$
$$\cdot\frac{\nu-t}{\nu}\cdot\frac{t+1}{\nu-t-1}$$

$$a_2 = \frac{(\nu+1)^2(\nu+2)^2+\ldots+(\nu+t-1)^2}{(n-\nu-1)(n-\nu-2)\cdots(n-\nu-t+1)\cdot(m-\nu-1)(m-\nu-2)\cdots(m-\nu-t+1)}$$
$$\cdot\frac{\nu+t}{\nu+1}\cdot\frac{t}{n-\nu-t}.$$

Diese Formeln sollen nur unter der Voraussetzung ausgerechnet werden, dass $m, n, n-\nu, m-\nu\pm t, n-\nu\pm t$ lauter sehr grosse Zahlen bedeuten. Man kann dann als Näherung die Stirling'sche Formel:

$$\Pi(p) = \sqrt{2\pi}\cdot p^{p+\frac{1}{2}}\cdot e^{-p}$$

zur Anwendung bringen.

Setzt man noch:

$$m = n\varrho,\quad t = ny,\quad \nu = n\sigma,$$

so wird für sehr grosse n und endliche ϱ, y, σ sein:

$$a_1 = \frac{y}{\sigma-y}(1-\sigma)^{ny}(\varrho-\sigma)^{ny}\left(1+\frac{y}{1-\sigma}\right)^{n(1-\sigma+y)}$$
$$\cdot\left(1+\frac{y}{\varrho-\sigma}\right)^{n(\varrho-\sigma+y)}\cdot\sigma^{-2ny}\cdot\left(1-\frac{y}{\sigma}\right)^{2n(\sigma-y)},$$

weiter ist, wenn für ν der obige Werth:

$$\nu = \frac{mn}{m+n} = \frac{\varrho n}{1+\varrho}$$

eingesetzt wird:

$$\sigma = \frac{\varrho}{1+\varrho};\quad (1-\sigma)(\varrho-\sigma) = \sigma^2.$$

Man muss weiter beachten, dass ϱ eine endliche Zahl, etwa in der Nähe von $\frac{1}{2}$ liegend, sein wird. y ist als sehr kleine

Zahl, etwa vom Range $\frac{1}{\sqrt{n}}$ anzusehen. Bildet man dann den Logarithmus von a und vernachlässigt unendlich kleine Glieder, wie $n y^3$, $n y^4$ etc., y, y^2 etc., so kann man schreiben:

$$\log a_1 = \log \frac{y}{\sigma} + \frac{1}{2} n y^2 \left(\frac{1}{1-\sigma} + \frac{1}{\varrho - \sigma} + \frac{2}{\sigma}\right)$$
$$= \log \frac{y}{\sigma} + \frac{1}{2} n y^2 \frac{(1+\varrho)^3}{\varrho^2},$$

woraus

$$n = \frac{2\varrho^2}{(1+\varrho)^3} \cdot \frac{\log\left(\frac{a_1 \varrho}{y(1+\varrho)}\right)}{y^2} \tag{9}$$

folgt.

Entwickelt man in ähnlicher Weise a_2, so erhält man zunächst mit Weglassung der augenscheinlich zu vernachlässigenden Glieder:

$$a_2 = \frac{y}{1-\sigma-y} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sigma}\right)^{2n(\sigma+y)} \cdot \left(1 - \frac{y}{1-\sigma}\right)^{n(1-\sigma-y)}$$
$$\cdot \left(1 - \frac{y}{\varrho - \sigma}\right)^{n(\varrho-\sigma-y)}$$

und weiter:

$$n = \frac{2\varrho^2}{(1+\varrho)^3} \cdot \frac{\log\left(\frac{a_2}{y(1+\varrho)}\right)^{1)}}{y^2}. \tag{10}$$

Da $m > n$ also $\varrho > 1$ vorausgesetzt worden ist, ist für n der Werth (9) als der grössere von beiden zu wählen. Wenn also n grösser als die durch (9) angegebene Zahl ist, ist jedenfalls die Wahrscheinlichkeit Ω dafür, dass die Anzahl der Zeichenwechsel zwischen den Grenzen $2(\nu - t)$ und $2(\nu + t)$

1) Das oben erwähnte Versehen bestand darin, dass der reciproke Werth des zweiten Factors auf der rechten Seite der Ausdrücke a genommen worden ist. Infolge dessen erscheint, abgesehen von fortzulassenden Gliedern in den (9) und (10) entsprechenden Formeln unter dem Logarithmus der reciproke Factor von a_1 bezw. a_2.

liegt, grösser als $\frac{a}{1+a}$. Ω kann also durch Vergrösserung von n beliebig nahe der Einheit gebracht werden. Für $m = n$, also $\varrho = 1$ wird:

$$n = \frac{1}{4y^2}\log\left(\frac{a}{2y}\right).$$

Bestimmt man n nach dieser Formel, so ist die Wahrscheinlichkeit

$$W > \frac{a}{1+a}$$

dafür, dass die Zahl der Zeichenwechsel zwischen

$$n(1-2y) \text{ und } n(1+2y)$$

liegt.

Nennt man die Anzahl der Zeichenwechsel w, die der Zeichenfolgen f, so ist:

$$f + w = m + n - 1$$

im speziellen für $m = n$:

$$f + w = 2n - 1$$

und W ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Ungleichheit:

$$\frac{1-2y}{1+2y} < \frac{w}{f} < \frac{1+2y}{1-2y}.$$

Soll z. B.:

$$\frac{49}{51} < \frac{w}{f} < \frac{51}{49}$$

und hierfür $\Omega > \frac{1000}{1001}$ sein, so ist zu setzen:

$$y = \frac{1}{100},\ a = 1000$$

und es wird $n = 2500 \log \text{nat}(50000) = 27050$. Man muss also n mindestens so gross wählen.

Die aufgestellten Grenzen sind indessen zu weit und es lässt sich bekanntlich mit Hülfe der Integralrechnung eine einfachere und engere Begrenzung vornehmen. Die Formel (3) für V_x kann man auch schreiben:

$$V_x = \frac{\Pi(m-1)\,\Pi(m)\,\Pi(n-1)\,\Pi(n)}{\Pi(m+n-1)\,\Pi(x)\,\Pi(x-1)\,\Pi(m-x)\,\Pi(n-x)}$$

und wenn man die Stirling'sche Formel anwendet für sehr grosse Werthe von m, n, x, $m-x$ und $n-x$.

$$V_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot$$

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\cdot(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot(m-1)^{m-\frac{1}{2}}}{(m+n-1)^{m+n-\frac{1}{2}}\cdot x^{x+\frac{1}{2}}\cdot(x-1)^{x-\frac{1}{2}}(n-x)^{n-x+\frac{1}{2}}(m-x)^{m-x+\frac{1}{2}}}.$$

Man entwickle nun diesen Ausdruck für Werthe von x:

$$x = \nu + a\sqrt{\nu},$$

wo a eine endliche Zahl bedeutet, die also gegen das sehr grosse ν sehr klein ist. Zunächst ergiebt sich für $\nu = \frac{m\,n}{m+n}$

$$V_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(m+n)^{\frac{3}{2}}}{m\,n}\cdot$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{1}{m+n}\right)^{m-n+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{a}{\sqrt{\nu}}\right)^{2x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a\sqrt{\nu}}{n-\nu}\right)^{n-x+\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{a\sqrt{\nu}}{m-\nu}\right)^{m-x+\frac{1}{2}}}$$

Man kann nun zu Näherungsformeln übergehen, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung überaus oft gebraucht werden. Diese beruhen darauf, dass man für sehr kleine z ansetzt:

$$(1+z)^{\nu} = e^{\nu\log(1+z)} = e^{\nu\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\right)}.$$

Nimmt man nur die grössten Glieder mit, welche diese Reihenentwicklung ergiebt, so erhält man V_x bis auf einen um so geringeren Procentsatz richtig, je grösser die Zahlen n, m, $n-\nu$, $m-\nu$, ν sind.

Es wird so:

$$V_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(m+n)^{\frac{3}{2}}}{m\,n} \cdot e^{-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{(m+n)^2}{m\,n}}.$$

Setzt man also zur Abkürzung:

$$\mu = \frac{m+n}{\sqrt{2\,m\,n}}, \tag{11}$$

so wird:

$$V_x = \frac{2\,\mu^2}{\sqrt{2\pi}\,(m+n)} \cdot e^{-a^2\mu^2}.$$

Dies ist also die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen von $2x$ oder $2x-1$ Zeichenwechseln. Nimmt x um eine Einheit zu, so ändert sich a um Δa:

$$\Delta a = \mu \sqrt{\frac{2}{m+n}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit W für das Vorkommen von Zeichenwechseln, deren Anzahl zwischen den Grenzen:

$$\frac{2\,m\,n}{m+n} \pm 2\,\gamma \sqrt{\frac{m\,n}{m+n}}$$

liegt, ist demnach:

$$W = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \sum e^{-a^2\mu^2} \cdot \Delta a,$$

wo die Summe auf alle Werthe von a auszudehnen ist, die in den Intervallen Δa aufeinander folgen und zwischen den Grenzen $\pm\gamma$ liegen. Man kann nun die Maclaurin-Euler'sche Summationsformel anwenden, wodurch sich für sehr grosse Werthe von m und n ergiebt:

$$W = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma}^{+\gamma} e^{-\mu^2 a^2} \cdot d\,a,$$

was man auch so schreiben kann:

$$W = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\mu\gamma}^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt. \tag{12}$$

W kann also durch Vergrösserung von γ beliebig nahe der Einheit gebracht werden und wird schon für nicht grosse γ äusserst nahe $= 1$. Für $m = n$ wird $\mu = \sqrt{2}$ und die Wahrscheinlichkeit W für das Vorkommen von Zeichenwechseln, deren Zahl zwischen:

$$n \pm \gamma \sqrt{n}$$

liegt, wird:

$$W = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt.$$

Soll z. B. $W = \frac{999}{1000}$ werden, so sind die Grenzen für die Anzahlen der Zeichenwechsel:

$$n \left(1 \pm \frac{2{,}33}{\sqrt{n}}\right).$$

Für das oben (S. 12) erwähnte Beispiel findet sich rund:

$$n = 13600,$$

also eine bedeutend kleinere Zahl, wie die zuerst ausgeführte Betrachtung ergab, was ja auch zu erwarten war.

2.

Es sollen nun weiter die Vorzeichen der ersten Differenzen der vorliegenden Fehlerreihe betrachtet werden, wodurch die Grösse der Fehler in gewisser Beziehung Berücksichtigung findet. Es soll also jeder Fehler von dem ihm folgenden subtrahirt und auf diese Weise das Vorzeichen der Differenz bestimmt werden. Es soll x die Anzahl der positiven Vorzeichen der Differenzenreihe bedeuten, während n Fehler vorliegen sollen; die Anzahl der negativen Vorzeichen ist dann $n - x - 1$. Ist ferner $f(x, n)$ die Anzahl der Anordnungen der gegebenen

Fehler, welche x positive Vorzeichen in der Differenzreihe ergeben, so ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereigniss:

$$\frac{f(x, n)}{\Pi(n)} \tag{1}$$

Die Funktion f kann man leicht durch eine Differenzenreihe definiren. Man sondere von den n Fehlern (1), (2) ... (n) den grössten ab und bezeichne ihn mit (n). Man bringe nun (n) an irgend eine Stelle der irgendwie angeordneten Reihe der Fehler (1) ... ($n-1$). Bringt man (n) zwischen 2 Fehler, von denen der folgende grösser ist, so wird die Anzahl der positiven Differenzen weder vermehrt, noch vermindert. Mit demselben Erfolge kann man (n) an die erste Stelle der Reihe setzen. Sind also in der Reihe (1) ... ($n-1$), x positive Differenzen vorhanden, so kann man (n) an $x+1$ Stellen unterbringen, um in der Reihe der n Fehler wieder x positive Differenzen zu bekommen. Die Anzahl der ersteren möglichen Anordnungen ist aber $f(x, n-1)$ und es entstehen demnach auf die erwähnte Weise $(x+1) f(x, n-1)$ neue Anordnungen. In der Reihe (1) ... ($n-1$) sollen $x-1$ positive, also $n-1-x$ negative Differenzen vorkommen. Setzt man den Fehler an diese Stellen oder auch an das Ende der Reihe, so wird jedesmal die Anzahl der positiven Differenzen um eine Einheit vergrössert, sie wird also $= x$. Dies kann daher $(n-x) f(x-1, n-1)$ mal geschehen. Jetzt sind aber alle Möglichkeiten, das Element n in die Reihe (1) ... ($n-1$) einzuordnen erschöpft und es ergiebt sich also:

$$f(x, n) = (x+1) f(x, n-1) + (n-x) f(x-1, n-1). \tag{2}$$

Durch diese Differenzengleichung ist $f(x, n)$ vollkommen bestimmt, wenn man noch die sich sofort darbietenden speciellen Werthe:

$$f(0, n) = 1, \quad f(n-1, n) = 1, \quad f(n, n) = 0 \tag{3}$$

hinzufügt. Zur Controle kann noch die Gleichung:

$$\sum_{x=0}^{x=n-1} f(x, n) = \Pi(n) \tag{4}$$

benutzt werden.

Die Integration von (2) macht keine Schwierigkeit, wenn man nach und nach für $x = 1, 2$ etc. die Werthe von $f(x, n)$ aufsucht, Man hat hierbei, wenn man von den Bedingungen (3) ausgeht, geometrische Progressionen und Reihen, die aus ihnen durch Differentiationen ableitbar sind, zu summiren. Auf diese Weise findet man:

$$f(0, n) = 1$$
$$f(1, n) = 2^n - (n+1)$$
$$f(2, n) = 3^n - (n+1) \cdot 2^n + \frac{\overline{n+1} \cdot n}{1 \cdot 2}$$
$$f(3, n) = 4^n - (n+1) \cdot 3^n + \frac{\overline{n+1} \cdot n}{2} \cdot 2^n - \frac{\overline{n+1} \cdot n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

. . . .

Der Fortgang ist ersichtlich und man wird demnach ansetzen:

$$f(x, n) = \sum_{\mu=0}^{\mu=x} (-1)^\mu \binom{n+1}{\mu} (x+1-\mu)^n. \tag{5}$$

In der That genügt dieses f der Gleichung (2), da man diese so schreiben kann:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=x} (-1)^\mu \binom{n+1}{\mu} (x+1-\mu)^n =$$
$$\sum_{\mu=0}^{\mu=x} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (x+1)(x+1-\mu)^{n-1} + \sum_{\mu=0}^{\mu=x-1} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n-x)(x-\mu)^{n-1}.$$

Transformirt man die zweite Summe rechts dadurch, dass man $\mu' = \mu - 1$ als Summationsindex einführt, so ergiebt sich unmittelbar die Identität der beiden Seiten der Gleichung.

Man überzeugt sich ferner leicht, dass (5) den Bedingungen (3) und (4) genügt. Betrachtet man den Ausdruck:

$$F_x = \sum_{\mu=0}^{\mu=n+1} (-1)^\mu \binom{n+1}{\mu} (x+1-\mu)^n,$$

so kann man leicht zeigen, dass:

$$F_x = 0.$$

In der That kann man F_x erhalten, wenn man in:

$$\frac{d^n}{d\,\xi^n}\left\{e^{(x+1)\xi}\left(1-e^{-\mu\xi}\right)^{n+1}\right\}$$

nach der Differentiation $\xi = 0$ setzt. Da aber alle Glieder der ausgeführton Endformel $(1 - e^{-\mu\xi})^\nu$ als Factor enthalten müssen, wo $\nu \geqq 1$, so werden alle Glieder schliesslich Null. Jetzt ergiebt sich sofort:

$$f(n, n) = F_n = 0.$$

Ebenso kann man zeigen, dass:

$$f(n-1-x, n) = f(x, n),$$

denn durch Einführung des Summationsindex $\mu' = n + 1 - \mu$ statt μ in die Formel (5), wenn man hier $n - 1 - x$ statt x einsetzt, ergiebt sich ohne Weiteres:

$$f(n-1-x, n) = -F_x + f(x, n) = f(x, n).$$

Zum Beweise von (4) setzt man:

$$S_y = 1^n + 2^n + \ldots + y^n.$$

Dann wird:

$$\sum_{x=0}^{x=n-1} f(x, n) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (-1)^\nu \cdot \binom{n+1}{\nu} S_{n-\nu}$$

und wenn man die bekannte Formel benutzt:

$$S_n = \frac{d^n}{d\,\xi^n}\left(\frac{e^{(p+1)\xi}-1}{e^\xi - 1}\right) \text{ für } \xi = 0,$$

so ergiebt sich leicht:

$$\sum_{x=0}^{x=n-1} f(x, n) = \frac{d^n}{d\,\xi^n}\left(e^\xi - 1\right)^n = \Pi(n).$$

Auch bei der vorliegenden Aufgabe wird es von wesentlichem Interesse sein, den Verlauf von $\varphi(x, n) = \frac{f(x, n)}{\Pi(n)}$, für sehr grosse n kennen zu lernen und insbesondere für solche Werthe von x, welche in der Nähe von $x = \frac{n}{2}$ liegen, da hier $\varphi(x, n)$, wie man leicht sieht, einen Maximalwerth erreicht, von welchem ab es nach beiden Seiten zuerst langsamer, dann schneller abnimmt. Dies ist mit der Form (5) nicht gut zu erreichen, während eine andere Darstellung leicht zum Ziele führt. Ausdrücke von der Form (5) treten schon in den Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen von Moivre auf. Laplace hat diese in der „théorie analytique" weiter behandelt und ist auf eine Integraldarstellung gekommen, die hier direct zu benutzen ist. Die Methoden von Laplace lassen indessen an Strenge, wie bekannt, viel zu wünschen übrig. Seine Resultate aber wurden in einwurfsfreier Weise durch Cauchy[1]) neu abgeleitet. Danach ist:

$$\varphi(x, n) = \frac{f(x, n)}{\Pi(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{n+1} \cos(2x + 1 - n) z\, dz. \quad (6)$$

Die Verification dieser Formel ist leicht. Durch theilweise Integration findet man sofort:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x, n) = -\int_0^\infty z\, dz \left\{(n + 1)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^n \left[\frac{\cos z}{z} - \frac{\sin z}{z^2}\right] \cdot \right.$$

$$\left. \cos(2x + 1 - n) z - \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{n+1} \cdot (2x + 1 - n) \sin(2x + 1 - n) z \right\}.$$

Man kann dies auch schreiben:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x, n) = (n + 1)\frac{\pi}{2} \cdot \varphi(x, n) +$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin z}{z}\right)^n dz \left[(x - n)\cos(2x - n) z - (x + 1)\cos(2x + 2 - n) z\right]$$

---

[1]) Mémoire sur diverses formules relatives à la theorie des integrales définies. Journal de l'école polytechnique, cah. 28.

oder:

$$n\,\varphi(x, n) = (x + 1)\,\varphi(x, n - 1) + (n - x)\,\varphi(x - 1, n - 1),$$

und dieser Gleichung hat nach (5) in der That $\varphi(x, n)$ zu genügen.

Ferner sieht man augenblicklich, dass

$$\varphi(n - 1 - x, n) = \varphi(x, n),$$

während

$$\frac{\pi}{2}\,\varphi(n - 1, n) = \frac{\pi}{2\,\Pi(n)} = \int_0^\infty \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{n+1} \cos(n - 1)\,z\,dz$$

und

$$\frac{\pi}{2}\,\varphi(n, n) = 0 = \int_0^\infty \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{n+1} \cos(n + 1)\,z\,dz$$

bekannte Integralformeln darstellen.

Die Formel (6) ist nun sehr geeignet, um für sehr grosse n Näherungsausdrücke für $\varphi(x, n)$ zu gewinnen. Man sieht sofort, dass für sehr grosse n nur die kleinen Werthe von z nennenswerthe Beiträge zu dem Integrale (6) liefern können. Es liegt deshalb nahe

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{6}$$

und

$$\frac{\sin z}{z} = e^{\log\left(\frac{\sin z}{z}\right)} = e^{-\frac{z^2}{6}}$$

zu setzen. Nennt man noch der Kürze wegen $c = 2x + 1 - n$, so wird dann:

$$\varphi(x, n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{n z^2}{6}} \cos c x \cdot dx$$

und nach einer bekannten Integralformel:

$$\varphi(x, n) = \sqrt{\frac{6}{n\pi}}\, e^{-\frac{3}{2}\frac{c^2}{n}}.$$

Nimmt man weiter an:

$$x = \frac{n}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{n}, \tag{7}$$

wobei a eine endliche, also gegen n sehr kleine Zahl ist, so ergiebt sich

$$\varphi(x, n) = \sqrt{\frac{6}{\pi n}}\, e^{-\frac{3}{2}a^2}. \tag{8}$$

Die Richtigkeit der eben ausgeführten Rechnung ist natürlich nicht strenge begründet. In dieser Beziehung kann aber auf die citirte Cauchy'sche Abhandlung verwiesen werden.

Jetzt kann leicht die Wahrscheinlichkeit W (ganz ähnlich wie in § 1) dafür, dass x zwischen den Grenzen

$$\frac{n}{2} \pm \frac{\gamma}{2}\sqrt{n}$$

liegt, angegeben werden. Man findet:

$$W = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot \int_0^{\gamma} e^{-\frac{3}{2}a^2}\, da = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt. \tag{9}$$

Es kann also wieder durch Vergrösserung von γ, W beliebig nahe der Einheit gebracht werden und schon, wenn γ einige Einheiten beträgt, ist W bis auf viele Stellen gleich 1.

Man kann auch sagen: bei einer grossen Anzahl von Fehlern ist mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit das Verhältniss der Anzahlen der positiven zu der Anzahl der negativen Vorzeichen in der ersten Differenzreihe nahezu gleich 1, wenn eine zufällige Vertheilung der Fehler angenommen werden darf.