Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVII. Jahrgang 1897.

München.

Verlag der k. Akademie.

1898.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber zwei Abel'sche Sätze, die Stetigkeit von Reihensummen betreffend.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 10. Juli.*)

In seiner berühmten Abhandlung über die binomische Reihe hat Abel zwei wesentlich verschiedene, auf die Stetigkeit einer Potenzreihe bezügliche Sätze abgeleitet.[1]) In dem ersten[2]) dieser Sätze wird die Stetigkeit der Summe $S(x) = \sum_{0}^{\infty} \nu \, a_\nu x^\nu$ als Function von x erwiesen; bei dem zweiten[3]) treten an die Stelle der constanten Coefficienten a_ν stetige Functionen einer reellen Veränderlichen y, und es handelt sich um die Stetigkeit einer Reihensumme von der Form $S(x, y) = \sum_{0}^{\infty} \nu \, f_\nu(y) \cdot x^\nu$ bei constantem x und veränderlichem y.

Zweck der folgenden Mittheilung ist es, zunächst an den ersten dieser Sätze einige historische Bemerkungen zu knüpfen und hierauf eine von Herrn Stolz herrührende Verallgemeinerung desselben etwas anders zu formuliren und elementarer zu beweisen. Sodann sollen die gegen den zweiten Satz erhobenen Einwendungen, welche in Wahrheit nicht die Gültigkeit des Satzes selbst, sondern nur diejenige des Abel'schen

---

1) Crelle's Journal, Bd. I, S. 314, 315. — Oeuvres compl., Éd. Sylow et Lie, T. I p. 223, 224.

2) a. a. O. Lehrsatz IV.

3) a. a. O. Lehrsatz V.

Beweises in Frage stellen, sowie die zu seiner Rettung vorgeschlagenen Modificationen besprochen und durch den Nachweis ergänzt werden, dass der fragliche Satz in der von Abel gegebenen Fassung wirklich unrichtig ist.

1.

Der erste der genannten Sätze sagt aus, dass die für irgend einen positiven Werth $x = X$ als convergent vorausgesetzte Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu x^\nu$ für jeden kleineren positiven Werth x gleichfalls convergirt, und dass sodann ihre Summe $S(x)$ für $x \leqq X$ eine stetige Function von x darstellt.

Was den von Abel gelieferten Beweis besonders auszeichnet, ist der Umstand, dass dabei keineswegs die absolute Convergenz der Reihe für $x = X$ vorausgesetzt, noch von der für $x < X$ sicher vorhandenen absoluten Convergenz Gebrauch gemacht wird. Der Kern des Beweises besteht vielmehr darin, dass — nach heutiger Ausdrucksweise — die gleichmässige Convergenz der Reihe für das Intervall $0 \leqq x \leqq X$ (also insbesondere mit Einschluss der Grenze X) dargethan wird, sofern nur $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu X^\nu$ überhaupt (d. h. eventuell auch nur bedingt) convergirt.

Es mag uns heutzutage, wo der Begriff der gleichmässigen Convergenz ein allgemein geläufiger Elementar-Begriff geworden ist, kaum erklärlich erscheinen, dass dieser von Abel schon im Jahre 1827 publicirte, äusserst einfache und völlig einwurfsfreie Beweis lange Zeit überhaupt nicht verstanden oder doch schwer verständlich befunden wurde, und dass noch im Jahre 1862 ein so scharfsinniger Mathematiker wie Lionville ausdrücklich erklärt hat:[1]) er finde den fraglichen Beweis „schwer auseinanderzusetzen und sogar schwer zu verstehen,“ weshalb er Dirichlet zur Abfassung

---

[1]) Journal des Math., 2ième Série, T. 7, p. 253.

eines anderen Beweises veranlasst habe. In Wahrheit ist aber dieser an der betreffenden Stelle mitgetheilte Dirichlet'sche Beweis nicht nur merklich complicirter als der Abel'sche, sondern auch viel weniger geeignet, die wahre Grundlage der Stetigkeit einer Potenzreihe deutlich hervortreten zu lassen. Und ich kann es mir lediglich aus einem förmlichen Aberglauben gegen den Abel'schen Beweis erklären, dass man an dessen Stelle auch in manchen neueren, schon dem Zeitalter der gleichmässigen Convergenz angehörigen Lehrbüchern[1]) den schwierigeren und weniger prägnanten Dirichlet'schen Beweis findet.

Will man sich ein Bild davon machen, welch' mangelhaftes Verständniss die Abel'sche Abhandlung über die Binominialreihe und insbesondere seine Stetigkeits-Sätze noch bis in die Mitte des Jahrhunderts gefunden haben, so lese man die zum Theil geradezu absurden Einwendungen, welche Björling in seinen „Doctrinae serierum infinitarum exercitationes"[2]) dagegen erhoben hat.[3]) Ohne auf dieselben im einzelnen einzugehen, möchte ich wenigstens einen Punkt hier hervorheben. Bekanntlich ist Abel zur Aufstellung seiner Stetigkeitssätze für die specielle Classe der Potenzreihen durch die Erkenntniss veranlasst worden, dass der von Cauchy (Anal. algébr. p. 131) ausgesprochene allgemeine Stetigkeits-Satz nicht haltbar sei, wie das Beispiel der Reihe $\sum_1^\infty \nu\, (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \sin \nu x$ beweise.[4]) Dem gegenüber erhält Björling den Cauchy'schen Stetigkeits-Satz vollkommen aufrecht,[5]) und glaubt Ausnahmefälle, wie den eben genannten, durch Aufstellung des folgenden Principes erledigen zu können:

---

[1]) z. B. Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, 2ième éd. 1875, p. 86.. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Functionen, 1880. S. 48.

[2]) Nova Acta Upsal. T. XIII (1847).

[3]) a. a. O. S. 62. 66. 156.

[4]) s. Fussnote zu Lehrsatz V. a. a. O. S. 316 bezw. 224.

[5]) a. a. O. S. 63.

Wenn eine Reihe $\sum f_\nu(x)$ auch für einen gewissen Werth X und für jeden einzelnen Werth $x < X$ convergirt, so folge daraus noch keineswegs, dass sie auch in unendlicher Nähe der Stelle X convergiren müsse (!). Gerade aus der Unstetigkeit der oben genannten Reihe für $x = 0$ gehe aber unzweideutig hervor, dass dieselbe in unendlicher Nähe von $x = 0$ nicht mehr convergire, da für eine in irgend einem Intervalle wirklich „in einem Zuge" d. h. ausnahmslos convergirende Reihe *(series uno tenore convergens)* die Gültigkeit des Cauchy'schen Stetigkeits-Satzes ausser Frage stehe. Selbstverständlich beruht dieser Fehlschluss (genau wie bei Cauchy) auf der Supposition, dass eine in irgend einem Intervalle ausnahmslos convergirende Reihe eo ipso jene Eigenschaft besitzen müsse, die wir heute als gleichmässige Convergenz bezeichnen, während auf der anderen Seite das (von Björling völlig unverstandene) Verdienst Abel's gerade darin besteht, dass er für die specielle Classe der Potenzreihen die Existenz dieser Eigenschaft wirklich bewiesen hat. —

Der in Rede stehende Abel'sche Satz lässt sich bekanntlich ohne weiteres auf den Fall einer complexen Veränderlichen x in der Weise übertragen,[1]) dass daraus die Stetigkeit der Reihensumme bezw. die gleichmässige Convergenz der Reihe hervorgeht für alle Stellen x irgend eines Radius $\overline{0X}$, mit Einschluss des Peripherie-Punktes X (natürlich wieder unter der Voraussetzung, dass für $x = X$ die Convergenz der Reihe feststeht). Herr Stolz hat sodann diesen Satz durch Hinzufügung des Nachweises erweitert, dass die gleichmässige Convergenz erhalten bleibt für alle Stellen eines Strahles $\overline{x_0 X}$, falls x_0 einen beliebigen Punkt im Innern des Convergenz-Kreises bedeutet.[2])

Da der Beweis des Herrn Stolz die Darstellung der complexen Zahlen durch trigonometrische Functionen erfordert,

---

[1]) s. z. B. Briot et Bouquet a. a. O.

[2]) Zeitschr. f. Math. Bd. XX, S. 370. — Bd. XXIX, S. 127. — Vorles. über allg. Arithmetik, Bd. II, S. 157.

und es mir andererseits wünschenswerth erscheint, derartige den Elementen der Functionenlehre angehörige Sätze nach dem Vorgange von Weierstrass, soweit als möglich, ohne Anwendung dieses transscendenten Hülfsmittels zu begründen, so möchte ich mir erlauben, einen rein elementaren Beweis des betreffenden Satzes hier mitzutheilen. Dabei halte ich es für zweckmässig, dem letzteren die folgende Fassung zu geben:

Convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für irgend einen Peripherie-Punkt X ihres Convergenz-Kreises, so convergirt sie **gleichmässig** für alle Stellen x im Innern und auf der Begrenzung jedes Dreiecks $x_0 X x_1$, wo x_0, x_1 zwei beliebige Punkte im Innern des Convergenz-Kreises bedeuten.

Um den Beweis des Satzes etwas zu vereinfachen, bemerke man, dass durch die Substitution:

$$(1) \qquad x = X \cdot x' \quad \left(\text{also: } x' = \frac{x}{X},\ x'_{x=X} = 1\right)$$

die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ in eine solche von der Form: $\sum (a_\nu X^\nu) \cdot x'^\nu = \sum a'_\nu \cdot x'^\nu$ übergeht, welche den Convergenz-Radius 1 besitzt und für die Stelle $x = 1$ noch convergirt. Da sodann vermöge der linearen Relation (1) jeder im Innern des ursprünglichen Kreises verlaufenden Geraden $\overline{xX}$ eine im Innern des Einheitskreises verlaufende Gerade $\overline{x'1}$ entspricht und umgekehrt, so genügt es offenbar, statt des oben ausgesprochenen Satzes den folgenden zu beweisen:

Ist die Reihe $\sum a_\nu$ convergent (wenn auch nur **bedingt**), so convergirt $\sum a_\nu x^\nu$ **gleichmässig** für alle Stellen x im Innern und auf der Begrenzung jedes Dreiecks $x_0 1 x_1$, wo: $|x_0| < 1$, $|x_1| < 1$.

Beweis. Zieht man vom Punkte E, welcher den Werth $x = 1$ repräsentiren soll, eine beliebige Sehne $\overline{EB}$ und fällt von B ein Loth $\overline{BA}$ auf die reelle Axe $\overline{OE}$, so mag gesetzt werden:

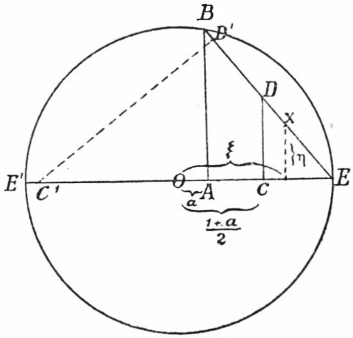
$$(2) \qquad \overline{OA} = a, \quad \text{also: } \overline{BA} = \sqrt{1 - a^2}.$$

Die Coordinaten ξ, η eines jeden auf $\overline{EB}$ gelegenen Punktes $x = \xi + \eta i$ genügen alsdann der Bedingung:

$$\frac{\eta}{1-\xi} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a} = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$$

sodass also:

$$(3) \qquad \eta = p \cdot (1-\xi), \quad \text{wo: } p = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$



Bezeichnet also ϑ eine dem Intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehörige Zahl, so werden die beiden Beziehungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} a \leqq \xi \leqq 1 \\ \eta = \vartheta \cdot p \cdot (1-\xi) \end{cases}$$

die Coordinaten aller möglichen Punkte $x = \xi + \eta i$ definiren, welche der Begrenzung oder dem Innern des Dreiecks BAE angehören.

Es werde nun vorläufig ξ noch in der Weise eingeschränkt, dass:

$$(5) \qquad \xi \geqq \frac{1+a}{2} \; (= \overline{OC})$$

und daher:

$$(6) \qquad 1 - \xi \leqq \frac{1-a}{2}, \quad 1 + \xi \geqq \frac{3+a}{2}.$$

Dann soll zunächst bewiesen werden, dass $\sum a_\nu x^\nu$ für alle Stellen des in der Figur mit DCE bezeichneten rechtwinkligen

Dreiecks einschliesslich der Begrenzung gleichmässig convergirt.

In Folge der Convergenz von $\sum a_\nu$ lässt sich einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n so zuordnen, dass:

$$(7) \qquad \left| R_n^{(n+k)} \right| = \left| \sum_n^{n+k} {}^\nu\, a_\nu \right| < \varepsilon \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Andererseits findet man mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$\sum_n^{n+k} {}^\nu\, a_\nu x^\nu = \sum_n^{n+k-1} {}^\nu\, R_n^{(\nu)} (x^\nu - x^{\nu+1}) + R_n^{(n+k)} \cdot x^{n+k}$$

$$= x^n (1-x) \left\{ \sum_0^{k-1} {}^\nu\, R_n^{(n+\nu)} \cdot x^\nu + R_n^{(n+k)} \cdot \frac{x^k}{1-x} \right\}$$

und daher mit Berücksichtigung von Ungl. (7):

$$\left| \sum_n^{n+k} {}^\nu\, a_\nu x^\nu \right| < \varepsilon \cdot |x|^n \cdot |1-x| \cdot \left\{ \frac{1-|x|^k}{1-|x|} + \frac{|x|^k}{|1-x|} \right\}.$$

Da aber $|x| \leqq 1$ und: $|1-x| \geqq |1-|x|| = 1-|x|$, so kann man im Nenner des letzten Gliedes $|1-x|$ durch $1-|x|$ ersetzen, sodass sich ergiebt:

$$(8) \qquad \left| \sum_n^{n+k} {}^\nu\, a_\nu x^\nu \right| < \varepsilon \cdot \frac{|1-x|}{1-|x|}$$

Man hat aber, wenn $x = \xi + \eta i$ dem oben bezeichneten Bereiche angehört, mit Benützung der Beziehungen (3), (4) und (6):

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} = (1+|x|) \cdot \frac{|1-x|}{1-|x|^2} \leqq 2 \cdot \frac{\sqrt{(1-\xi)^2+\eta^2}}{1-(\xi^2+\eta^2)}$$

$$\leqq 2 \cdot \frac{(1-\xi)\cdot\sqrt{1+\vartheta^2 p^2}}{1-\xi^2-\vartheta^2 p^2 (1-\xi)^2} \quad \text{(s. Gl. (4))}$$

$$\leqq 2 \cdot \frac{\sqrt{1+p^2}}{1+\xi-p^2(1-\xi)}$$

$$\leqq 2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{1-a}}}{\frac{3+a}{2} - \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{1-a}{2}} \quad \text{(s. Gl. (3), Ungl. (6)).}$$

$$< \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1-a}},$$

sodass Ungl. (8) schliesslich in die folgende übergeht:

$$(9) \qquad \left| \sum_{n}^{n+k} {}_{\nu} \, a_\nu x^\nu \right| < \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1-a}} \cdot \varepsilon \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

gültig für jeden *Werth* x, welcher der Begrenzung oder dem Innern des Dreiecks DCE angehört: die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ convergirt also für diesen Bereich gleichmässig. Da sie im übrigen für jeden einschliesslich seiner Grenze ganz innerhalb des Einheitskreises gelegenen Bereich eo ipso (absolut und) gleichmässig convergirt, so folgt ohne weiteres die Gleichmässigkeit der Convergenz auch für jedes Dreieck, das aus DCE durch passende Verschiebung der Eckpunkte C, D (z. B. bis nach C', D') entsteht. Und da die analoge Beweisführung auch für jedes Dreieck gilt, dessen Spitze dem unteren Halbkreise angehört (während die Grundlinie wieder einen Theil des Diameters EE' bildet), so ergiebt sich schliesslich die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes in dem ursprünglich behaupteten Umfange. —

Als Folgerungen des eben bewiesenen Satzes ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

Convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für die Stelle X auf dem Convergenz-Kreise, so convergirt sie **gleichmässig** auf jedem innerhalb des Kreises verlaufenden Curvenstücke $\widehat{x_0 X}$, welches den Convergenz-Kreis **nicht tangirt.**[1])

---

1) Picard, Traité d'Analyse, T. II, p. 73. Der dort gegebene Beweis stimmt mit demjenigen des Herrn Stolz überein.

Convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für alle Stellen, welche einen zusammenhängenden Bogen des Convergenz-Kreises ausmachen, so convergirt sie **gleichmässig** auf jeder gebrochenen Linie, die sich der inneren Seite dieses Bogens beliebig nahe anschmiegt.

Dagegen scheint es nicht möglich zu sein, auf diesem Wege irgend etwas bestimmtes über die Gleichmässigkeit oder Ungleichmässigkeit der Convergenz auf dem Kreisbogen selbst auszusagen: man ist in dieser Hinsicht auf diejenigen Hülfsmittel angewiesen, welche durch die Integral-Darstellung der Reihen-Coefficienten geliefert werden.

2.

Der zweite der Abel'schen Sätze würde mit Anwendung der in der Einleitung dieses Aufsatzes gebrauchten Bezeichnungen folgendermaassen lauten:

Sind die Functionen $f_\nu(y)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ stetig für $a \leqq y \leqq b$ und convergirt die Reihe

$$S(x, y) = \sum_0^\infty {}_\nu\, f_\nu(y) \cdot x^\nu$$

für einen gewissen Werth $x = X > 0$ und $a \leqq y \leqq b$, so ist dieselbe auch convergent für jedes positive $x < X$, $a \leqq y \leqq b$ und ihre Summe stellt eine in diesem Intervalle stetige Function von y dar.

Der betreffende Beweis beruht auf der Anwendung der Ungleichung:

$$(10) \quad \left| \sum_n^\infty {}_\nu\, f_\nu(y) \cdot x^\nu \right| = \left| \sum_n^\infty {}_\nu \left(\frac{x}{X}\right)^\nu \cdot f_\nu(y)\, X^\nu \right| < \left(\frac{x}{X}\right)^n \cdot F(X, y),$$

wo $F(X, y)$ die obere Grenze der Werthe:

$$|f_n(y) \cdot X^n|, \; |f_n(y) \cdot X^n + f_{n+1}(y) \cdot X^{n+1}|,$$
$$|f_n(y)\, X^n + f_{n+1}(y)\, X^{n+1} + f_{n+2}(y) \cdot X^{n+2}|, \ldots$$

bedeutet. Nun ist eine bestimmte obere Grenze dieser Ausdrücke wegen der vorausgesetzten Convergenz von $\sum_0^\infty {}^\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu$ zwar für jedes einzelne y des Intervalls $a \leqq y \leqq b$, aber bei veränderlichem y nicht nothwendig für die Gesammtheit dieser y vorhanden. Der Beweis ist also unzulänglich und wird nur dann vollständig, wenn man die Forderung, dass $\left|\sum_n^{n+\varrho} {}^\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu\right|$ für $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$ und alle y des Intervalls $a \leqq y \leqq b$ stets unter einer festen positiven Zahl bleiben soll, ausdrücklich in die Voraussetzung aufnimmt. Hierzu ist hinreichend[1]) (aber keineswegs nothwendig[2])), wenn die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu$ als gleichmässig convergent für $a \leqq y \leqq b$ vorausgesetzt wird.

Man kann aber vermöge einer einfachen Modification des Beweises diese Einschränkung auch durch die folgende, offenbar geringere ersetzen, dass die einzelne Terme $f_\nu(y)\cdot X^\nu$ für alle y des Intervalls $a \leqq y \leqq b$ numerisch unter einer festen positiven Zahl G bleiben. Man hat dann nur, wie Herr Sylow in einer Note zu dem fraglichen Satz bemerkt hat,[3]) statt von der Beziehung (10), von der folgenden auszugehen:

$$(11)\quad \left|\sum_n^\infty {}^\nu f_\nu(y)\cdot x^\nu\right| \leqq \sum_n^\infty {}^\nu \left|f_\nu(y)\cdot X^\nu\right| \cdot \left(\frac{x}{X}\right)^\nu < \left(\frac{x}{X}\right)^n \cdot G \cdot \frac{X}{X-x},$$

um zu erkennen, dass dieser Ausdruck für alle in Betracht kommenden Werthe von y lediglich durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann.

Ich möchte dem hinzufügen, dass sich dieses Resultat noch in folgender Weise verallgemeinern lässt. Erstens braucht

---

[1]) Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. I, S. 342, Note 29.

[2]) Auch bei einer ungleichmässig convergirenden Reihe können ja die Reste immerhin durchweg numerisch unter einer festen positiven Zahl bleiben.

[3]) Abel, Oeuvres compl., T. II, p. 303.

man, wie Ungl. (11) lehrt, die Convergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu$ überhaupt garnicht vorauszusetzen, es genügt schon die blosse Endlichkeit der Terme $f_\nu(y)\cdot X^\nu$. Zweitens erscheint es aber sogar für die Gültigkeit des Satzes schon hinreichend, wenn nur $|\nu^{-p}\cdot f_\nu(y)\cdot X^\nu|$ für eine beliebig gross anzunehmende positive Zahl p unter einer endlichen Grenze bleibt. Denn man kann alsdann die Ungl. (11) durch die folgende ersetzen:

$$(12)\qquad \left|\sum_n^\infty{}^\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu\right| \leqq \sum_n^\infty{}^\nu \left|\nu^{-p}\cdot f_\nu(y)\cdot X^\nu\right|\cdot \nu^p\cdot\left(\frac{x}{X}\right)^\nu$$
$$< n^p\cdot\left(\frac{x}{X}\right)^n\cdot G\cdot\sum_0^\infty{}^\nu (\nu+1)^p\cdot\left(\frac{x}{X}\right)^\nu.$$

Dabei besitzt offenbar der letzte Factor (als Summe einer convergenten Reihe) einen bestimmten endlichen Werth, während $n^p\cdot\left(\frac{x}{X}\right)^n$ durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann. Man kann also den fraglichen Satz schliesslich durch den folgenden ersetzen:

Bleiben für irgend einen positiven Werth X und für alle dem Intervalle $a\leqq y\leqq b$ angehörigen Werthe y, nach Annahme einer beliebig grossen positiven Zahl p, die Terme $|\nu^{-p}\cdot f_\nu(y)\cdot X^\nu|$ unter einer festen positiven Zahl, so convergirt die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu f_\nu(y)\cdot x^\nu$ für jedes x, dessen absoluter Betrag unter X liegt; und ihre Summe ist im Intervalle $a\leqq y\leqq b$ eine stetige Function von y, wenn die einzelnen $f_\nu(y)$ für jeden endlichen Werth ν diese Eigenschaft besitzen.[1])

Diese Fassung des Satzes zeigt, dass im Falle $X\leqq 1$ ein Unendlichwerden von $\lim_{\nu=\infty} f_\nu(y)$ für gewisse oder auch alle

---

[1]) Der Satz in dieser Form gilt offenbar auch ohne weiteres für complexe Werthe von x und y: man hat nur an die Stelle des Intervalls (a, b) einen irgendwie begrenzten Bruch T zu setzen.

möglichen Werthe von y keinesfalls auszuschliessen ist: die Convergenz der geometrischen Progression x^ν ($|x| < 1$) ist eben eine so überaus starke, dass durch sie ein solches Unendlichwerden von $\lim_{\nu=\infty} f_\nu(y)$ vollständig paralysirt wird.

Hiernach erscheint es aber keineswegs ganz unwahrscheinlich, dass bei der ursprünglichen (Abel'schen) Formulirung des fraglichen Satzes, wobei die Convergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(y) \cdot X^\nu$ (für $a \leq y \leq b$) zur Voraussetzung diente, eine etwaige Ungleichmässigkeit dieser Convergenz durch Verwandlung von X in einen numerisch kleineren Werth x gleichfalls allemal aufgehoben werden könnte. Mit anderen Worten, es wäre sehr wohl denkbar, dass trotz der Unzulänglichkeit des Abel'schen Beweises der betreffende Satz an sich vollkommen richtig sein könnte. Da es mir von Interesse zu sein schien, hierüber ausreichende Klarheit zu gewinnen, so habe ich das folgende Beispiel construirt, aus welchem in der That schliesslich die Unhaltbarkeit des Satzes in der von Abel gewählten zu allgemeinen Fassung hervorgeht.

Es bedeute m_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine unbegrenzte Folge positiver Zahlen, welche mit ν monoton zunehmen und so in's Unendliche wachsen, dass:

$$(13) \qquad \lim \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty,$$

und es werde speciell:

$$(14) \qquad m_0 = 0$$

angenommen (Beispiele: $m_\nu = \nu \cdot e^{\nu^2}$, $e^{\nu^2} - 1$, $\nu^{\nu+1}$, $(\lg \nu + 1)^{\nu+1}$). Setzt man sodann:

$$(15) \qquad f_\nu(y) = \frac{m_{\nu+1}\, y^2}{m_{\nu+1}\, y^2 + 1} - \frac{m_\nu\, y^2}{m_\nu\, y^2 + 1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$= \frac{(m_{\nu+1} - m_\nu)\, y^2}{m_{\nu+1} \cdot m_\nu \cdot y^4 + (m_{\nu+1} + m_\nu)\, y^2 + 1},$$

so erkennt man zunächst, dass die Reihe:

(16) $$S(x, y) = \sum_0^\infty {}^\nu f_\nu(y) \cdot x^{2\nu}$$

für jedes reelle y und jedes endliche x convergirt. Bringt man nämlich das allgemeine Glied dieser Reihe auf die Form:

(17) $$f_\nu(y) \cdot x^{2\nu} = \frac{\left(1 - \frac{m_\nu}{m_{\nu+1}}\right) \cdot y^2}{y^4 + \left(\frac{1}{m_{\nu+1}} + \frac{1}{m_\nu}\right) + \frac{1}{m_{\nu+1} \cdot m_\nu}} \cdot \frac{x^{2\nu}}{m_\nu},$$

so bildet der zweite Factor (wegen: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty$) das allgemeine Glied einer beständig convergirenden Potenzreihe in x, während der erste für $y = 0$ durchweg verschwindet, für $|y| > 0$ bei jedem endlichen Werthe von ν einen bestimmten endlichen Werth, für $\lim \nu = \infty$ den Grenzwerth $\frac{1}{y^2}$ besitzt.

Zugleich sind die $f_\nu(y)$ für jeden bestimmten Werth ν stetige Functionen von y im Intervalle $-\infty \leqq y \leqq +\infty$.[1])

Nichtsdestoweniger ist die Summe $S(x, y)$ für $y = 0$ unstetig, sobald x eine reelle Zahl bedeutet, deren absoluter Betrag $\geqq 1$ ist. Man hat nämlich für jeden endlichen Werth von x einerseits:

(18) $$S(x, 0) = 0.$$

Andererseits ergiebt sich, wenn man zunächst $x = \pm 1$ setzt:

(19) $$S_n(\pm 1, y) = \sum_0^n {}^\nu \left\{ \frac{m_{\nu+1} y^2}{m_{\nu+1} y^2 + 1} - \frac{m_\nu y^2}{m_\nu y^2 + 1} \right\}$$
$$= \frac{m_{n+1} y^2}{m_{n+1} y^2 + 1},$$

also:

(20) $$S(\pm 1, y) = \lim_{n=\infty} S_n(\pm 1, y) = 1 \quad (\text{für } |y| > 0).$$

[1]) Dies gilt sogar auch noch für $\lim \nu = \infty$, da $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(y) = 0$.

Nimmt man jetzt $|x| > 1$, so wird, da die $f_\nu(y)$ durchweg positiv sind:

$$(21) \qquad S(x, y) > S(1, y) \text{ d. h. } > 1,$$

und man erkennt somit durch Vergleichung der Resultate (20), (21) mit Gl. (18), dass $S(x, y)$ an der Stelle $y = 0$ unstetig ist, sobald man x einen beliebigen Werth $\geqq 1$ bezw. $\leqq -1$ beilegt.

Für $|x| < 1$ bleibt, beiläufig bemerkt, die Gleichmässigkeit der Convergenz und somit die Stetigkeit der Reihensumme $S(x, y)$ auch an der Stelle $y = 0$ erhalten. Denn die $f_\nu(y)$ bleiben für jeden Werth von ν und y numerisch kleiner als 1, es tritt also hier der oben ausgesprochene, modificirte Abel'sche Satz ohne weiteres in Kraft.

Nachtrag zu dem Aufsatze:

„Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz-Grenze etc.“

S.-B. p. 303—334.

Um bezüglich der auf S. 332 gemachten Bemerkung, dass die Bedingung:

$$(1) \qquad U_{m+\varrho} - U_m < \varepsilon \quad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots)$$

stets die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes $\lim\limits_{n=\infty} U_n$ involvire, jedes Missverständniss auszuschliessen, möchte ich zu dem dort gesagten noch folgendes hinzufügen.

Nur, wenn man die Cantor'sche Definition der Irrationalzahlen acceptirt, enthält die Bedingung (1) geradezu die Definition der Grenzwerth-Existenz und zwar in folgendem Sinne: Auf Grund von Ungl. (1) definirt die Folge der U_ν eine bestimmte Zahl U, mit welcher nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann, sodass also insbesondere auch $|U - A|$ eine wohldefinirte Zahl vorstellt, gleichgültig ob A eine rationale Zahl oder eine solche vom Charakter U bedeutet. Da nun, wie leicht zu sehen:

(2) $\quad |U - U_\nu|$ beliebig klein wird, etwa für $\nu \geqq n$,

so nennt man U auch den Grenzwerth der U_ν, in Zeichen:

$$U = \lim_{n=\infty} U_n.$$

Legt man dagegen irgend eine andere Definition der Irrationalzahlen zu Grunde, so bildet, wie ich es auf S. 332 ausdrückte, die Ungl. (1) lediglich die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes, d. h. einer bestimmten Zahl U, welche der Bedingung (2) genügt. Das ist so zu verstehen, dass in diesem Falle die Existenz der Ungleichung (2) erst bewiesen werden muss, aber auch wirklich bewiesen werden kann. Dabei wird natürlich der betreffende Beweis je nach der gewählten Definitions-Form der Irrationalzahlen zu modificiren sein.

Den ersten correcten Beweis auf Grund seiner eigenen Definition hat Herr Dedekind am Schlusse seiner Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (1872) publicirt.[1]) Herr Dini hat demselben eine etwas leichter fassliche Form gegeben.

Demnächst hat Herr Stolz, gelegentlich der Besprechung eines unzulänglichen Beweises von Bolzano, einen anderen, auf der Existenz der „Unbestimmtheits-Grenzen" beruhenden Beweis geliefert.[2]) Derselbe ist naturgemäss merklich einfacher und kürzer: nur muss man sich darüber klar sein, dass hierbei der Schwerpunkt des fraglichen Beweises in Wahrheit lediglich in den Nachweis für die Existenz der Unbestimmt-

---

[1]) Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali (1878), p. 27, Art. 22 — mit dem unwesentlichen Unterschiede, dass es sich dort um den allgemeineren Fall einer beliebigen (d. h. nicht nothwendig abzählbaren) Zahlenmenge handelt. Dieser Beweis ist auch in die deutsche Ausgabe (S. 33, § 22) aufgenommen, obschon er dort wegen des veränderten Ausgangspunktes (Annahme der Cantor'schen Definition) in der Hauptsache überflüssig ist.

[2]) B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. Bd. XVIII, S. 260 (1881).

heits-Grenzen verlegt ist,[1]) wozu wiederum noch die folgenden zwei Sätze erforderlich sind: 1) Jede Menge endlicher Zahlen besitzt eine bestimmte obere bezw. untere Grenze. 2) Jede monotone Folge endlich bleibender Zahlen besitzt einen bestimmten Grenzwerth. — Der Beweis dieser Sätze hängt dann wiederum wesentlich von der Wahl der Irrationalzahl-Definition ab.

Der Beweis, welchen Du Bois Reymond in seiner Functionen-Theorie[2]) für den in Rede stehenden Satz („das allgemeine Convergenz-Princip") giebt, ist eine einfache Modification des Dini'schen Beweises (der sich, beiläufig bemerkt, in analoger Weise auch leicht für die Weierstrass'sche Definitions-Form der Irrationalzahlen adaptiren lässt).

Herr Tannery, der in seiner Introduction à la théorie des fonctions (1886) zunächst von der Dedekind'schen Definition ausgeht, beweist den fraglichen Satz, indem er zeigt, dass jede Irrationalzahl im Cantor'schen Sinne auch eine solche nach Dedekind ist,[3]) mit anderen Worten, dass jede der Bedingung (1) genügende Zahlenfolge einen Dedekind'schen Schnitt definirt. Dieses letztere Princip liegt auch dem von Herrn C. Jordan in der zweiten Auflage seines Cours d'Analyse (1893) mitgetheilten, sehr präcis gefassten Beweise zu Grunde.[4])

[1]) Vgl. Du Bois Reymond, Antrittsprogramm S. 3. Uebrigens enthält der dort gegebene Beweis wiederum einen für die Unklarheit der Du Bois Reymond'schen Grenz-Vorstellungen charakteristischen Irrthum. Es wird dort behauptet und bewiesen (!), dass U_n für $\lim n = \infty$ die Werthe A, B der beiden Unbest.-Grenzen stets unendlich oft annehmen muss. Diese Behauptung hat aber entweder überhaupt keinen bestimmten Sinn, oder sie kann nur soviel bedeuten, dass U_n für noch so grosse endliche Werthe von n immer wieder einmal die Werthe A und B annimmt (in diesem Sinne dürfte sie auch gemeint sein, wie der vorgebliche Beweis — a. a. O. S. 4 — anzudeuten scheint). Dann ist sie aber offenbar falsch, wie ein einziger Blick auf das Beispiel $U_n = \sin n$ lehrt.

[2]) S. 260 (1882).

[3]) a. a. O. Art. 27.

[4]) a. a. O. Art. 9.