Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XV. Jahrgang 1885.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1886.

In Commission bei G. Franz.

Herr G. Bauer bespricht und übergibt im Namen des Herrn Professor Franz Meyer in Tübingen eine Abhandlung:

„Ueber die Reducibilität von Gleichungen, insbesondere derer vom fünften Grade, mit linearen Parametern." [1])

Die vorliegende Note knüpft in ihren beiden Theilen an die von Herrn Brill in den Berichten vom Mai dieses Jahres publicirte Untersuchung an. Diese concentrirte sich auf die Aufgabe, aus einer, in den Variabeln λ und μ ganzen Function $g(\lambda, \mu)$, welche sich in die Form bringen lässt:

$$(1)\quad g(\lambda, \mu) = f_1(\lambda)\,\varphi_1(\mu) + f_2(\lambda)\,\varphi_2(\mu) + \ldots . + f_d(\lambda)\,\varphi_d(\mu),$$

(wo die f, φ wieder ganze Functionen ihres Argumentes sind) den Factor $\lambda - \mu$ auszuscheiden, d. h., die Coëfficienten $g(\lambda\,\mu)$ so zu bestimmen, dass die Gleichung identisch statthat:

$$2)\qquad \sum_{i=1}^{i=d} \overset{n}{f_i}(\lambda)\,\overset{\nu}{\varphi_i}(\mu) = (\lambda - \mu)\,\overset{n-1,\,\nu-1}{F}(\lambda, \mu),$$

---

1) Vgl. den kurzen Bericht im Tageblatte der Strassburger Naturforscherversammlung (1885) pg. 174. Betrachtungen von ähnlicher Art hat auch Herr Petersen angestellt. (Theorie der algebraischen Gleichungen, Abschnitt I. Capitel 4), indem er Curven vierter Ordnung in der Ebene mit solchen Graden schneidet, dass die Gleichung für die Abscissen der Schnittpunkte durch Quadratwurzelausziehen lösbar ist (vgl. auch H. Wiener, Ueber Involutionen auf ebenen Curven, Münchener Dissertation, 1881). Doch sind unsere Entwicklungen in Anlage und Ausführung von den genannten wesentlich verschieden.

wo F eine Function wie g ist, und die oberen Indices immer die bezüglichen Grade bedeuten. In diesem Falle „existirte“, wie wir sagen wollen, „für die (gegeben gedachte) rationale Ordnungscurve R_n:

(3) $$x_1 : x_2 : \ldots : x_d = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : \ldots : f_d(\lambda)$$

eine gewisse Mannigfaltigkeit von rationalen Classencurven P_ν:

(4) $$u_1 : u_2 : \ldots : u_d = \varphi_1(\mu) : \varphi_2(\mu) : \ldots \varphi_d(\mu)\text{“}$$

mit der Beziehung, dass jedes Element (u) von P_ν durch das projectivisch zugeordnete Element (x) von R_n (gleichen Argumentes) hindurchgeht.

Diese Aufgabe soll in dem ersten Theile dieser Note in dem Sinne weitergeführt werden, dass der Begriff der Reducibilität der Function g (1) mehr zur Geltung kommt, indem die identische Zerfällung:

(A) $$\overset{n\ \ \nu}{g(\lambda,\mu)} = F_1\overset{p_1,\pi_1}{(\lambda,\mu)} \cdot F_2\overset{p_2,\pi_2}{(\lambda,\mu)} \ldots F_q\overset{p_q,\pi_q}{(\lambda,\mu)}$$
$$(\Sigma p = n,\ \Sigma\pi = \nu)$$

untersucht wird. Dabei sollen irgend welche Coefficienten in $g(\lambda, \mu)$ als gegeben, die übrigen als gesucht betrachtet werden.

Dann ergibt sich (§ 1) eine einfache Regel zur Aufstellung für die Anzahl der Bedingungen, welche die Zerlegung (A) erfordert; die beiden, practisch wichtigen Fälle von „uneigentlichen“ Zerlegungen, in denen jene Regel versagt, werden (§ 2) besonders erörtert. Dabei ist indessen noch ganz abstrahirt von der (im Allgemeinen irrationalen) Art und Weise, wie die Coefficienten der einzelnen Factoren $F(\lambda, \mu)$, nebst den, als gesucht angenommenen Coefficienten von $g(\lambda, \mu)$, von den Gegebenen abhängen, sowie von der Berechnung jener Coefficienten.

Um jene Abhängigkeit genauer bestimmen zu können, werden wir uns die Gleichung (A) den Principien der Gruppentheorie gemäss entstanden denken.

Der nächste Schritt ist, den Uebergang von einer Form $\Sigma f(\lambda) u$, wo die u homogene, lineare Parameter vorstellen, zu der vorgelegten $\Sigma f(\lambda) \varphi(\mu)$, die reducibel werden soll, zu bewerkstelligen.

Dieses Stadium der Auffassung findet seinen Ausdruck in der Aufgabe:

(B) Gegeben sei eine Gleichung n^{ten} Grades mit beliebig vielen (nicht homogenen) linearen Parametern:

$$(5) \quad f_1(\lambda) + f_2(\lambda)\frac{u_2}{u_1} + f_3(\lambda)\frac{u_3}{u_1} + \ldots\ldots + f_d(\lambda)\frac{u_d}{u_1} = 0,$$

deren (sonstige) Coefficienten aus gewissen Urelementen R'. R'', ... rational entstanden sind, oder, wie man sagt, einem gewissen Rationalitätsbereich (Körper) $R(R', R'', \ldots)$ angehören.

Es soll die Gleichung (5) unter „Adjunction" einer weiteren, ganz willkürlichen Grösse μ, sowie, wenn sich dies als nothwendig erweisen sollte, von weiteren, n u r von den R', R'', ... abhängenden Irrationalen reducibel gemacht werden".

Dies ist aber nur ein specieller Fall des Problems:

(C) „Gegeben sei eine ganze Function g einer Unbekannten λ, deren Coefficienten dem Körper $R(R', R'', \ldots)$ angehören. Diese Function g (oder auch die Gleichung $g = 0$) soll in dem Sinne reducibel gemacht werden, dass die Coefficienten der einzelnen Factoren von g nach Adjunction von Grössen, die n u r v o n e i n e m T h e i l e d e r U r e l e m e n t e R', R'', ... i r r a t i o n a l (von den übrigen also rational) a b h ä n g e n, rational bekannt werden."

(C′) „Werden diese übrigen Urelemente durch nur e i n Element μ repräsentirt, so kommt die Aufgabe (C) wieder auf (B) {oder (A)} zurück", die im Folgenden allein berücksichtigt wird.

Dabei mag noch bemerkt sein, dass auch die scheinbar allgemeinere Aufgabe, u n t e r B e i b e h a l t u n g d e r T r e n n u n g d e r U r e l e m e n t e i n d i e z w e i b e z e i c h n e t e n

Gebiete überhaupt die Gruppe G einer Gleichung zu reduciren, sich unter (C) subsumirt, da ja der stufenweisen Reduction von G eine stufenweise Zerfällung der Galois'schen Resolvente in rationale Factoren correspondirt.

Es ist also wesentlich die Beschränkung — die man sich auferlegt, wenn man unter den Urelementen (bei der Vornahme der erforderlichen Adjunctionen) eine geeignete Auswahl trifft — welche einen Fortschritt in der Behandlung des Hauptproblemes der Gruppentheorie indicirt.

Bei der Inangriffnahme der Aufgabe (C′) sind mir die Methoden zu Statten gekommen, die ich bei einer früheren Gelegenheit[1]), wo ich die Gleichungssysteme (3) $\{$oder (4)$\}$ einer zusammenhängenden, algebraischen Behandlung unterwarf, benützte.

Um hier jedoch nicht zu weitläufig zu werden, habe ich es vorgezogen, einen besonderen, schon hinreichend allgemeinen Fall $d = 3$, $n = 5$, $\nu \leqq 5$ vollständig durchzuführen, indem sich verschiedene Schwierigkeiten, die sich bei der allgemeineren Aufgabe erheben, bei diesem Beispiele direct überwinden lassen.

Nach einem ersten Ansatze (§ 3), der nach der Vorschrift des § 1 verfährt, handelt es sich um die Isolirung der eigentlichen Zerlegungen, sowie um deren Existenznachweis.

Als Haupthülfsmittel wird eine Abbildung der R_5 auf eine allgemeine Fläche dritter Ordnung eingeführt, die je drei in gerader Linie liegenden Punkten der R_5 einen Punkt der Fläche in ein-eindeutiger Weise zuordnet. (§ 4.)

Eine analoge Abbildung der R_5 auf eine gewisse Regelfläche dritter Ordnung im Raume von vier Dimensionen dient mehrfach zur Controlle.

---

1) In meiner Schrift „Apolarität und Rationale Curven", Tübingen bei Fues 1883. Im Folgenden mit „Ap." bezeichnet.

In § 5 wird der Existenznachweis für die eigentlichen Zerlegungen (aus denen sich die uneigentlichen dann von selber ergeben) in der Weise geführt, dass alle Möglichkeiten, je nach Art der auftretenden Factoren, in fünf Gruppen eingetheilt werden, deren jede für sich discutirt wird.

Die erforderlichen Adjunctionen von Irrationalen resp. von Wurzeln irreducibler Hülfsgleichungen werden in § 6 angegeben.

Ob aber auch im Allgemeinen die zu adjungirenden Irrationalitäten nur von den Ordnungssingularitäten der R_n (3) abhängen, soll dahingestellt bleiben.

Die Resultate sind in den Tabellen, welche den Schluss der Note bilden, verzeichnet; ihre Erläuterung nebst einer kurzen Zusammenfassung ihres Inhalts findet man in § 10.

Diesem ersten hauptsächlichen Theile der Note schliesst sich ein kleinerer, zweiter an, der bestrebt ist, zu zeigen, wie Reducibilitätsfragen der vorliegenden Art die Algebra und Geometrie der rationalen Curven zu fördern vermögen.

Der Zusammenhang zwischen den Singularitäten einer R_n und einer, für sie existirenden P_ν wird untersucht. Dies findet eine weitere Anwendung auf die Frage nach denjenigen linearen Transformationen, welche in einer Gleichung n^{ten} Grades mit einer Unbekannten den zweiten und vorletzten Coefficienten zugleich zum Verschwinden bringen (§ 7).

Die rationale Verwandtschaft zwischen den zwei Argumenten eines Doppelpunktes solcher R_n, für die eine P_2 existirt, wird aufgestellt, und ihre Bedeutung für die Entstehung der R_n nachgewiesen (§ 8).

Endlich werden in § 9 eigenthümliche Sätze angegeben über die räumliche Lage von Singularitäten rationaler Curven auf Grund der Relationen, die zwischen deren Argumenten herrschen. Dahin gehört z. B. eine Ergänzung, die den neuerdings erkannten algebraischen Eigenschaften von der Figur zweier perspectivischen Dreiecke zu Theil wird.

§ 1. Die Abzählung bei der Zerlegung einer ganzen Function zweier Veränderlichen in Factoren.

Es handelt sich um die Anzahl der Bedingungen, unter welchen die ganze Function $\overset{n\ \nu}{g}(\lambda, \mu)$ in irgend eine Anzahl q von Factoren gleicher Art zerfällt, so dass man identisch hat:

$$(1) \qquad \overset{n\ \nu}{g}(\lambda, \mu) = \overset{p_1, \pi_1}{F_1}(\lambda, \mu)\, \overset{p_2, \pi_2}{F_2}(\lambda, \mu) \ldots \overset{p_q, \pi_q}{F_q}(\lambda, \mu), \text{ wo}$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=q} p_i = n, \quad \sum_{i=1}^{i=q} \pi_i = \nu \text{ ist.}$$

Um den allgemeinsten Fall anzunehmen, denken wir uns eine beliebige Anzahl der Coefficienten in $g(\lambda, \mu)$ fest gegeben; die übrigen, etwa C an Zahl, seien disponibel, aber zugleich mit den unbekannten Coefficienten der $F_i(\lambda, \mu)$ so zu bestimmen, dass der Forderung der Zerlegung (1) genügt wird.

Da die Gleichung (1) identisch erfüllt werden soll, so liefert die Vergleichung entsprechender Producte $\lambda^i \mu^k$ $(n+1)(\nu+1)$ Gleichungen für die gesuchten Grössen, die in denselben je für sich linear auftreten.

Jeder Factor $\overset{p_r\ \pi_r}{Fr}(\lambda, \mu)$ weist $(p_r+1)(\pi_r+1)$ homogene Coefficienten auf: von der Gesammtzahl derselben hat man offenbar $q-1$ abzuziehen, wenn man die Anzahl der eigentlichen, der rechten Seite von (1) entstammenden Unbekannten haben will.

Somit ist die Anzahl M der Bedingungen für die Zerlegung (1), oder, was dasselbe ist, die Mannigfaltigkeit[1]) der Lösungen unserer Zerlegungsaufgabe gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Unbekannten und der Gleichungen, nemlich:

1) wobei auch der Begriff einer negativen Mannigfaltigkeit zugelassen wird.

$$(3)\quad M = C + \sum_{i=1}^{i=q} (p_i + 1)(\pi_i + 1) - (n+1)(\nu+1) - (q-1)$$

oder nach einfacher Umrechnung, mit Rücksicht auf (2):

$$(4)\qquad M = C - \sum_r \sum_s (p_r \pi_s + p_s \pi_r)_{(r \neq s)} = C - \sum_r \sum_s f_{rs},$$

wo f_{rs} den Grad der Resultante von $F_r(\lambda, \mu)$ und $F_s(\lambda, \mu)$ (die entsteht, wenn man eine der beiden Variabeln eliminirt) in der übrig bleibenden Variabeln bedeutet.

Nun drückt sich, wie man weiss, die (nach einer der beiden Variabeln genommene) Discriminante D von $g(\lambda, \mu)$ durch die entsprechend gebildeten Discriminanten D_i der F_i und Resultanten F_{rs} je zweier F_r, F_s folgendermassen aus:

$$(5)\qquad D = \prod_{i=1}^{i=q} D_i \prod_{r=1}^{r=q} \prod_{s=1}^{s=q} F_{rs}^2.$$

In Worten: „Die Discriminante von $g(\lambda, \mu)$ besitzt (im Allgemeinen[1]) gerade $\sum_r \sum_s f_{rs}$ Doppelwurzeln".

Schreiben wir demnach die Formel (4) in der Gestalt:

$$(4)\qquad \sum_r \sum_s f_{rs} = C - M,$$

so sagt dies aus, dass zwischen den Coefficienten einer, irgendwie reducibeln ganzen Function $g(\lambda, \mu)$ genau so viele Relationen herrschen, als die Discriminante von $g(\lambda, \mu)$ jedesmal Doppelwurzeln hat. Oder, wie man sich auch ausdrücken kann, die g a n z e K r a f t der Zerlegungsbedingungen richtet sich darauf, von der ganzen Function D (einen Variabeln) Doppelfactoren abzuspalten. Oder endlich in nunmehr verständlichem Sinne:

„Die Reducibilität einer ganzen Function $g(\lambda, \mu)$ regelt sich nach dem Gesetz, dass die Discriminante D von g einen

1) Dies heisst hier, dass nicht angenommen wird, die Discriminanten der einzelnen Factoren F_i besässen für sich Doppelfactoren. Im gegentheiligen Falle ist natürlich die Anzahl der letzteren der Σf_{rs} noch hinzuzufügen.

Doppelfactor aufweist, dessen Grad ein Maximum[1]) wird, nemlich so hoch, als es die Anzahl der Reducibilitätsbedingungen überhaupt erlaubt."

Man wird diese Vorschrift in doppelter Weise anwenden: einmal bei bekanntem M die Zahl Σf_{rs} berechnen, und umgekehrt.

Als einfaches Beispiel diene die Zerlegung III der Tabelle:

$$(6)\quad g(\lambda^5, \mu^2) = f_1(\lambda^5)\varphi_1(\mu^2) + f_2(\lambda^5)\varphi_2(\mu^2) + f_3(\lambda^5)\varphi_3(\mu^2)$$
$$= F_1(\lambda^1, \mu^1)\, F_2(\lambda^4, \mu^1).$$

Die $f_i(\lambda)$ seien gegeben, die $\varphi_i(\mu)$ mit ihren fünf eigentlichen Constanten gesucht. Hier ist $\Sigma f_{rs} = f_{12} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5$.

Also ist $M = 5 - 5 = 0$, d. h. es gibt eine endliche Anzahl von Lösungen (und da die zu befriedigenden Gleichungen in den gesuchten Grössen linear[2]) sind, nur eine).

Umgekehrt kennt man (wie eine directe Abzählung zeigt) die Zahl $M = 0$, so ergibt sich $f_{12} = 5$. Geometrisch bedeutet dies, wie leicht zu sehen, dass der einmal existirende Classenkegelschnitt

$$(7)\qquad u_1 : u_2 : u_3 = \varphi_1(\mu) : \varphi_2(\mu) : \varphi_3(\mu)$$

1) Diese Gleichungen $g = 0$ können im besondern in solche übergehen, deren Discriminante ein volles Quadrat wird, wie sie Herr Netto im 95. Bande des Kronecker-Weierstrass'schen Journals untersucht hat.

Uebrigens ist unmittelbar zu sehen, dass die Bedingung des Textes eine nur nothwendige, keineswegs aber hinreichende ist.

Der Regel des Textes correspondirt eine ähnliche, bekannte für die Anzahl der Doppelpunkte einer zerfallenden, ebenen, algebraischen Curve, nur dass von diesen in unserem Falle, wenn $g(\lambda, \mu) = 0$ diese Curve ist, eine grosse Zahl in's Unendliche fällt.

2) Das heisst, genauer: Die Bedingungsgleichungen lassen sich in diesem Falle so aufstellen, dass die Coefficienten der F_i ganz herausgegangen sind, und nur noch die φ_i als lineare Unbekannte auftreten.

die rationale, ebene Curve fünfter Ordnung:

(8) $$x_1 : x_2 : x_3 = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : f_3(\lambda)$$

so oft berührt, als er dazu im Stande ist, nemlich fünfmal. Denn die Punkte, in denen sich beide Curven berühren, sind durch die Doppelfactoren von D repräsentirt.

---

§ 2. Die uneigentlichen Zerlegungen erster und zweiter Art.

In zwei, häufig vorkommenden Fällen versagt die eben dargelegte Abzählungsmethode.

Erstlich dann, wenn in der linken Seite der Zerlegungsgleichung:

(1) $$g(\overset{n}{\lambda}, \overset{\nu}{\mu}) = \Sigma f(\overset{n}{\lambda})\, \varphi(\overset{\nu}{\mu})$$

sämmtliche Functionen $\varphi(\mu)$ $\{$oder auch $f(\lambda)\}$ einen Factor $\psi(\overset{\nu'}{\mu})$ (der dann auch auf der rechten Seite erscheint) gemein haben.

Eine derartige Zerlegung heisse eine u n e i g e n t l i c h e e r s t e r A r t.

Aus einer jeden eigentlichen Reduction entspringen unendlich viele uneigentliche erster Art: man hat nur auf beiden Seiten der Reductionsgleichung einen Factor $\psi(\mu)$ von beliebig hohem Grade in μ zuzufügen.

Um zu zeigen, dass in allen diesen uneigentlichen Fällen der Abzählungsmodus des § 1 unzulänglich ist, genügt die Betrachtung eines Beispiels. Es existire die eigentliche Zerlegung:

(2) $$f_1(\overset{n}{\lambda})\, \varphi_1(\overset{\nu}{\mu}) + f_2(\overset{n}{\lambda})\, \varphi_2(\overset{\nu}{\mu}) + f_3(\overset{n}{\lambda})\, \varphi_3(\overset{\nu}{\mu})$$
$$= F_1\overset{p_1, \pi_1}{(\lambda, \mu)} . F_2\overset{n-p_1, \nu-\pi_1}{(\lambda, \mu)};$$

so ist, bei gegebenen $f(\lambda)$, die Mannigfaltigkeit ihrer Lösungen:

(3) $\quad M_\nu = 3\nu - 1 - \{p_1(\nu - \pi_1) + \pi_1(n - p_1)\}.$

Tritt jetzt auf beiden Seiten von (2) der willkürliche Factor $\overset{\nu'}{\psi}(\mu)$ hinzu (der links als in den φ eingehend angesehen wird), so steigt M_ν ersichtlich um $\nu' + 1$. Wollte man hier die Regel des § 1 anwenden, so würde, rechts $\overset{\nu'}{\psi}(\mu) = F_3^{o,\nu'}(\lambda, \mu)$ gesetzt, M_ν wachsen um:

(4) $\quad 3\nu' - \nu'(p_1 + n - p_1) = \nu'(3 - n).$ q. e. d.

Ebensowenig ist aber die Anwendung des allgemeinen Abzählungs-Verfahrens zulässig, wenn sich der Factor $\psi(\mu') = F_3$ unter den beiden andern, F_1 und F_2 irgendwie versteckt, wenn sich also die rechte Seite der uneigentlichen Zerlegung in der scheinbar eigentlichen Form darbietet:

(5) $\quad F_1^{p_1, \pi_1 + \pi_1'}(\lambda, \mu) \,.\, F_2^{n - p_1, \nu - \pi_1 + \nu' - \pi_1'}(\lambda, \mu)$

wo π_1' irgend eine ganze Zahl zwischen o und ν' (je incl.) sein kann. Denn in diesem Falle würde sich die Mannigfaltigkeit M_ν (3), der allgemeinen Vorschrift gemäss, vermehren um:

(6) $\quad 3\nu' - \{p_1(\nu' - \pi'_1) + \pi'_1(n - p_1)\}$

was wieder nicht zutrifft.

Das letztere Vorkommniss ist gerade ein in praxi häufiges.

Wir gehen über zu den u n e i g e n t l i c h e n Zerlegungen z w e i t e r A r t.

Unter diesen sollen solche verstanden werden, die sich unter der Bedingung, dass man eine gewisse rationale Function der Variabeln μ als neue Variable einführt[1]), auf uneigentliche erster Art, und damit, wenn man den bezüglichen, beiden Seiten gemeinsamen Factor weghebt, auf eigentliche zurückführen lassen.

Umgekehrt erwachsen wieder aus einer beliebigen eigent-

1) cf. Lüroth, Mathematische Annalen, Band 9.

lichen Zerlegung unendlich viele uneigentliche zweiter Art, sobald man für μ die neue Unbekannte μ' einführt, wo:

$$\mu = \frac{\overset{r}{\psi}(\mu')}{\overset{r}{\chi}(\mu')}, \tag{7}$$

und ψ, χ ganze Functionen von μ' beliebig hohen Grades sind.

Auch dann wird die Vorschrift des § 1 illusorisch. Knüpfen wir wieder an das Beispiel (2) an, so steigt nach der Substitution (7) die Mannigfaltigkeit M_ν (3) der Lösungen um $(2r + 1) - 3 = 2(r \quad 1)$.

Der Grad in μ ver-r-facht sich, so dass uns die Reduction vorliegt:

$$\begin{gathered}\overset{n}{f_1}(\lambda)\,\overset{r\nu}{\varphi'_1}(\mu') + \overset{n}{f_2}(\lambda)\,\overset{r\nu}{\varphi'_2}(\mu') + \overset{n}{f_3}(\lambda)\,\overset{r\nu}{\varphi'_3}(\mu') \\ = \overset{\pi_1,\, r\pi_1}{F'_1}(\lambda, \mu')\,\overset{n - p_1,\, r(\nu - \pi_1)}{F'_2}(\lambda, \quad \mu')\end{gathered} \tag{8}$$

(nach zuvoriger Heraufmultiplication und Weghebung von $\overset{r\nu}{\chi}(\mu')$).

Dann würde man nach § 1 als Zuwachs von M_ν erhalten:

$$3(r - 1)\nu - r f_{12} = r M_\nu + 3(r - \nu), \tag{9}$$

was unmöglich ist.

Diese beiden Erscheinungen zeigen, wie die blosse Abzählung nach der in § 1 erörterten Methode nicht genügt, sondern in jedem einzelnen Falle durch einen Existenzbeweis ergänzt werden muss.

In dem unten durchgeführten Beispiel der Gleichungen fünften Grades mit zwei linearen Paramentern sind diejenigen uneigentlichen Zerlegungen erster und zweiter Art (die man zufolge der blossen Abzählung für eigentliche halten könnte), die nicht zugleich eigentliche sein können, in einer zweiten und dritten Tabelle, die eigentlichen in einer ersten zusammengestellt (am Schluss der Note).

Die Methode kann hier vorderhand nur die sein: nachdem man sich davon überzeugt hat (vermöge anderweitiger

Controlle), dass eine vorliegende Zerlegung unmöglich eine eigentliche sein kann, leitet man sie in der oben angegebenen Weise aus eigentlichen Zerlegungen, bei denen der Grad in μ ein kleinerer ist, her.

Die Schemata der eigentlichen Zerlegungen können in der mannigfaltigsten Art zugleich uneigentliche repräsentiren. Dies ist in der ersten Tabelle, weil ohne Interesse, nicht weiter angemerkt.

Die Zerfällung der Gleichungen fünften Grades mit zwei linearen Parametern.

§ 3. Der Ansatz.

Die wesentlichste Beschränkung, die nunmehr eintreten soll, um die oben im Allgemeinen betrachteten Zerlegungen im Einzelnen studiren zu können, besteht in der Annahme $d = 3$ d. h.

$$(1) \quad \overset{n,\,\nu}{g(\lambda, \mu)} = \overset{n}{f_1(\lambda)}\, \overset{\nu}{\varphi_1(\mu)} + \overset{n}{f_2(\lambda)}\, \overset{\nu}{\varphi_2(\mu)} + \overset{n}{f_3(\lambda)}\, \overset{\nu}{\varphi_3(\mu)}.$$

(Die Fälle $d = 1,2$ führen nur zu Trivialitäten).

Die Untersuchung der einfachsten Unterfälle $n = 2, 3, 4$, die mir auch vollständig gelungen ist, unterdrücke ich hier, um gleich zu dem instructiveren Falle $n = 5$ überzugehen.

Es sollen demnach in der ganzen Function fünften Grades:

$$(2) \qquad u_1\, f_1(\lambda) + u_2\, f_2(\lambda) + u_3\, f_3(\lambda)$$

(mit allgemeinen Coefficienten) für die homogenen Parameter u_i solche ganze[1]) Functionen einer Unbekannten μ $\overset{\nu}{\varphi_i(\mu)}$

---

1) Dabei werden (wie in jedem Falle) alle diejenigen Systeme von drei Functionen $\varphi_i(\mu)$ als identisch angesehen, die durch lineare Transformationen von μ aus einander hervorgehen.

ν^{ten} Grades substituirt werden, dass dadurch die Function (2) in rationale Factoren zerfällt (und zwar in eigentlicher Weise):

$$(3) \qquad \overset{5}{f}_1(\lambda)\,\overset{\nu}{\varphi}_1(\mu) + \overset{5}{f}_2(\lambda)\,\overset{\nu}{\varphi}_2(\mu) + \overset{5}{f}_3(\lambda)\,\overset{\nu}{\varphi}_3(\mu)$$

$$= F_1\overset{p_1,\,\pi_1}{(\lambda,\ \mu)}\,.\,F_2\overset{p_1,\,\pi_2}{(\lambda,\ \mu)}\dots.$$

wo (4) $\qquad \Sigma p = 5,\ \Sigma\pi = \nu$ ist.

Zugleich sollen die (von den Coefficienten der f_i abhängenden) Irrationalen angegeben werden, deren Adjunction erforderlich und hinreichend ist, um die Coefficienten der F_i (wie der φ_i) rational bekannt zu machen.

Dabei nehmen wir zugleich noch ν nicht grösser als fünf an (abgesehen von einigen Fällen, die zur Abrundung dienen), da wir sonst über die Reductionen von Gleichungen fünften Grades thatsächlich hinausgehen würden.

Das erste ist, der Reihe nach für $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$, alle Zahlsysteme $(p_1, \pi_1)\,(p_2, \pi_2)$ etc. aufzustellen, die den Bedingungen (4) genügen. Von den entsprechenden Schemata (3) werden sofort alle diejenigen gestrichen, die im Allgemeinen nicht eintreten, für welche also die Summe Σf_{r_s} der Grade aller Resultanten der F_i, F_k die Anzahl der zur Verfügung stehenden Constanten der $\varphi_i(\mu)$, nemlich $3\nu - 1$ übersteigt.

So resultiren zuvörderst die Schemata der drei Schlusstabellen (denen eine nähere Erläuterung in § 10 unmittelbar vorangeht).

Jetzt tritt man den Beweis der Existenz der bezüglichen Zerlegungen (§ 5) an und erkennt, dass eigentliche Zerlegungen nur die in der ersten Tabelle dargestellten sind. Ist dies einmal festgestellt, so leitet man aus ihnen nicht allein die in der zweiten und dritten Tabelle verzeichneten, ausschliesslich uneigentlichen Zerlegungen, sondern auch noch in der mannigfaltigsten Weise weitere, durch Schemata der ersten Tabelle repräsentirte uneigentliche Zerlegungen mit Leichtigkeit ab.

Wir bedienen uns im Folgenden der geometrischen Redeweise, ohne welche, um nur auf Eines hinzuweisen, die endgültige Zusammenfassung der Resultate in § 10 kaum möglich ist.

Dann sind die $\overset{5}{f_i}(\lambda)$ die (homogenen) Punktcoordinaten einer ebenen R_5, desgleichen die $\overset{\nu}{\varphi_i}(\mu)$ die Liniencoordinaten einer ebenen P_ν.

Jede Tangente von P_ν schneidet die R_5 in fünf Punkten, deren Argumente von einer reducibeln Gleichung fünften Grades (3) = 0, abhängen sollen. Ebenso dualistisch.

Dann ist nach § 1 klar, dass sich die beiden Curven R_5, P_ν in Σf_{rs} Punkten berühren. Die Gleichung der Berührungspunkte ergibt sich sofort, wenn man das Produkt sämmtlicher, nach λ oder μ genommenen Resultanten je zweier F_i, F_k gleich Null setzt.

Die Curve P_ν berührt nach § 1 die R_5 so oft, als ihre Mannigfaltigkeit erlaubt; ist also M_ν die letztere,

$$(3\nu - 1 - M_\nu)\text{-mal.}$$

---

§ 4. Das Hülfsmittel der Abbildung einer R_5 auf eine Fläche dritter Ordnung F_3.

Der Existenzbeweis für die eigentlichen Zerlegungen der ersten Tabelle wird erleichtert, wenn wir die Mannigfaltigkeit von Werthsystemen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ der Gleichung (mit variabeln Parametern u_i)

$$(1) \qquad u_1 \overset{5}{f_1}(\lambda) + u_2 \overset{5}{f_2}(\lambda) + u_3 \overset{5}{f_3}(\lambda) = 0$$

im Raume (von drei Dimensionen) ausbreiten, wie folgt.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass jene fünf Werthe λ die Wurzeln einer Gleichung (1) sind, lässt sich[1]) nach Elimination der u in drei Gleichungen

---

1) cf. „Ap." § 2, 3.

niederlegen, deren linke Seiten in den λ ganz, linear und symmetrisch sind. Ordnet man dieselben nach den beiden Grössen $p = \lambda_4 + \lambda_5$, $q = \lambda_4 \lambda_5$, und elliminirt dieselben, so ergibt sich als Resultat eine Gleichung von der Form:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix} = o$$

wo die A_i, B_i, C_i in den homogenen Grössen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ linear sind, wo:

$$(3) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, \quad \frac{\sigma_3}{\sigma_0} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Die σ_i interpretire man als homogene Coordinaten eines Raumpunktes P. Dann kommt auch den $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ eine einfache[1]) Bedeutung zu; sie erscheinen als die Argumente der drei Schmiegungsebenen, die vom Punkte P an die cubische Raumcurve N_3:

$$(4) \qquad u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = \lambda^3 : -\lambda^2 : \lambda : -1$$

gehen (wo die u die Coordinaten einer variablen Schmiegungsebene der Curve sind).

Nun besitzt die R_5:

$$(5) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : f_3(\lambda)$$

sechs Doppelpunkte (α_i, β_i) d. h. es gibt sechs Werthepaare (α_i, β_i), von denen jedes mit einem ganz willkürlichen Werth λ zusammen drei Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vorstellt, die die Gleichung (2) befriedigen.

Wir haben daher das Resultat (wenn wir einen Raumpunkt P (3) genauer mit $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ bezeichnen):

(A) „Die R_5 (5) kann derart in ein-eindeutiger Weise auf eine allgemeine[2]) Fläche dritter Ordnung F_3 (2) abgebildet

---

1) cf. „Ap." § 13. Coordinatencurve heisst die N_3, weil sie das ursprüngliche Coordinaten-Tetraeder völlig zu ersetzen im Stande ist.

2) Dass die Fläche eine allgemeine ist, folgt schon daraus, dass die sechs Geraden des Satzes (A) zu einander windschief sind. Die Umkehrung der ganzen Betrachtung, so dass man eine beliebige F_3

werden, dass jedem Tripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von drei in gerader Linie liegenden Punkten der R_5 ein einziger Punkt $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ der F_3 entspricht und umgekehrt: zudem ist die F_3 so auf die „Coordinatencurve" N_3[1]) (4) bezogen, dass sechs Linien zweier Ebenen (α_i, β_i) von N_3 eine halbe Doppelsechs der Fläche bilden."

Zu unserem Zwecke führen wir diese Abbildung soweit, dass wir die beiden Fragen beantworten: Was entspricht in der Ebene der R_5 dem Schnitte der F_3 mit einer beliebigen Ebene, sowie mit einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung?

Die Gleichungen dieser Ebene und Fläche zweiter Ordnung seien:

(6) $$a_0 = o, \quad b_0^2 = o,$$

dann haben wir dieselben mit (2) oder besser mit den drei ursprünglichen Gleichungen, aus denen (2) entstand, zu combiniren.

Vermöge eines recurrirenden Verfahrens, welches die analoge Aufgabe successive für eine R_2, R_3, R_4 löst, aber hier nicht weiter ausgeführt werden soll, kommt:

(B) „Durchläuft der Raumpunkt $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ den Schnitt der F_3 mit einer Ebene, so werden die Tripel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ in der Ebene der R_5 von den Tangenten einer (im Allgemeinen elliptischen) Curve sechster Klasse K_6 ausgeschnitten, welche die R_5 fünfzehnmal berührt."

„Durchläuft der Punkt $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ den Schnitt der F_3 mit einer Fläche zweiter Ordnung, so werden die Tripel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ auf der R_5 von den Tangenten einer Curve zwölfter Klasse K_{12} (im Allgemeinen vom Geschlecht vier) ausgeschnitten, welche die R_5 dreissigmal berührt."

---

nimmt, und auf ihr irgend eine halbe Doppelsechs herausgreift, die dann die Rolle des Textes spielt, vollzieht sich am besten mit Hülfe des Satzes (C) in § 9.

1) Siehe die Anm. auf voriger Seite.

Beiläufig bemerkt, findet sich auch in diesen Fällen das Maximumsgesetz wieder, das oben für die rationalen Classencurven P_ν abgeleitet war. Denn die Constantenanzahl einer K_6 von Geschlecht Eins ist $(3 \cdot 6 - 1) + 1 = 18$, die Mannigfaltigkeit der K_6 des Satzes (B) ist 3, und in der That ist die Anzahl der Berührungen $18 - 3 = 15$.

In derselben Weise berührt eine K_{12} des Satzes (B) die R_5 an $(3 \cdot 12 - 1) + 4 - 9 = 30$ Stellen. Und so fort.

Wir bezeichnen, wie üblich, die Geraden der halben Doppelsechs auf der F_3, die den Doppelpunkten der R_5 correspondiren, mit a_i $(i = 1, 2, \ldots 6)$, die der zugehörigen, andern halben Doppelsechs mit b_i, und die fünfzehn weiteren Geraden der Fläche mit c_{ik}. $(i \neq k, = 1, 2, \ldots 6)$.

Ferner die Kegelschnitte, die mit a_i resp. b_i, resp. c_{ik} in einer Ebene und zugleich auf der F_3 liegen, mit $\varphi_2(a_i)$, $\varphi_2(b_i)$, $\varphi_2(c_{ik}.)$

Die cubischen Raumcurven φ_3 auf der F_3 haben bekanntlich immer gewisse sechs der 27 Geraden der Fläche zu Sehnen. Diese werden in der Klammer beigesetzt. Es gibt fünf verschiedene Arten solcher φ_3:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{I}\ \varphi_3(a_i) \\ \mathrm{II}\ \varphi_3(b_i) \end{array}\right\} \quad \left|\begin{array}{l} \mathrm{III}\ \varphi_3\begin{pmatrix} a_i, & a_k, & a_l \\ c_{mn}, & c_{mp}, & c_{np} \end{pmatrix} \\ \mathrm{IV}\ \varphi_3\begin{pmatrix} b_m, & b_n, & b_p \\ c_{lk}, & c_{il}, & c_{kl} \end{pmatrix} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} \mathrm{V}_a\ \varphi_3\begin{pmatrix} a_i, & & & b_i \\ c_{kl}, & c_{km}, & c_{kn}, & c_{kp} \end{pmatrix} \\ \mathrm{V}_b\ \varphi_3\begin{pmatrix} a_k, & & & b_k \\ c_{il}, & c_{im}, & c_{in}, & c_{ip} \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Je eine φ_3 von I und II, von III und IV, endlich von V_a und V_b liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung.

Diesen reiht sich noch eine sechste Art an, die ebenen, rationalen φ_3, welche auf der F_3 von deren Tangentialebenen ausgeschnitten werden.

Der Gleichmässigkeit wegen werde das Zeichen φ auch für die 27 Geraden der F_3 angewandt: dies seien also die $\varphi_1(a_i)$, $\varphi_1(b_i)$, $\varphi_1(c_{ik})$.

---

§ 5. **Die Discussion der einzelnen Fälle** (vgl. die Tabellen).

Wir ordnen die verschiedenen Möglichkeiten in fünf Gruppen ein.

Erste Gruppe. Die Variable μ kommt in einem der Factoren F gar nicht vor.

Schema. $\overset{5\ \nu}{g}(\lambda, \mu) = \overset{p_1\ 0}{F_1}(\lambda, \mu)\, F_2 \,..$

Dies ist nur so möglich, dass die Curve P_ν mit einem (einfach oder mehrfach zu zählenden) Punkte der R_5 zusammenfällt. Zählt der Punkt nur einfach, so tritt der Fall I oder II ein, je nachdem er ein gewöhnlicher oder ein Doppelpunkt der R_5 ist. Daraus entspringen die acht ersten uneigentlichen Fälle zweiter Art.

Zweite Gruppe. Die beiden Variabeln λ, μ kommen in einem der Factoren F je vom ersten Grade vor, während nur noch ein weiterer Factor F existirt.

Schema. $\overset{5\ \nu}{g}(\lambda, \mu) = \overset{1,\,1}{F_1}(\lambda, \mu)\, \overset{4,\,\nu-1}{F_2}(\lambda, \mu)$.

Dies sind die Fälle III, V, VIII, XI, deren Existenz durch die directe Behandlung von Herrn Brill gesichert ist.

Fall III repräsentirt den „ausgezeichneten" Kegelschnitt, welchen Herr Rohn[1]) einer linearen Construction der R_5 zu Grunde gelegt hat.

Man bemerkt, dass die Zerlegung

$$\overset{5\ \nu}{g}(\lambda, \mu) = \overset{4,\,1}{F_1}(\lambda, \mu)\, \overset{1,\,\nu-1}{F_2}(\lambda, \mu)$$

im Allgemeinen nur möglich ist, wenn $(3\nu - 1) - (4\nu - 4 + 1)$ d. i. $2 - \nu$ grösser oder gleich Null ist, wenn also $\nu = 1$ oder 2 genommen wird. Dies sind gerade die Fälle I, III. Deutet

1) Mathematische Annalen, Band 25. Beiläufig sei bemerkt, dass die von Herrn Rohn angegebene Construction der R_5 eine einfache Erklärung findet, sobald man sie vermöge der Clebsch'schen Abbildung auf die Fläche dritter Ordnung überträgt (wobei die sechs Doppelpunkte der R_5 als Fundamentalpunkte fungiren).

man[1]) das Verschwinden des ersten Factors F_1 als „Ebenen-involution vierter Ordnung" auf der cubischen Raumcurve N_3 des § 4, so entspricht dem Fall I auf der F_3 eine einfache Mannigfaltigkeit von φ_3 (a_i), dem Fall III eine einzige φ_3 (b_i), beidemal von der Art, dass es unendlich viele Sehnen einer solchen φ_3 gibt, die zugleich Linien zweier Ebenen von N_3 sind.

Ausser jenen φ_3 gibt es auf der F_3 keine einzige cubische Raumcurve, die zu N_3 in der angegebenen Beziehung steht. (Vgl. auch § 9 Satz (C).

Eine weitere Controlle für die Fälle der zweiten Gruppe, nebst zahlreichen Aufschlüssen über ihren Zusammenhang bietet sich, wenn man, ganz analog der Abbildung des § 4, irgend vier, in einer Geraden liegende Punkte λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 der R_5 als Bestimmungsstücke eines Punktes im vierdimensionalen (ebenen) Raume ansieht. Diese Punkte erfüllen dann eine (zweifach ausgedehnte) Mannigfaltigkeit $F_3^{(4)}$ dritter Ordnung. Bei dieser Abbildung entsprechen den Fällen I, III, V, VIII, XI, wenn man noch den weiteren:

$$\overset{5\ \nu}{g}(\lambda, \mu) = \overset{1,\,2}{F_1}(\lambda, \mu)\,\overset{4,\,4}{F_2}(\lambda, \mu)$$

hinzunimmt, sämmtliche Arten von Curven erster bis vierter Ordnung, die ganz auf der $F_3^{(4)}$ liegen. Im besondern ergibt sich dabei noch, dass die Zerlegungen von $g(\lambda, \mu)$ in:

$$\overset{4,\,2}{F_1}(\lambda, \mu)\,\overset{1,\,2}{F_2}(\lambda, \mu);\quad \overset{4,\,2}{F_1}(\lambda, \mu)\,\overset{1,\,3}{F_2}(\lambda, \mu);\quad \overset{4,\,3}{F_1}(\lambda, \mu)\,\overset{1,\,2}{F_2}(\lambda, \mu)$$

nur uneigentliche sein können.

Auch die weitere Ausführung der Abbildung der R_5 auf diese $F_3^{(4)}$ geschieht ganz nach dem Muster des § 4. Diese Andeutungen mögen für hier genügen.

---

1) cf. z. B. „Ap.„ § 25. Der Interpretation des Textes steht das algebraische Factum zur Seite, dass der Fall I vermöge einer rationalen Transformation vierten Grades von μ unter das Schema von IX, uud ebenso der Fall III unter das von (d) gebracht werden kann. Dann fungiren sie als uneigentliche Zerlegungen.

Dritte Gruppe. λ kommt in einem der Factoren F vom ersten Grade vor, μ aber von höherem.

Schema. $\overset{5,\ \nu}{g}(\lambda, \mu) = \overset{1,\ \pi_1}{F_1}(\lambda, \mu) \,.\, \overset{4,\ \nu-\pi_1}{F_2}(\lambda\ \ \mu).$

Die Abzählung nach der Vorschrift des § 1 lässt zunächst folgende Zerlegungen übrig:

$$\overset{1,\ 2}{F_1}(\lambda, \mu) \cdot \overset{4,\ 2}{F_2}(\lambda, \mu);\quad \overset{1,\ 2}{F_1}(\lambda, \mu)\, \overset{4,\ 3}{F_2}(\lambda, \mu);\quad \overset{1,\ 3}{F_1}(\lambda, \mu)\, \overset{4,\ 2}{F_2}(\lambda, \mu).$$

Dass diese uneigentliche sind, ist schon oben bemerkt, diess lässt sich aber auch ohne jene Abbildung nachweisen.

Denn die erste Zerlegung führt, wie auch die Coefficienten von F_1 beschaffen sind, von der P_4 aus höchstens zu einer R_3, ebenso die zweite von einer P_5 höchstens zu einer R_4.

Endlich repräsentirt bei der dritten Zerlegung die Gleichung $F_2 = o$ auf der F_3 eine Curve sechster Ordnung, die zugleich auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt. Dieser Curve entspräche demnach in der Ebene nach § 4 eine K_{12}. Aber eine P_5 kann, auch mehrfach zählend, nicht als K_{12} aufgefasst werden.

Vierte Gruppe. λ kommt in einem der Factoren F vom dritten Grade vor.

Schema. $\overset{5,\ \nu}{g}(\lambda, \mu) = \overset{3,\ \pi_1}{F_1}(\lambda, \mu)\, \overset{2,\ \nu-\pi_1}{F_2}(\lambda,\ \ \mu).$

Der Fall $\overset{3,\ 4}{F_1}(\lambda, \mu)\, \overset{2,\ 1}{F_2}(\lambda, \mu)$ ist ein uneigentlicher, denn die Gleichung $F_2 = o$ kann höchstens zu einer P_4 führen.

Alle anderen Fälle finden ihre unmittelbare Illustration auf der F_3. Den Fällen II, IV, VII correspondiren auf der F_3 die Geraden, den Fällen VI, X, XIII die Kegelschnitte, endlich den Fällen IX, (d); XII, (c); (a) die eigentlichen cubischen Raumcurven, und dem Fall (b) die ebenen, rationalen Curven dritter Ordnung. Zur Controlle dient einmal der Satz (B) der pag. 430, nach dem je zwei cubische Raumcurven der F_3, die zusammen von einer Fläche zweiter Ordnung ausgeschnitten werden, als Bilder in der Ebene der R_5 eine P_ν und eine $P_{\nu'}$ besitzen, wo $\nu + \nu' = 12$.

Andererseits das Studium des Factors $F_2 \overset{2,\,\nu-\pi_1}{(\lambda,\ \mu)}$. Man nimmt $\nu - \pi_1$ succ. gleich 1, 2, 3, 4, jedesmal v o r l ä u f i g b e l i e b i g e Coefficienten in F_2, und fordert, dass die Klasse der P_ν, deren Tangenten der Bedingung $F_2 = 0$ genügen, sich auf eine Zahl erniedrigt,[1]) die kleiner oder gleich fünf ist.

Als Beispiel diene die Zerlegung XII:

$$(1) \qquad g \overset{5,\,5}{(\lambda, \mu)} = F_1 \overset{3,\,3}{(\lambda, \mu)} \,.\, F_2 \overset{2,\,2}{(\lambda, \mu)}.$$

Man geht von der Forderung aus, je zwei Punkte λ_4, λ_5 der R_5 durch eine Gerade zu verbinden, deren Argumente Wurzeln einer Gleichung sind:

$$(2) \qquad F_2 \overset{2,\,2}{(\lambda, \mu)} = \mu^2 h_2 \overset{2}{(\lambda)} + \mu\, h_1 \overset{2}{(\lambda)} + h_0 \overset{2}{(\lambda)} = 0,$$

wo die h (λ) vor der Hand beliebige, ganze Functionen von λ zweiten Grades sind. Wie die Combination der Gleichung (2) mit der Gleichung der R_5 zeigt, ist der geometrische Ort der gemeinten Geraden eine P_8.

Soll sich diese, wie es (1) verlangt, auf eine P_5 reduciren, so ist das nur so möglich, dass drei der sechs Doppelpunktsargumentenpaare (α_i, β_i) Wurzelpaare λ_4, λ_5 von (2) sind.

Mithin sind die Bilder der Zerlegungen (1) die

$$\varphi_3 \begin{pmatrix} a_i, & a_k, & a_l \\ c_{mn}, & c_{mp}, & c_{np} \end{pmatrix} \text{ auf der } F_3.$$

Man bemerkt noch, dass die 15 P_2 des Falles IV mit der einen P_2 des Falles III zusammen gerade die 16, die R_5 fünfmal berührenden Kegelschnitte sind, die es bekannter-

1) Dabei leistet der Satz des Herrn Pasch (Mathematische Annalen, Band 18 „Ueber rationale Curven") gute Dienste, dass das Gleichungssystem $x_1 : x_2 : x_3 = f_1 \overset{n}{(\lambda)} : f_2 \overset{n}{(\lambda)} : f_3 \overset{n}{(\lambda)}$, wo die f ohne gemeinsamen Factor vorausgesetzt werden, entweder eine eigentliche R_n darstellt, oder eine mehrfach zählende rationale Curve von niedrigerer Ordnung.

massen gibt. Der Factor $\overset{2,\,1}{F_2}(\lambda, \mu)$ in IV aber führt unmittelbar zu der von Herrn Rohn (l. c.) angegebenen Erzeugung der 15 P_2, die darin besteht, dass man durch irgend vier Doppelpunkte der R_5 die Kegelschnitte eines Büschels legt, und die beiden Restschnittpunkte eines jeden von ihnen durch eine Gerade verbindet.

Da es nicht mehr als 27 Gerade auf der F_3 gibt, müssen der erste und vierte Fall der zweiten Tabelle uneigentliche sein.

Es erübrigt noch die letzte, die

F ü n f t e G r u p p e. Sie besteht aus dem einzigen Falle, der drei Factoren F zulässt.

S c h e m a (XIV). $\overset{5,\,5}{g}(\lambda,\mu) = \overset{1,\,1}{F_1}(\lambda,\mu) \,.\, \overset{1,\,1}{F_2}(\lambda,\mu) \,.\, \overset{3,\,3}{F_3}(\lambda,\mu)$.

Man verfährt anfangs, wie eben bei der Behandlung von XII.

Ausser den drei dort angeführten Bedingungen, sind noch die zwei weiteren zu erfüllen, dass die linke Seite von (2) in zwei Factoren zerfällt, die je vom ersten Grade in λ und μ sind. Geometrisch heisst das „durch drei Punkte in einer Ebene einen Kegelschnitt so zu legen, dass er einen festen Kegelschnitt der Ebene zweimal berührt", was bekanntlich auf vier Arten geht.

Demnach ist die Zerlegung XIV viermal so oft möglich, als man aus den sechs Werthepaaren (α_i, β_i) drei herausgreifen kann, d. h. $4 \times 20 = 80$ mal,[1])

---

1) Genau ebenso ist der Typus XIV für beliebiges n zu behandeln. Speciell ergibt sich, dass die Zerlegung $f_1(\overset{n}{\lambda})\,\varphi_1(\overset{\nu}{\mu}) + f_2(\overset{n}{\lambda})\,\varphi_2(\overset{\nu}{\mu}) + f_3(\overset{n}{\lambda})\,\varphi_3(\overset{\nu}{\mu}) = F_1\overset{1,\,1}{(\lambda, \mu)}\,F_2\overset{1,\,1}{(\lambda, \mu)},\, F_3\overset{n-2,\,\nu-2}{(\lambda, \mu)}$, wo $\nu = 2n - 5$ ist, wenn $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = d$ gesetzt wird, auf $4 \,.\, \frac{d.\,(d-1)\,(d-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}$ Weisen möglich ist.

Die Uebertragung auf die F_3 geht einfach so vor sich Jeder Punkt einer, dem Fall XII entsprechenden Curve $\varphi_3\begin{pmatrix} a_i, & a_k, & a_l \\ c_{mn}, & c_{mp}, & c_{np} \end{pmatrix}$ ist, wie aus der Abbildung des § 4 unmittelbar hervorgeht, der eine Eckpunkt eines vollständigen, der F_3 ein- und der N_3 umbeschriebenen Fünfflachs. Dann liefert der Fall XIV gerade diejenigen dieser φ_3, bei welchen die vierte und fünfte Ebene des Fünfflachs rational trennbar sind, d. h. bei welchen die vierte wie die fünfte Ebene je für sich eine, auf die Schmiegungsebenen der N_3 projectivisch beziehbare Mannigfaltigkeit durchlaufen.

---

§ 7. Ueber die erforderlichen Adjunctionen.

Abgesehen von dem Falle XIV, zeigt die Tabelle ohne Weiteres, welche Irrationalen für jede der Zerlegungen zu adjungiren sind, damit die Coefficienten der $F(\lambda, \mu)$, wie der $\varphi(\mu)$ rational bekannt werden. Diese Irrationalen sind immer einige der Grössen $\alpha_i + \beta_i$, $\alpha_i \beta_i$ (wenn die α_i, β_i Doppelpunktsargumentenpaare sind). Diese lassen sich aber, wie bekannt (cf. § 8) ersetzen durch die entsprechenden Wurzeln der irreducibeln, rational bekannten Hülfsgleichung sechsten Grades, von welcher die Bestimmung der α_i, β_i allein abhängt.

Reine Reducibilität, bei der also die Zerlegung von vornherein rational in den Coefficienten ausfällt, zeigt sich in den Fällen

I, III, V, VIII, IX, XI, (b), (d).

Zur Illustration wählen wir gerade den noch übrig bleibenden Fall XIV. Zuvörderst hat man irgend drei Wurzeln der Hülfsgleichung sechsten Grades zu adjungiren. Dadurch werden die Coefficienten der R_4:

$$(1)\quad x_1 : x_2 : x_3 = (\lambda - \alpha_k)\,\lambda - \beta_k)\,.\,(\lambda - \alpha_l)\,(\lambda - \beta_l)$$
$$: (\lambda - \alpha_l)\,(\lambda - \beta_l)\,.\,(\lambda - \alpha_i)\,(\lambda - \beta_i)$$
$$: (\lambda - \alpha_i)\,(\lambda - \beta_i)\,.\,(\lambda - \alpha_k)\,(\lambda - \beta_k)$$
$$(i, k, l = 1, 2, \ldots 6)$$

rational bekannt. Will man jetzt die Zerlegung XIV in irgend einem der 80 Fälle rational ausführen, so erübrigt noch allein die Adjunction irgend einer Wurzel der irreducibeln Hilfsgleichung vierten Grades, von welcher die Bestimmung der Argumente von den vier Doppeltangenten der vorliegenden R_4 (1) abhängt.

Es ist dies nur die algebraische Uebersetzung der in § 5 bei der Discussion des Falles XIV angegebenen geometrischen Construction.

Anwendungen.

Diese beschränken sich auf den Fall, wo die Function $\overset{n\ \nu}{g}(\lambda, \mu)$ in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine sowohl in λ, als in μ linear ist, also vermöge einer linearen Transformation von λ oder μ die Gestalt $\lambda - \mu$ annehmen kann.

§ 7.

I. Die Singularitäten der R_n in Beziehung zu denen der P_ν.

Findet die Zerlegung statt:

$$(1)\qquad f_1\overset{n}{(\lambda)}\,\varphi_1\overset{\nu}{(\mu)} + f_2\overset{n}{(\lambda)}\,\varphi_2\overset{\nu}{(\mu)} + f_3\overset{n}{(\lambda)}\,\varphi_3\overset{\nu}{(\mu)}$$
$$= (\lambda - \mu)\,F_2\overset{n-1,\ \nu-1}{(\lambda,\ \mu)},$$

so gilt für die Argumente (α, β) eines Doppelpunktes der R_n $\{\varrho x_i = f_i(\lambda)\}$, sowie einer Doppeltangente der $P_\nu \{\sigma u_i = \varphi_i(\mu)\}$:

$$(2)\qquad F_2(\alpha, \beta) = o,\ \ F_2(\beta, \alpha) = o.$$

Die Elimination von β führt zu der Gleichung:

$$(3) \quad R(\alpha) \equiv F_2^{n-1,\nu-1}(\alpha, \alpha) \,.\, S_n^{(n-1)(n-2)}(\alpha) \,.\, S_\nu^{(\nu-1)(\nu-2)}(\alpha) = o.$$

Denn der Factor $F_2(\alpha, \alpha)$ tritt nur im ersten Grade auf, da α beiderseitig bis zur Potenz $(n-1)^2 + (\nu-1)^2$ steigt. Man hat also für die Argumentenpaare der Doppelpunkte von R_n und der Doppeltangenten von P_ν zusammen:

$$(4) \qquad S_n(\alpha)\,\Sigma_\nu(\alpha) = \frac{R(\alpha)}{F_2(\alpha, \alpha)} = o.$$

Man kann auch die Funktion $S_n(\alpha)$ für sich in Function von Ausdrücken, wie $\frac{R(\alpha)}{F_2(\alpha. \alpha)}$, ausdrücken. Stellt man nemlich die Formel (4) in derselben Weise für die P_ν und eine für sie existirende $R_{n'}$ auf, und fährt so fort, so kann man den Process nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen schliessen, da die Grade ν, n', ν' etc. so gewählt werden können, dass sie fortwährend abnehmen. Gelangt man so zu einem letzten Grade gleich Zwei oder Eins, so wird die bezügliche Function S oder Σ eine Constante, und es ergibt sich für $S_n(\alpha)$ eine Formel von der Art:[1])

$$(5) \qquad S_n(\alpha) = \frac{\frac{R(\alpha)}{F(\alpha, \alpha)} \cdot \frac{R''(\alpha)}{F''(\alpha, \alpha)} \cdots}{\frac{R'(\alpha)}{F'(\alpha, \alpha)} \cdot \frac{R'''(\alpha)}{F'''(\alpha, \alpha)} \cdots} = o.$$

Man wird diese Formel freilich nicht zu einer wirklichen Berechnung von $S_n(\alpha)$ benützen, denn für diesen Zweck führt die bekannte Methode von Clebsch (Crelle's Journal Bd. 63) schneller zum Ziele.

Ist die linke Seite von (1) eine viergliedrige:

$$(6) \; f_1^{n}(\lambda)\varphi_1^{\nu}(\mu) + f_2^{n}(\lambda)\varphi_2^{\nu}(\mu) + f_3^{n}(\lambda)\varphi_3^{\nu}(\mu) + f_4^{n}(\lambda)\varphi_4^{\nu}(\mu),$$

1) Von ganz analoger Natur ist z. B. die Gleichung für die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln (cf. Bachmann, die Lehre von der Kreistheilung, Vorlesung III).

so kann man aus dem obigen Verfahren eine andere Consequenz ziehen. Die Elimination von β aus (2) liefert jetzt:

$$(7)\quad R(\alpha) \equiv F_2^{n-1,\nu-1}(\alpha, \alpha) \,.\, S_{n,\nu}^{(n-1)(n-2)+(\nu-1)(\nu-2)}(\alpha) = 0,$$

wo $F_2(\alpha, \alpha) = 0$ die gemeinsamen Berührungspunkte der (räumlichen) R_n und P_ν, $S_{n,\nu}(\alpha) = 0$ aber diejenigen Sehnen von R_n darstellt, die zugleich Axen d. i. Linien zweier Ebenen von P_ν sind.

Auch hier kann $F_2(\alpha, \alpha)$ nur in der ersten Potenz auftreten, wie man z. B. dadurch beweist, dass man die linke Seite von (1) continuirlich in (6) übergehen lässt.

Aus der Formel (7) folgt mit Hilfe des Princips der speciellen Lage, die bekannte Formel:

$$(8)\quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} + n + \nu - 2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{\nu(\nu-1)}{2}$$

für die Anzahl der Sehnen einer R_n (im Raume), die zugleich Axen einer ganz beliebigen P_ν sind.

Für $\nu = 2$ ist offenbar der Ausdruck $(\lambda - \mu) F_2^{n-1,1}(\lambda, \mu)$ immer von der Form (1), w i e a u c h die Coefficienten in $F_2(\lambda, \mu)$ gewählt sind.

Zugleich lässt sich dann $\Sigma_2(\alpha)$ gleich Eins setzen.

Diese Bemerkung lässt folgende Anwendung zu. Die Aufgabe, in einer Gleichung n^{ten} Grades vermöge einer linearen Transformation der Unbekannten die Coefficienten von der ersten und $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz von λ zum Verschwinden zu bringen, führt auf zwei Gleichungen von der Art (2); denn ist die gemeinte lineare Transformation von λ:

$$(9)\qquad c\lambda' = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \beta} \text{ oder } \lambda = \frac{\lambda' c\beta - \alpha}{\lambda' c - 1},$$

so entspringen unserer Forderung, wie vermöge des Taylor'schen Satzes sofort erkennbar, zwei Gleichungen für α und β:

$$\text{(10)} \qquad \overset{n-1,1}{F_2}(\alpha\ \beta) = 0, \quad \overset{n-1,1}{F_2}(\beta,\ \alpha) = 0.$$

Setzen wir jetzt:

$$\text{(11)} \qquad (\lambda - \mu)\, F_2(\lambda, \mu) = \overset{n}{f_1}(\lambda)\, \overset{2}{\varphi_1}(\mu) + \overset{n}{f_2}(\lambda)\, \overset{2}{\varphi_2}(\mu) + \overset{n}{f_3}(\lambda)\, \overset{2}{\varphi_3}(\mu),$$

so resultirt:

„Sollen der zweite und vorletzte Coefficient einer Gleichung n^{ten} Grades mittelst einer linearen Transformation (9) der Unbekannten zum Verschwinden gebracht werden, so sind die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Paare (α, β) die Argumentenpaare der Doppelpunkte einer R_n, für die eine P_2 existirt."

Wegen des neuerdings viel studirten Falles $n = 6$ vgl. § 9, Schluss.

Ein ähnlicher Satz ergibt sich für das gleichzeitige Verschwinden des dritten und drittletzten Gliedes etc.

---

§ 8.

II. Die Abel'sche Gleichung für die Argumente eines Doppelpunktes einer R_n.

Ist (α_i, β_i) ein beliebiger Doppelpunkt einer R_n, so sind α_i, β_i die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, die bekanntlich (ebenso wie die Gleichung für sämmtliche α_i, β_i) in dem Sinne eine Abel'sche ist, dass die eine Wurzel eine rationale Function der andern ist und umgekehrt:

$$\alpha_1 = \frac{\psi(\beta_1)}{\chi(\beta_1)}, \quad \beta_1 = \frac{\psi(\alpha_1)}{\chi(\alpha_1)} \tag{1}$$

wo zugleich die Coefficienten der ganzen Funktionen ψ, χ (die für alle Doppelpunkte der R_n dieselben sind) rational von denen der R_n, d. h. der φ_i abhängen.

Es lässt sich erwarten, dass diese rationale Abhängigkeit (1) in enger Beziehung zu den projectivischen Eigenschaften der R_n, insonderheit zu ihrer Erzeugung steht.

Dies soll für diejenige Classe von R_n, für die eine P_2 existirt, (welche dann die R_n n-mal berührt) des Näheren nachgewiesen werden.

Die Gleichungen der R_n und P_2 seien wieder:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \overset{n}{f_1}(\lambda) : \overset{n}{f_2}(\lambda) : \overset{n}{f_3}(\lambda) \tag{2}$$

$$u_1 : u_2 : u_3 = \overset{2}{\varphi_1}(\mu) : \overset{2}{\varphi_2}(\mu) : \overset{2}{\varphi_3}(\mu) \tag{3}$$

so findet nach Voraussetzung (indem man sich die zur Herstellung der Form $\overset{1\ 1}{F_1}(\lambda, \mu) = \lambda - \mu$ erforderliche lineare Transformation von μ bereits ausgeführt denkt) die Zerlegung statt:

$$f_1(\lambda)\,\varphi_1(\mu) + f_2(\lambda)\,\varphi_2(\mu) + f_3(\lambda)\,\varphi_3(\mu) \tag{4}$$
$$= (\lambda - \mu)\,\overset{n-1,\,1}{F_2}(\lambda, \mu).$$

Das Nullsetzen von F_2 ergebe:

$$\mu = \frac{\overset{n-1}{\psi}(\lambda)}{\underset{}{\overset{n-1}{\chi}}(\lambda)} \tag{5}$$

so ist nach dem vorigen Paragraph die rationale Function $\frac{\psi}{\chi}$ in diesem Falle die in (1) aufgestellte.

Um die genauere Bedeutung dieser Function für die R_n zu ermitteln, stelle man die letztere in allgemeinster Weise so auf, dass für sie eine P_2 existirt.

Zu diesem Zwecke ertheilen wir für den Augenblick, was erlaubt ist, der P_2 die canonische Form:

$$\left\{(6)\quad\begin{aligned} &x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2\mu : \mu^2;\ \ 4x_1 x_3 - x_2^2 = 0.\\ &u_1 : u_2 : u_3 = \mu^2 - \mu : 1;\ u_1 u_3 - u_2^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Dann ist die R_n dadurch characterisirt, dass der Ausdruck (4) für $\lambda = \mu$ identisch verschwindet, mithin wird unter Zugrundelegung der Gleichung (6) an Stelle von (3):

(7) $$f_1(\lambda)\lambda^2 - f_2(\lambda)\lambda + f_3(\lambda) \equiv 0, \text{ oder}$$

(7') $$f_2(\lambda) = f_1(\lambda)\lambda + \frac{f_3(\lambda)}{\lambda}.$$

Da die Gleichung (7) für alle Werthe von λ gilt, speciell also für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, so dürfen wir setzen:

(8) $$\left\{\begin{aligned} &\varrho\, \overset{n}{f_1}(\lambda) = \overset{n-1}{\chi}(\lambda)\\ &\varrho\, \overset{n}{f_3}(\lambda) = \lambda \overset{n-1}{\psi}(\lambda)\end{aligned}\right.$$

wo ψ, χ willkürliche, ganze Functionen vom Grade $(n-1)$, und ϱ ein beliebiger Factor ist. Dann kommt für $f_2(\lambda)$ vermöge (7'):

(9) $$\varrho f_2(\lambda) = \lambda\chi(\lambda) + \psi(\lambda)$$

womit die Gleichung der R_n (2) in die Gestalt übergeht:

(10) $$\frac{x_2}{x_1} = \lambda + \frac{\psi(\lambda)}{\chi(\lambda)},\ \frac{x_3}{x_1} = \lambda \cdot \frac{\psi(\lambda)}{\chi(\lambda)}.$$

Dann sind aber λ und $\dfrac{\psi(\lambda)}{\chi(\lambda)}$ die Argumente der beiden Tangenten, die vom Punkte (x) (10) an die P_2 (6) gehen, und wir haben den Satz:[1])

„Die allgemeinste R_n (2), für die eine P_2 (3) existirt ist characterisirt als Ort der Schnittpunkte je zweier solcher Tangenten λ, μ von P_2, die durch die rationale Beziehung (5) verknüpft sind. Dabei ist die rationale Function $\frac{\psi}{\lambda}$ die allgemeinste der Ordnung $n-1$.

1) Auf kürzerem Wege wäre man zu diesem Satze durch einfache Ausmultiplication der rechten Seite von (4) gelangt.

Dann ist für jeden Doppelpunkt (α, β) der R_n:

$$\alpha = \frac{\psi(\beta)}{\chi(\beta)}; \ \beta = \frac{\psi(\alpha)}{\chi(\alpha)}$$

und die n Punkte, in denen sich die R_n und P_2 berühren, hängen von der Gleichung ab:

$$F_2(\lambda, \lambda) = \lambda\chi(\lambda) - \psi(\lambda) = 0$$

---

§ 9.

III. Ueber den Zusammenhang zwischen Lage und Argumenten der Doppelpunkte einer R_n.

Als letzte Anwendung wählen wir Sätze aus einem bis jetzt, wie es scheint, noch wenig beachteten Capitel der Geometrie der ebenen R_n. Es beschäftigt sich mit Lageneigenschaften ihrer Doppelpunkte, auf Grund der Beziehungen zwischen ihren Argumentenpaaren.[1])

Zur Illustration diene der soeben algebraisch studirte Fall derjenigen R_n, für die eine P_2 existirt.

Gibt man der Gleichung der P_2 vor der Hand wieder die canonische Gestalt (6), so folgt aus der, in (10) ausgedrückten Beziehung beider Curven der Satz, der den Erörterungen dieses Abschnitts zur Basis dient:

(A) „Legt man in der Ebene einer, eine P_2 zulassenden[2]) R_n dasjenige Coordinatensystem zu Grunde, bei welchem die Gleichung der P_2 die Form (6) annimmt, und sind in diesem System y_1, y_2, y_3 die Coordinaten irgend eines Doppelpunktes (α, β) der R_n, so sind α, β die Wurzeln der Gleichung:

(1) $$y_1\lambda^2 - y_2\lambda + y_3 = 0$$

---

1) Vgl. „Ap." § 27.

2) Dies sei ein anderer Ausdruck dafür, dass für die R_n eine P_2 existirt.

und α, β sind zugleich die Argumente der beiden Tangenten, die vom Doppelpunkte an die P_2 gehen."

Man denke sich jetzt z. B. den Strahlbüschel, der im Doppelpunkte (α, β) sein Centrum hat. Jeder Strahl des Büschels schneidet aus der R_n noch $(n-2)$ Punkte mit den Argumenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-2}$ aus. Sämmtliche Punktgruppen dieser Art hängen von einer Gleichung ab:

$$\text{(2)} \qquad \overset{n-2}{f}(\lambda) + k\overset{n-2}{g}(\lambda) = 0$$

wo k mit dem Strahle des Büschels variirt. Nennt man z. B. (λ_1, λ_2) ein Elementenpaar der Gleichung (2), so sind jedenfalls sämmtliche Argumentenpaare (α_i, β_i) der Doppelpunkte (excl. α, β) solche Elementenpaare von (2).

Die geometrische Repräsentation einer solchen Gleichung (2) („Involution $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung"), die zu Stande kommt, wenn man jede Wurzel λ_i von (2) als Parameter einer bestimmten Tangente eines Klassenkegelschnitts P_2 (und demnach jedes Paar (λ_i, λ_k) von Elementen von (2) als Bestimmungsstücke eines Punktes in der Ebene der P_2) auffasst, darf als bekannt[1]) angesehen werden. Sie liefert in Verbindung mit dem Satze (A) das Resultat:

(B) „Existirt für eine ebene R_n eine P_2, so lege man nach dem Vorgange von Clebsch durch alle Doppelpunkte der R_n, irgend einen ausgenommen, die dadurch bestimmte Curve C der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung. Jede dieser $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Curven C erscheint dann als Ort der Eckpunkte von unendlich vielen, der P_2 umbeschriebenen, vollständigen $(n-2)$-Seiten."

Der einfachste Fall, $n = 5$, d. i. der einer allgemeinen R_5, soll noch etwas verfolgt werden. Er ist besonders da-

1) Man sehe etwa „Ap." § 36.

durch bemerkenswerth, dass bei ihm[1]) jedenfalls die Umkehrung von (B) gilt, d. h. algebraisch gesprochen:

„Unterwirft man sechs Werthepaare (α_i, β_i) den (drei) Bedingungen, dass immer je fünf von ihnen Elementenpaare (je) einer Involution dritter Ordnung sind, so sind die sechs Paare (α_i, β_i) die Argumentenpaare der Doppelpunkte einer allgemeinen (projectivisch eindeutig bestimmten) R_5."

Dies folgt aus der Construction einer R_5 aus einer R_4 vermöge einer ein-eindeutigen, quadratischen Transformation.

Sätze von der Art, wie dieser letzte, können zu einer fruchtbaren Quelle geometrischer Wahrheiten werden, wenn man sich mit Hilfe geeigneter Interpretationen über das specielle Gebiet der R_n erhebt.

Sieht man z. B., wie dies in § 4 ausgeführt wurde, die Argumente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ irgend dreier, in einer Geraden liegenden Punkte einer R_5 als Bestimmungsstücke eines Raumpunktes an, der dann auf eine cubische Raumcurve als „Coordinatencurve" bezogen erscheint, so lässt sich der letzterwähnte, algebraische Satz in verschiedene Formen kleiden: man kann ihn auf eine allgemeine Fläche dritter Ordnung und ihre cubischen Raumcurven, oder auch, unabhängig davon, auf ein System von sechs windschiefen Raumgeraden beziehen.

Wählen wir die letztere Form, so sind wir in der Lage, folgenden Satz auszusprechen, der die Ausnahmefälle einer bekannten Aufgabe erörtert:

(C) „Es gibt nur dann eine endliche Anzahl (sechs) von eigentlichen cubischen Raumcurven, die sechs beliebige (windschiefe) Geraden zu Sehnen haben, solange es keine, oder eine, oder zwei Gerade gibt, die immer fünf der sechs Geraden treffen.

Gibt es solcher, fünfmal treffenden Geraden drei oder vier, so existirt gar keine eigentliche cubische Raumcurve der verlangten Art.

---

1) Auch für $n = 6$ ist dies der Fall. cf. „Ap." § 31.

Gibt es solcher Geraden fünf, und damit auch sechs, so hat man eine zweifach[1]) unendliche Schaar von derartigen cubischen Raumcurven. Dann und nur dann bilden die sechs gegebenen Geraden eine halbe Doppelsechs einer Fläche dritter Ordnung."

Die Betrachtungen dieses Abschnitts kann man ebensogut auf R_n ausdehnen, die eine P_3, P_4 etc. zulassen, doch gestalten sich die bezüglichen Sätze erheblich complicirter.

Zum Schlusse wollen wir noch den letzten Satz des § 7 in einen Lagensatz überführen, beschränken uns aber dabei auf den Fall $n = 6$, da dieser, erst in neuerer Zeit algebraisch eingehender[2]) studirte, zu besonders interessanten Resultaten geführt hat. Wir recapituliren davon für unseren Zweck Folgendes:

„Die Figur zweier perspectivischen Dreiecke in einer Ebene ist zu sich selbst polarreciprok in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt P_2, und zwar setzt sie sich, doppelt gezählt, aus fünf Polvierecken von P_2 zusammen.

---

1) Unter diesen befinden sich, wie sich bei Besprechung der zweiten Gruppe von Fällen in § 5 ergab, immer einfach unendlich viele, die zu irgend einer der dualistischen Raumcurven dritter Classe (welche also die sechs gegebenen Geraden zu Axen besitzen), in der Beziehung stehen, dass es ausser jenen sechs Geraden noch einfach unendlich viele gibt, welche zugleich Sehnen der einen und Axen der andern Curve sind.

2) Brill: Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades. Math. Ann. Bd. 20.

„ Ueber das Polvierseit Ebenda.

Stephanos, Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une méme Jacobienne. Mémoires, présentés pardivers savants . . . Tome XXVII.

Kautor, Ueber eiue Configuration (3, 3)10 und unicursale Curven. Math. Ann. Bd. 21. Endlich „Ap." §§ 27, 29, 30, 32.

Unter den Kegelschnitten des irgend einem dieser Polvierecke von P_2 umbeschriebenen Büschels befinden sich sechs, P_2 einmal berührende. Diese sechs Berührungspunkte B_i auf P_2 sind für alle fünf Polvierecke dieselben."

Dann liefert die Methode dieses Paragraphen mit Rücksicht auf den Satz des § 7 folgende Ergänzung:

(D) „Es gibt eine bestimmte rationale Curve sechster Ordnung R_6, welche in den zehn Punkten der Configuration zweier perspectivischen Dreiecke ihre Doppelpunkte besitzt. Sie berührt den Kegelschnitt P_2 in den sechs Punkten B_i, und P_2 ist ein für die R_6 existirender Klassenkegelschnitt.

Ist $b_\lambda^6 = 0$ die Gleichung für die Argumente der Tangenten von P_2 in den Punkten B_i, so ist die R_6 der Ort der Schnittpunkte je zweier Tangenten λ, μ von P_2, welche durch die Gleichung $b_\lambda^5\, b_\mu = 0$ verknüpft sind."

§ 10. Erläuterungen zu den Tabellen.

Wegen der Bedeutung der uneigentlichen Zerlegungen erster und zweiter Art, im Gegensatz zu den eigentlichen, sei auf § 1 und § 2 verwiesen. Der Existenzbeweis für die Zerlegungen der Tabellen ist in § 5 geführt, die Abbildung der R_5 auf die F_3 ist in § 4 besprochen.

Bei dem, jedesmal über den Tabellen stehenden Schema sind die Functionszeichen g, F_1, F_2, F_3 weggelassen.

Die erste Columne in der ersten Tabelle gibt die endliche Anzahl von Zerlegungen an, falls eine solche existirt, die zweite Columne die Mannigfaltigkeit M_ν der Zerlegungen. Dann folgen in den nächsten Columnen die Anzahlen für die Grade 5, ν, p_1, π_1, p_2, π_2 und einmal noch für p_3, π_3. Dabei ist $\Sigma p = 5$, $\Sigma\pi = \nu$. Σf_{rs} ist in allen Fällen, excl. XIV $= f_{12} = p_1\pi_2 + p_2\pi_1$, und nur in XIV gleich

$$(p_1\pi_2 + p_2\pi_1) + (p_1\pi_3 + p_3\pi_1) + (p_2\pi_3 + p_3\pi_2).$$

P_ν bedeutet die Constantenanzahl einer allgemeinen, ebenen, rationalen Curve n^{ter} Classe i. e. $3\nu - 1$.

Als Fläche dritter Ordnung F_3 kann man irgend eine allgemeine Fläche dieser Ordnung nehmen, und auf dieser irgend eine halbe Doppelsechs herausgreifen, deren Geraden mit a_i (i. $= 1, 2, \ldots 6$) bezeichnet werden.

Die andere Hälfte der Doppelsechs bestehe aus den Geraden b_i, die 15 übrigen Geraden der Fläche seien die c_{ik}.

Die Geraden, Kegelschnitte und cubischen Raumcurven auf der F_3 sind mit φ_1, φ_2, φ_3 bezeichnet: die Zeichen in der beigesetzten Klammer geben im ersten Falle die Gerade selbst an, im zweiten die mit dem Kegelschnitt in einer Ebene liegende Gerade, endlich im dritten[1]) die sechs Geraden, welche die cubische Raumcurve zu Sehnen hat.

Der Inhalt der ersten Tabelle lässt sich so zusammenfassen:

„Sieht man von den, leicht direct behandelbaren Fällen V, VIII, XI ab, so sind alle eigentlichen Zerlegungen der Tabelle repräsentirt durch sämmtliche Gerade, Kegelschnitte, cubische Raumcurven auf einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung, wo unter den letzteren noch gewisse ausgezeichnete, die zu einer beliebig, aber bestimmt herausgegriffenen halben Doppelsechs der Fläche in einer besonderen Beziehung stehen, für sich figuriren."

Die Fälle (a), (b), (c), (d) sind von den übrigen abgetrennt, weil bei ihnen die Zahl ν schon grösser als fünf ist.

Bemerkenswerth ist noch, dass dasselbe Schema, wie in (a), (b), durchaus verschiedene eigentliche Zerlegungen darstellen kann. Ebenso kann, wie der letzte Fall der dritten Tabelle, verglichen mit dem zweiten der zweiten Tabelle zeigt, ein- und dasselbe Schema einer uneigentlichen Zerlegung erster, wie zweiter Art zugehören.

---

1) Die Indices i, k, l, m, n, p sind in irgend einer Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Tabelle der Schemata, welche die eigentlichen Zerlegungen der Gleichungen fünften Grades mit zwei linearen Parametern repräsentiren.

		5	ν		p_1,	π_1	p_2,	π_2	p_3,	π_3				
	M_ν	(λ,	μ)	=	(λ,	μ)	(λ,	μ)	(λ,	μ)	Σf_{rs}	p_ν	Nr.	Die Bilder auf der F_3
	1	5	1		1	0	4	1			1	2	I	Gewisse $\varphi_3(a_i)$.
6	0	„	1		2	0	3	1			2	2	II	Die $\varphi_1(a_i)$.
1	0	„	2		1	1	4	1			5	5	III	Eine specielle $\varphi_3(b_i)$.
15	0	„	2		2	1	3	1			5	5	IV	Die $\varphi_1(c_{ik})$.
	2	„	3		1	1	4	2			6	8	V	
	1	„	3		2	1	3	2			7	8	VI	Die $\varphi_2(b_i)$.
6	0	„	3		3	1	2	2			8	8	VII	Die $\varphi_1(b_i)$.
	4	„	4		1	1	4	3			7	11	VIII	
	2	„	4		2	1	3	3			9	11	IX	Die $\varphi_3(a_i)$.
	1	„	4		2	2	3	2			10	11	X	Die $\varphi_2(c_{ik})$.
	6	„	5		1	1	4	4			8	14	XI	
	2	„	5		2	2	3	3			12	14	XII	Die $\varphi_3\begin{pmatrix} a_i, & a_k, & a_l \\ c_{mn}, & c_{mp}, & c_{np} \end{pmatrix}$.
	1	„	5		3	2	2	3			13	14	XIII	Die $\varphi_3(a_i)$.
80	0	„	5		1	1	1	1	3	3	14	14	XIV	Specielle φ_3 von XII.
	2	„	6		2	3	3	3			15	17	(a)	Die φ_3 $\begin{pmatrix} a_i, & & b^i \\ c_{kl}, & c_{km}, & c_{kn}, & c_{kp} \end{pmatrix}$.
	2	„	6		2	3	3	3			15	17	(b)	Die ebenen φ_3 ($p = 0$).
	2	„	7		2	4	3	3			18	20	(c)	Die $\varphi_3\begin{pmatrix} b_m, & b_n, & b_p \\ c_{ik}, & c_{il}, & c_{kl} \end{pmatrix}$.
	2	„	8		2	5	3	3			21	23	(d)	Die $\varphi_3(b_i)$.

Tabelle der Schemata, welche ausschliesslich uneigentliche Zerlegungen repräsentiren.

A. Erster Art.

5 $(\lambda,$	ν $\mu)$	=	$\mathfrak{p}_1,$ $(\lambda,$	π_1 $\mu)$	$\mathfrak{p}_2,$ $(\lambda,$	π_2 $\mu).$	$\mathfrak{f}_{12}.$	$P_\nu.$
5	4		3	1	2	3	11	11
„	4		1	2	4	2	10	11
„	5		2	1	3	4	11	14
„	5		3	1	2	4	14	14
„	5		1	2	4	3	11	14
„	5		4	2	1	3	14	14

B. Zweiter Art.

5 $(\lambda,$	ν $\mu)$	=	$\mathfrak{p}_1,$ $(\lambda,$	π_1 $\mu)$	$\mathfrak{p}_2,$ $(\lambda,$	π_2 $\mu).$	$\mathfrak{f}_{12}.$	$P_\nu.$
5	2		1	0	4	2	2	5
„	3		1	0	4	3	3	8
„	4		1	0	4	4	4	11
„	5		1	0	4	5	5	14
„	2		2	0	3	2	4	5
„	3		2	0	3	3	6	8
„	4		2	0	3	4	8	11
„	5		2	0	3	5	10	14
„	4		1	2	4	2	10	11