Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1925. Heft I

Januar- bis Junisitzung

München 1925
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Raumeinteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden, von denen je vier sich in einem Punkt schneiden.

Von **R. Sauer** in München.

Mit 9 Textfiguren.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 13. Juni 1925.

In einer von mir gemeinsam mit Herrn H. Graf durchgeführten Arbeit[1]) wurde gezeigt, daß die Tangenten jeder beliebigen ebenen Kurve 3. Klasse so angeordnet werden können, daß sie sich zu je dreien in einem Punkte schneiden und dadurch eine Einteilung der Ebene in Dreiecke herbeiführen. Diese Einteilung der Ebene ist die allgemeinste durch gerade Linien vermittelte Dreieckseinteilung, bei der um jeden Knotenpunkt sechs Dreiecke herumliegen. Einen Sonderfall stellt das Netz der gleichseitigen Dreiecke dar. Dieses wird durch Hinzunahme eines vierten Parallelstrahlenbüschels zu einem Möbiusschen Netz. Die Kurve 3. Klasse, deren Tangenten das Netz der gleichseitigen Dreiecke erzeugen, ist zu drei in gerader Linie liegenden Punkten ausgeartet. Die allgemeinste vorerwähnte Dreieckseinteilung durch gerade Linien erscheint sonach als eine naturgemäße Verallgemeinerung des Netzes der gleichseitigen Dreiecke, indem an Stelle des in gerader Linie liegenden Punktetripels irgend eine beliebige Kurve 3. Klasse tritt, welche sämtliche netzerzeugenden Geraden berührt und den vom Dreiecksnetz überdeckten Bereich der Ebene begrenzt.

[1]) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme usw., Sitzungsb. der bayer. Akad. der Wiss., math.-naturw. Abt., 1924, p. 119 ff. Vgl. außerdem: S. Finsterwalder, Mech. Bez. bei der Flächendef., Jahresbericht der Mathematikervereinigung, 6, 1897.

Eine Verallgemeinerung der angedeuteten Betrachtungen ist nach mehrfachen Richtungen möglich. Als bemerkenswert erweist sich insbesondere eine Übertragung der Gedankengänge auf den Raum, wobei an Stelle der drei Geradensysteme vier Ebenensysteme gesetzt werden. Es tritt hier die Analogie zwischen den ebenen Kurven 3. Klasse und den Developpablen 4. Klasse 1. Spezies deutlich zu Tage.

Die Ergebnisse der Verallgemeinerung auf den Raum sollen in diesem Berichte in gedrängter Form mitgeteilt werden, ohne daß dabei alle Einzelheiten, vor allem die verschiedenen geometrischen Ableitungen und Beweise, ausführlich zur Sprache kommen können.

§ 1. Die allgemeinste durch Ebenen vermittelte Raumeinteilung in Tetraeder und Oktaeder entsteht durch passende Anordnung der Ebenen irgend einer beliebigen Developpablen 4. Klasse 1. Spezies. Die Developpable samt dem zugehörigen Polyedergefüge kann linear erzeugt werden.

Dem bekannten aus gleichseitigen Dreiecken gebildeten Netz in der Ebene ist die Raumeinteilung in reguläre kongruente Tetraeder und Oktaeder analog, welche durch vier Parallelebenenbüschel in ähnlicher Weise vollzogen wird wie das Dreiecksnetz durch drei Parallelstrahlenbüschel.

Wir stellen folgende Frage:

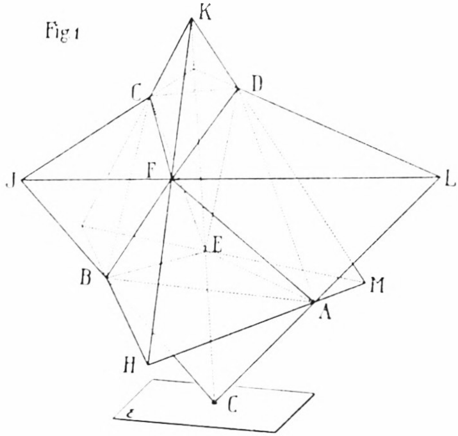
> Welches ist die allgemeinste Einteilung des Raumes durch Ebenen, von denen je vier sich in einem Punkt treffen?

Die gesuchten Raumeinteilungen können durch eine Deformation des regulären Tetraeder-Oktaeder-Gefüges entstanden gedacht werden, wobei die erzeugenden Ebenen eben bleiben und die Zusammenhangsverhältnisse sich nicht ändern. An Stelle der regulären Tetraeder treten nicht reguläre Tetraeder, an Stelle der regulären Oktaeder allgemeinere Achtflächner, welche im folgenden schlechthin als Oktaeder bezeichnet werden und welche durch die Eigenschaft gekennzeichnet sind, daß in jeder der sechs Oktaederecken vier Seitendreiecksebenen zusammentreffen.

Um die allgemeinste Raumeinteilung von der verlangten Beschaffenheit zu finden, geben wir eine lineare Konstruktionsmethode an, welche auf die Erzeugung jedes beliebigen durch Ebenen hergestellten Tetraeder-Oktaeder-Gefüges anwendbar ist.

Zugrunde gelegt wird ein beliebiger Achtflächner $ABCDEF$ (Fig. 1). Durch Erweiterung der Seitenebenen ergeben sich die acht Nachtbartetraeder. Durch eine der äußeren Tetraederecken, z. B. durch G, kann eine Ebene ε beliebig vorgegeben werden. Dadurch ist dann etwa das zwischen den Tetraedern $ABEG$ und $ABFH$ liegende Oktaeder aus sieben Ebenen bestimmt. Die achte Oktaederebene wird durch lineare Konstruktion gefunden und legt wiederum, ähnlich wie vorher die Ebene ε, ein Oktaeder fest, nämlich etwa den zwischen den Tetraedern $ABFH$ und $BCFJ$ einzuschachtelnden Achtflächner. Fügt man an die Oktaeder jeweils die Nachbartetraeder an, so läßt sich dieser lineare Prozeß Schritt für Schritt unbegrenzt fortsetzen, ohne daß irgend welche Willkürlichkeiten dazu treten.

Fig 1



Wir behaupten, daß der Erzeugungsprozeß sich schließt und dadurch tatsächlich ein Polyedergefüge der verlangten Art liefert, d. h. daß man jedesmal wieder auf die ursprüngliche Ebene, z. B. auf ε, zurückkommt, wenn man die Konstruktion auf irgend einem Wege im Kreise herumführt, z. B. über die Punkte G, H, J, K, L, M, G. Um dies einzusehen, ist zunächst zu beweisen, daß alle Ebenen eines Tetraeder-Oktaeder-Gefüges, wie sie in den beschriebenen Erzeugungsprozeß eingehen, einer Developpablen 4. Klasse 1. Spezies angehören, d. h. eine Schar von Flächen 2. Klasse umhüllen. Diese fundamentale Tatsache ergibt sich in analoger Weise wie die in dem eingangs zitierten Sitzungsbericht abgeleitete Eigenschaft der ebenen Dreiecksnetze, daß alle netzbildenden Geraden eine Kurve 3. Klasse umhüllen. An Stelle des dort zugrunde gelegten Satzes über die neun Grundstrahlen einer Schar von Kurven 3. Klasse und eines Satzes von Chasles[1]) tritt hier folgender Satz:

> Wenn sieben Ebenen eines allgemeinen Oktaeders einer Developpablen 4. Klasse 1. Spezies angehören, so berührt auch die achte Oktaederebene diese Developpable.[2]).

Wenn man nun weiß, daß alle Ebenen des Tetraeder-Oktaeder-Gefüges eine Developpable 4. Klasse 1. Spezies umhüllen, so findet man den zu beweisenden Schließungssatz in einfacher Weise, weil durch keinen Punkt mehr als vier Ebenen an eine Developpable 4. Klasse 1. Spezies gelegt werden können. Weiterhin ist aus der Eindeutigkeit der Konstruktionen ersichtlich, daß jedes beliebige Polyedergefüge von der verlangten Beschaffenheit auf die angegebene Weise erzeugt werden kann, wenn man nur das Ausgangsoktaeder und die Ebene ε entsprechend wählt.

Ebenso wie bei der regulären Tetraeder-Oktaeder-Einteilung treffen auch bei diesen allgemeineren Polyedergefügen in jedem Knotenpunkt, in denen sich vier Ebenen nach sechs Kanten schneiden, sechs Oktaeder und acht Tetraeder zusammen, welche insgesamt ein größeres Oktaeder bilden. Längs jeder Polyederkante sind zwei Oktaeder und zwei Tetraeder benachbart, jede Polyederseitenebene trennt ein Oktaeder von einem Tetraeder.

Die das Polyedergefüge umhüllende Developpable teilt den Raum in solche Gebiete ein, durch dessen Punkte je vier, und in solche Bereiche, durch dessen Punkte nur je zwei oder überhaupt keine reellen Ebenen der Developpablen gehen. Das Polyedergefüge ist nur in den erstgenannten Gebieten reell vorhanden

---

[1]) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme usw., Sitzungsb. der bayer. Akad. der Wiss., math.-naturw. Abt., 1924, p. 124.

[2]) Th. Reye, Die Geometrie der Lage, III. Teil, 1892, p. 195. Aus der dort angegebenen Aufgabe 46 folgt leicht der oben zitierte Satz.

und schlägt an der umhüllenden Developpablen um, ähnlich wie sich die ebenen Dreiecksnetze an der umhüllenden Kurve 3. Klasse umwenden. Es kommt dadurch eine mehrfache, im allgemeinen unendlich vielfache Raumerfüllung durch das Polyedergefüge zustande. Nur bei passender Wahl des Anfangsoktaeders und der Ebene ε liefert der Erzeugungsprozeß ein den Raum einfach erfüllendes Polyedergefüge, indem nach dem Umschlagen an der Developpablen wiederum die vorherigen Ebenen sich ergeben.

Wie jedes Polyedergefüge eine Developpable 4. Klasse 1. Spezies als Umhüllende hat, so können umgekehrt die Ebenen jeder beliebigen Developpablen 4. Klasse 1. Spezies so angeordnet werden, daß sie den Raum in Tetraeder und Oktaeder zerlegen; denn man kann die Ebenen des Ausgangsoktaeders und die Ebene ε in dem vorher beschriebenen Erzeugungsprozeß so wählen, daß sie eine vorgegebene Developpable 4. Klasse 1. Spezies berühren. Der Anfangsknotenpunkt und die Größe des Anfangsoktaeders (die „Zellenweite“ des Polyedergefüges) sind dabei noch willkürlich.

Wir formulieren die bisherigen Ergebnisse in folgendem Satz:

> Jede beliebige Developpable 4. Klasse 1. Spezies kann durch eine lineare Methode ebenenweise erzeugt werden, wobei die einzelnen konstruierten Ebenen den Raum in Tetraeder und Oktaeder einteilen. Dieses Polyedergefüge ist die allgemeinste durch Ebenen vermittelte Tetraeder-Oktaeder-Einteilung.

Bemerkung: Durch duale Übertragung ergibt sich eine denkbar einfache lineare Konstruktionsmethode für die allgemeine Raumkurve 4. Ordnung 1. Spezies, d. h. den vollständigen Durchschnitt von zwei Flächen 2. Ordnung, sowie der bemerkenswerte Satz:

Auf jeder Raumkurve 4. Ordnung 1. Spezies und nur auf diesen Raumkurven können Punktsysteme angegeben werden, welche die Eigenschaft haben, daß jede Ebene durch drei Punkte des Systems die Raumkurve noch in einem weiteren Punkte des Systems schneidet.

§ 2. Einzelne besondere Eigenschaften der beschriebenen Polyedergefüge. Analytische Bemerkungen.

Die Kanten der Polyeder einer Tetraeder-Oktaeder-Einteilung liegen in geraden Linien, in welchen sich je zwei Ebenen der umhüllenden Developpablen 4. Klasse 1. Spezies schneiden. Die Gesamtheit dieser Schnittlinien, die man als Achsen zu bezeichnen pflegt, bildet eine Strahlenkongruenz 6. Ordnung 2. Klasse.[1]) Dem Ergebnis des vorigen Paragraphen können wir jetzt auch diese Fassung geben:

> Die Geraden der Achsenkongruenz 6. Ordnung 2. Klasse einer beliebigen Developpablen 4. Klasse 1. Spezies können so angeordnet werden, daß je sechs Strahlen durch einen Punkt hindurchgehen, wobei sie zu je dreien in vier durch den Punkt gehenden Ebenen verlaufen, und daß weitere Schnittpunkte nicht eintreten. Die so ausgewählten Strahlen sind identisch mit den Kanten eines durch Ebenen erzeugten Tetraeder-Oktaeder-Gefüges.

Bemerkung: Ein dualer Satz gilt für die Sehnenkongruenz einer beliebigen Raumkurve 4. Ordnung 1. Spezies.

Die in irgend einer Ebene des Polyedergefüges liegenden Achsen schneiden sich zu je dreien in einem Punkt. Jede Ebene trägt sonach ein Dreiecksnetz. Die umhüllende Kurve 3. Klasse ist die Schnittkurve der betreffenden Ebene mit der Developpablen. Letztere stellt die beiden Mäntel für die Brennfläche der Achsenkongruenz dar.

Sämtliche Dreiecksnetze auf den Ebenen eines Polyedergefüges werden von zueinander projektiven Kurven 3. Klasse umhüllt; denn die Kurven haben das nämliche Salmonsche Doppelverhältnis, welches gleich ist dem konstanten Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte der Developpablen mit einer beweglichen Achse.[2]) Für Polyedergefüge, deren umhüllende Developpable zerfällt, treten Besonderheiten ein. Zerfällt beispielsweise die Deve-

---

[1]) O. Staude, Enz. der math. Wiss., III 2, Heft 2, p. 240, Nr. 114.

[2]) O. Staude, Enz. der math. Wiss., III 2, Heft 4, p. 241, Nr. 116.

loppable in einen Zylinder und zwei Ebenenbüschel, deren Achsen sich schneiden und den Zylinder berühren, so tragen die Tangentialebenen des Zylinders Dreiecksnetze, deren Umhüllende zu Punktetripeln ausarten, die Ebenen der Ebenenbüschel dagegen tragen Netze, deren Umhüllende in Kegelschnitt und Punkt zerfallen.

Für die analytische Behandlung des Problems legt man zweckmäßig die Parameterdarstellung mittels der σ-Funktionen zugrunde:

$$\varrho u_1 = \prod_{i=1}^{i=4} \sigma(\lambda - \alpha_i), \qquad \varrho u_2 = \prod_{i=1}^{i=4} \sigma(\lambda - \beta_i),$$

$$\varrho u_3 = \prod_{i=1}^{i=4} \sigma(\lambda - \gamma_i), \qquad \varrho u_4 = \prod_{i=1}^{i=4} \sigma(\lambda - \delta_i).^{1)}$$

Die u_i sind homogene Ebenenkoordinaten, ϱ ist ein willkürlicher Proportionalitätsfehler, λ bedeutet den laufenden Parameter und für die Koeffizienten gilt die Relation

$$\sum_{i=1}^{i=4} \alpha_i = \sum_{i=1}^{i=4} \beta_i = \sum_{i=1}^{i=4} \gamma_i = \sum_{i=1}^{i=4} \delta_i .$$

Die Quotienten u_i/u_k sind elliptische Funktionen 4. Ordnung. Ihr Modul gibt das vorhin erwähnte charakteristische Doppelverhältnis.

Die Parameterwerte der vier in einem Punkte sich schneidenden Ebenen sind bei geeigneter Wahl des Anfangspunktes für die Zählung von λ nach dem Abelschen Theorem verbunden durch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2\,\omega_1,\ 2\,\omega_2),^{1)}$$

wenn $2\,\omega_1$ und $2\,\omega_2$ die Perioden der elliptischen Funktionen sind. Für reelle Developpable ist die eine Periode reell, die andere rein imaginär.

Die Anordnung der Ebenen zu einem Tetraeder-Oktaeder-Gefüge geschieht nun lediglich dadurch, daß man vier Ebenensysteme ansetzt:

---

[1]) H. Burkhardt, Elliptische Funktionen, 1899, p. 330 ff.; ferner A. Clebsch, Journal für Mathematik, 63, 1864, p. 235, sowie A. Clebsch, ebenda 64, 1865, p. 224; schließlich O. Staude, Enz. der math. Wiss., III 2, Heft 4, p. 239, Nr. 113.

$$\lambda = \lambda_1' + \nu_1 \Delta\lambda, \qquad \lambda = \lambda_2' + \nu_2 \Delta\lambda,$$
$$\lambda = \lambda_3' + \nu_3 \Delta\lambda, \qquad \lambda = \lambda_4' + \nu_4 \Delta\lambda.$$

λ_i' und $\Delta\lambda$ sind konstant, ν_i bedeutet irgend welche ganzen positiven oder negativen Zahlen oder die Null. Die Konstanten λ_i', welche der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i' \equiv 0 \;(\mathrm{mod.}\; 2\,\omega_1\,,\; 2\,\omega_2)$$

genügen sollen, repräsentieren den willkürlichen Anfangsknotenpunkt, durch verschiedene Wahl von $\Delta\lambda$ kann das Raumgefüge beliebig eng- oder weitzellig gestaltet werden und geht, wenn $\Delta\lambda$ durch das Differential dl ersetzt wird, in eine infinitesimale Raumeinteilung über. Es folgt aus der auf der vorangehenden Seite angegebenen Schnittbedingung, daß durch den Schnittpunkt von drei Ebenen dreier Systeme immer noch eine Ebene des vierten Systems hindurchgeht. So erscheint unser Polyedergefüge als eine sehr anschauliche geometrische Interpretation des Abelschen Theorems für Developpable 4. Klasse 1. Spezies.

Für $\lambda_1' = \lambda_1' = \lambda_3' = \lambda_4' = 0$ und Δl gleich einem Teiler der reellen Periode der elliptischen Funktionen ergeben sich die den Raum einfach erfüllenden, durch eine endliche Anzahl von Ebenen gebildeten Polyedergefüge. Die Ebene $\nu_i = 0$ ist Schmiegungsebene für einen stationären Punkt der Rückkehrkurve der Developpablen.

Die bisherigen analytischen Ansätze gelten für die singularitätenfreie Developpable 4. Klasse 1. Spezies (Ordnung $m = 12$, Rang $r = 8$).[1]) Bei den Developpablen mit Doppeltangentialebene ($m = 6$; 4 und $r = 6$; 5)[1]) arten die elliptischen Funktionen zu trigonometrischen bzw. hyperbolischen oder rationalen Funktionen aus, ohne daß die sonstigen Überlegungen sich wesentlich ändern.

Setzt man an Stelle von $\Delta\lambda$ einen Teiler von $\Delta\lambda$, so erhält man ein Polyedergefüge, welches als Unterteilung des ursprünglichen Polyedergefüges erscheint. Bei der Unterteilung des Polyedergefüges werden zugleich die in den Polyederebenen liegenden Dreiecksnetze unterteilt; umgekehrt kann man von der Unterteilung dieser Dreiecksnetze aus zur Unterteilung der Polyedergefüge gelangen.

---

[1]) G. Salmon, Cambr. Dubl. math. J. 5, 1850, p. 37.

§ 3. Eine Klassifikation der sämtlichen durch Ebenen erzeugten Tetraeder-Oktaeder-Gefüge.

Man gelangt zu einer lückenlosen Aufzählung der von Ebenen erzeugten Tetraeder-Oktaeder-Gefüge, indem man die verschiedenen Typen der Developpablen 4. Klasse 1. Spezies sowie ihre Ausartungen betrachtet. Zu jeder Developpablen gehört dann ein infinitesimales Polyedergefüge, aus dem sich die Polyedergefüge mit endlicher Zellenweite herausgreifen lassen. Die folgenden Ausführungen beziehen sich vornehmlich auf die einfach geschlossenen, d. h. den Raum einfach ausfüllenden Raumeinteilungen.

A. Die Developpablen 4. Klasse 1. Spezies ohne Singularität.

Die Doppelkurve besteht aus den vier Kegelschnitten der von der Developpablen umhüllten Schar von Flächen 2. Klasse. Nach der Realität der Doppelkegelschnitte und der Hauptebenen, in denen sie liegen, unterscheidet man vier Typen von Developpablen.[1])

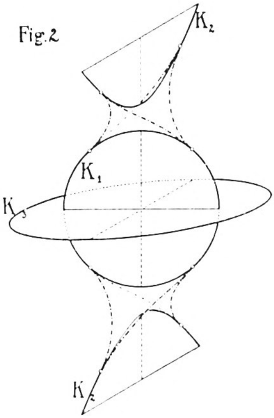
I. Alle vier Kegelschnitte und alle vier Hauptebenen sind reell.

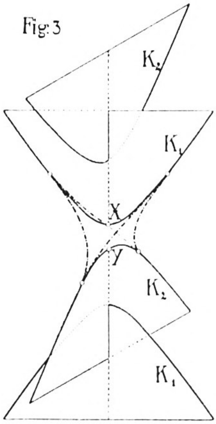
Die Kegelschnitte sind in projektiver Normierung in Fig. 2 dargestellt. K_1 und K_3 sind Kreise, K_2 ist eine Hyperbel. K_1, K_2 und K_3 liegen in drei zueinander senkrechten Ebenen, der vierte Kegelschnitt K_4 liegt unendlich fern. Die Developpable besteht aus zwei „paaren" Ebenenzügen mit je vier Spitzen für beide Zweige der Rückkehrkurve (— strichpunktiert gezeichnet —).

II. Zwei Kegelschnitte und zwei Hauptebenen sind reell.

Die reellen Kegelschnitte, die Hyperbeln K_1, K_2, sind in Fig. 3 verdeutlicht; sie liegen in zueinander senkrechten Ebenen, ihre Mittelpunkte befinden sich auf der gemeinsamen reellen Hauptachse außerhalb der Strecke XY. Die Developpable besitzt einen paaren Zug, der einzige reelle Zweig der Rückkehrkurve (— strichpunktiert gezeichnet —) hat vier Spitzen.

[1]) Cremona, Journal für Math., 68, 1864, p. 124; W. Dyck, Katalog math. und math.-phys. Modelle, Apparate und Instrumente, 1892, p. 269.





Die Developpablen der Typen I und II können in vierfacher Symmetrie normiert werden, d. h. sie lassen sich kollinear so umformen, daß die Schmiegungsebenen in den vier Spitzen eines reellen Zweiges der Rückkehrkurve ein reguläres Tetraeder bilden und die Developpable durch die Rückkehrkurve und die Doppelkegelschnitte in vier kongruente bzw. symmetrische und rücksichtlich des Tetraeders übereinstimmend liegende Teile zerlegt wird.

Da alle ebenen Dreiecksnetze eines Polyedergefüges von zueinander kollinearen Kurven 3. Klasse umhüllt werden (vgl. S. 46), so entspricht jeder singularitätenfreien ebenen Kurve 3. Klasse, abgesehen von projektiven Veränderungen, gerade eine Developpable vom Typus I bzw. II, je nachdem die Kurve 3. Klasse ein reelles Oval besitzt oder nicht. Diese Tatsache bietet die Möglichkeit, die Developpablen 4. Klasse 1. Spezies bzw. die Raumkurven 4. Ordnung 1. Spezies im Anschluß an die ebenen Kurven 3. Klasse bzw. 3. Ordnung übersichtlich zu klassifizieren. (Auch für den später zu besprechenden Typus IV gilt eine ähnliche Bemerkung.)

Durch einfache Konstruktionen mit Zirkel und Lineal kann zu jedem einfach geschlossenen, aus einer Spitzentangente und sieben weiteren Tangenten des umhüllenden Dreispitzes gebildeten ebenen Dreiecksnetz ein zugeordnetes vierfach symmetrisches Polyedergefüge gefunden werden:

Das vorgegebene Dreiecksnetz wird projektiv so verändert daß die Spitzentangente Symmetrielinie und ABC ein gleichseitiges Dreieck wird (Fig. 4 a). Dann wird das Dreiecksnetz, wie aus Fig. 4 b ersichtlich ist, auf die vier Seitenebenen eines regulären Tetraeders $A'B'A''B''$ aufgelegt, dessen Kantenlänge gleich ist der Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC. Die Punkte A, B des Netzes kommen mit A', B' bzw. mit A'', B'' zur Deckung. Die Netzgeraden auf den vier Tetraederebenen lassen sich zu vier ebenen Vierecken zusammenfassen, deren Ebenen sich aus Symmetriegründen im Mittelpunkt des Tetraeders schneiden. Diese Ebenen bestimmen zusammen mit den vier Seitenebenen des Tetraeders eindeutig ein Tetraeder-Oktaeder-Gefüge. Es umfaßt 16 Tetraeder und 10 weitere Polyeder, welche als Oktaeder aufzufassen sind, von denen mehrere Seitenebenen zusammenfallen. Die Seitenebenen des Tetraeders $A'B'A''B''$ sind, wie bereits vorne erwähnt, Schmiegungsebenen in den vier Spitzen eines Zweiges der Rückkehrkurve der umhüllenden Developpablen.

Fig. 4a

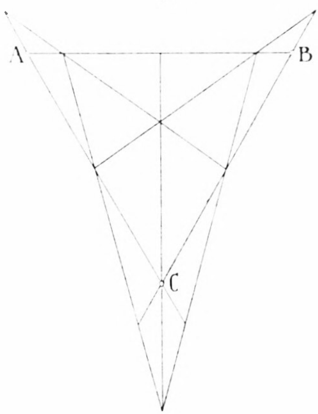
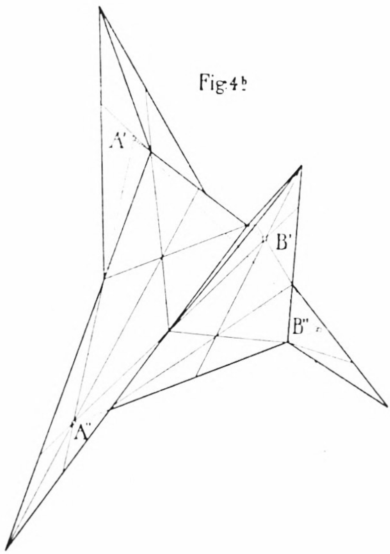


Fig. 4b



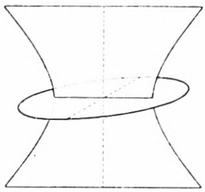
Wenn es sich um Typus II handelt, so ist das zu konstruierende Polyedergefüge mit den acht Ebenen fertig gestellt. Der vom Polyedergefüge erfüllte Raumbereich ist einteilig und liegt ganz im Endlichen (Fig. 4 b). Handelt es sich dagegen um Typus I, d. h. wenn zu dem zugrunde gelegten Dreiecksnetz der Fig. 4 a noch ein reelles Oval gehört, so treten zu den acht verwendeten Netzgeraden noch 16 Tangenten des Ovals. Diese Tangenten bestimmen noch 16 Polyederebenen, welche zwei weiteren Polyederbereichen angehören. Bei der vierfach symmetrischen Normierung erstrecken sich diese beiden Bereiche ins Unendliche. Für die in Fig. 2 zugrunde gelegte Annahme der Doppelkegelschnitte, welche nicht vierfach symmetrisch normiert ist, liegen zwei Polyederbereiche ganz im Endlichen. Sie besitzen, ebenso wie die Raumeinteilung der Fig. 4 b, beide je einen Zug der Rückkehrkurve und je zwei Stücke der Doppelkegelschnitte K_1 und K_2 zu Kanten. Das dritte sich ins Unendliche erstreckende Polyedergebiet verläuft zwischen dem Kreis K_3 und dem unendlich fernen Kegelschnitt K_4.

Durch Unterteilung der Dreiecksnetze in den Tetraederebenen, die auf Aufgaben 1. und 2. Grades hinausläuft,[1]) kann das Polyedergefüge mittels Zirkel und Lineal beliebig unterteilt werden.

Bemerkung: Die eben erwähnte Methode, die in ähnlicher Weise auch für den Typus IV gilt, gestattet es, die Developpablen 4. Klasse 1. Spezies bzw. die Raumkurven 4. Ordnung 1. Spezies mit Zirkel und Lineal beliebig genau zu konstruieren und zwar gleichzeitig Erzeugende und Tangentialebene bzw. Tangente und Berührungspunkt.

III. Zwei Kegelschnitte und vier Hauptebenen sind reell.

Fig. 5



Die Developpable hat keinen reellen Bestandteil. Es existiert daher kein reelles Polyedergefüge. Die Lage der Doppelkegelschnitte zeigt Fig. 5. Zum Typus III gehören insbesondere die imaginären Developpablen, welche die Scharen konfokaler Flächen 2. Klasse umhüllen.

IV. Alle vier Kegelschnitte und alle vier Hauptebenen sind imaginär.

Die Developpable besteht aus zwei „unpaaren“ Ebenenzügen, die Rückkehrkurve hat zwei reelle Zweige. Die Raumgefüge vom Typus IV lassen sich nicht in vierfacher Symmetrie anordnen,

[1]) H. Graf, Dissertation: Einteilung der Ebene in Dreiecke durch drei Systeme gerader Linien. München, Technische Hochschule, 1925.

dagegen können sie auf zentrische Symmetrie normiert werden: es existiert dann ein Mittelpunkt, in Bezug auf den die erzeugenden Ebenen paarweise symmetrisch liegen.

Bemerkung: Auch für Typus IV gibt es eine mit Zirkel und Lineal durchführbare Konstruktion, welche jedes beliebige einfach geschlossene Dreiecksnetz, welches von einer Kurve 3. Klasse mit Oval umhüllt wird, mit einem einfach geschlossenen Polyedergefüge in Zusammenhang bringt.

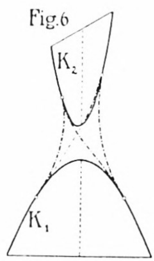
B. Die Developpable 4. Klasse 1. Spezies mit Doppeltangentialebene.[1])

I. Die Doppeltangentialebene berührt nach zwei sich schneidenden Erzeugenden.

Sind die beiden in der Doppeltangentialebene liegenden Erzeugenden konjugiert imaginär, so ist die Doppeltangentialebene isoliert und das Polyedergefüge ist analog zum Dreiecksnetz der Steinerschen Kurve. Es kann durch die auf S. 50 erwähnte Konstruktion mit Zirkel und Lineal in vierfacher Symmetrie gewonnen werden, wenn man das einfach geschlossene Dreiecksnetz der Steinerschen Kurve zugrunde legt. Gestaltlich ist das Polyedergefüge von der in Fig. 4b dargestellten Form. Es geht übrigens aus dem Typus I durch Grenzübergang hervor, wenn der zweite und dritte Polyederbereich des Typus I zur unendlich fernen isolierten Doppeltangentialebene degeneriert.

Die Doppelkegelschnitte sind in Fig. 6 gezeichnet. K_1 und K_2 sind Parabeln mit gemeinsamer Achse in zueinander senkrechten Ebenen, der dritte und vierte Doppelkegelschnitt fallen zusammen und liegen unendlich fern. Die in einem reellen Zug verlaufende Rückkehrkurve ist in der Figur strichpunktiert gezeichnet.

Fig. 6



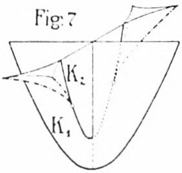
Sind die in der Doppeltangentialebene liegenden Erzeugenden reell, so entsteht ein zum Dreiecksnetz der einspitzigen Epizykloide analoges Polyedergefüge. Es kann nicht durch eine endliche Anzahl von Ebenen erzeugt

[1]) A. Clebsch — F. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, II. Band, 1. Teil, 1891, p. 252 ff.

werden; die Doppeltangentialebene ist Häufungsebene, d. h. bei Fortsetzung des auf S. 43 beschriebenen linearen Erzeugungsprozesses nähern sich die neu hinzukommenden Ebenen der Doppeltangentialebene als Grenzlage.

Die Doppelkegelschnitte haben die in Fig. 7 angedeutete Lage. K_1 und K_2 sind Parabeln mit gemeinsamer Achse in zueinander senkrechten Ebenen, der dritte und vierte Doppelkegelschnitt fallen miteinander zusammen und liegen in der unendlich fernen Doppeltangentialebene (Häufungsebene), zu der die unendlich fernen Parabeltangenten als Erzeugende gehören. Die Rückkehrkurve ist in der Figur strichpunktiert gezeichnet. Der vom Polyedergefüge erfüllte Raumbereich wird durch die Häufungsebene in drei Gebiete zerlegt. Zwei Gebiete haben K_2 und die Rückkehrkurve als Kanten, das dritte Gebiet, zu dem kein reeller Zweig der Rückkehrkurve gehört, verläuft zwischen K_1 und dem unendlich fernen Kegelschnitt.

Fig. 7

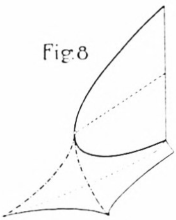


II. Die Doppeltangentialebene berührt nach zwei zusammenfallenden Erzeugenden.

Die Doppeltangentialebene ist Häufungsebene; das Polyedergefüge ist analog zum Dreiecksnetz der Neilschen Parabel und kann nicht durch eine endliche Anzahl von Ebenen erzeugt werden.

In Fig. 8 ist der eine Doppelkegelschnitt (Parabel) angegeben, die anderen drei Doppel, kegelschnitte fallen in einen dreifach zählenden unendlich fernen Kegelschnitt zusammen, der durch den unendlich fernen Parabelpunkt hindurchgeht. Die unendlich ferne Parabeltangente ist die doppelt zählende Erzeugende. Die Rückkehrkurve ist in der Figur strichpunktiert gezeichnet, das vom Polyedergefüge erfüllte Gebiet ist einteilig und erstreckt sich ins Unendliche.

Fig. 8



Bemerkung: Ausgehend von den Netzen der einspitzigen Epizykloide und der Neilschen Parabel lassen sich die analogen Raumeinteilungen mit Zirkel und Lineal konstruieren, ähnlich wie die vierfach symmetrischen Polyedergefüge.

C. Die zerfallenden Developpablen 4. Klasse 1. Spezies.

Von den mannigfaltigen Ausartungsmöglichkeiten[1]) sollen hier nur zwei merkwürdige Beispiele Erwähnung finden.

I. Die Developpable zerfällt in einen Rotationskegel und in einen dazu koaxialen Rotationszylinder.

Das Polyedergefüge wird gebildet von einer beliebigen Anzahl gleichabständiger Tangentialebenen des Zylinders und der doppelten Anzahl gleichabständiger Tangentialebenen des Kegels. Die Ebene durch die Kegelspitze senkrecht zur Rotationsachse wird von je zwei Kegeltangentialebenen nach Kreisdurchmessern und von den Zylindertangentialebenen nach Kreistangenten geschnitten; die Kreisdurchmesser und Kreistangenten bilden ein Dreiecksnetz.[2])

Die Raumeinteilung ist rotationssymmetrisch und analog zu den Dreiecksnetzen, welche von Tangenten und Durchmessern eines Kreises gebildet werden.[2]) Zu solchen Dreiecksnetzen projektive Netze liegen auf den Tangentialebenen des Kegels und des Zylinders. Das ganze zugleich außerhalb von Zylinder und Kegel befindliche Raumgebiet wird von dem Polyedergefüge erfüllt.

II. Die Developpable zerfällt in vier Ebenenbüschel, deren Träger ein windschiefes Vierseit bilden.

Wählt man das Vierseit so, daß es zwei Paar Gegenseiten eines regulären Tetraeders bildet, und beginnt die Erzeugung im Tetraederschwerpunkt als Anfangsknotenpunkt, so besitzt das Polyedergefüge vierfache Symmetrie. Die vier Ebenen des Tetraeders sind Häufungsebenen, die Raumeinteilung kann nicht durch eine endliche Anzahl von Ebenen bewerkstelligt werden. Der vorliegende Fall ist das einzige Polyedergefüge, welches den ganzen Raum, allerdings nur bis auf eine beliebig schmale Umgebung der Häufungsebenen, auszufüllen vermag. Durch die Häufungsebenen wird der Raum in acht Polyederbereiche zerlegt. Jede

[1]) A. Clebsch — F. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, II. Band, I. Teil, p. 252 ff.

[2]) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme usw., Sitzgsb. der bayer. Akad. der Wiss., math.-naturw. Abt., 1924, p. 149, IX.

der Polyederebenen trägt ein Dreiecksnetz von drei Geradenbüscheln mit nicht in gerader Linie liegenden Mittelpunkten.[1])

Läßt man das windschiefe Vierseit allmählich in eine Ebene zusammenklappen, so wird das Polyedergefüge projektiv zu der eingangs erwähnten Raumeinteilung durch reguläre kongruente Tetraeder und Oktaeder. Die einzelnen Polyederebenen enthalten dann Dreiecksnetze, welche von drei Geradenbüscheln mit in gerader Linie liegenden Mittelpunkten erzeugt werden und zu dem Netz der gleichseitigen Dreiecke projektiv sind.

Die Betrachtungen über ebene Dreiecksnetze lassen sich nicht nur auf den dreidimensionalen Raum, sondern in ganz ähnlicher Weise auch auf den n-dimensionalen euklidischen Raum übertragen. Dies wird deutlich ersichtlich, wenn man die auf S. 47 benützte Parameterdarstellung ins Auge faßt. Es sind dann Produkte von σ-Funktionen zu bilden von $i = 1$ bis $i = n + 1$ statt nur bis $i = 4$. Alle Überlegungen bleiben bestehen, der anschauliche Charakter der Betrachtungen geht allerdings verloren. Vom n-dimensionalen euklidischen Raum können die Polyedergefüge auch noch auf den n-dimensionalen nicht-euklidischen Raum mit konstantem Krümmungsmaß verallgemeinert werden.

---

[1]) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme usw., Sitzgsb. der bayer. Akad. der Wiss., math.-naturw. Abt., 1924, p. 148, VIII.