Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1924. Heft II

Juli- bis Dezembersitzung

München 1924
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Bestimmung aller geradlinigen rhombischen Netze.

Von **O. Perron** in München.

Vorgelegt in der Sitzung am 13. Dezember 1924.

In einer längeren Arbeit hat kürzlich Herr Voss unter anderm die Frage nach allen geradlinigen rhombischen Netzen gestellt und ist dabei auf eine Funktionalgleichung geführt worden, die sich durch elliptische Integrale erster Gattung lösen ließ[1]). Das eigentliche Problem war aber damit nicht erledigt. Die Zuendeführung gelang Herrn Volk, der überraschender Weise fand[2]), daß die elliptischen Integrale nur in der Zwischenrechnung auftreten, während die für die Lösung erforderlichen endgültigen Integrale trotz ihrer abschreckend komplizierten Form sich durch geschickte Substitutionen elementar auswerten lassen. Doch ist die Zwischenrechnung natürlich recht umständlich, und die geometrische Deutung der Endformeln schien zunächst schwer. Es lag daher nahe, von vornherein eine andere Behandlungsweise zu versuchen, die die Vosssche Funktionalgleichung ganz vermeidet. Da bei Herrn Voss die Aufgabe in den Rahmen einer viel allgemeineren Untersuchung eingegliedert ist, konnte man hoffen, vielleicht durch eine mehr dem speziellen Problem angepaßte Methode bequemer zum Ziel zu kommen. In der Tat bin ich auf andern Weg und mit Hilfe einer andern Funktionalgleichung zu sehr einfachen Endformeln gelangt, die ohne weiteres die folgende geometrische Deutung zulassen:

Wenn zwei Geradenscharen einer Ebene ein rhombisches Netz bilden, so sind sie entweder zwei Büschel

---

[1]) A. Voss, Kurvennetze und Laplacesche partielle Differentialgleichungen. Diese Sitzungsberichte 1924, S. 39—68.

[2]) Vgl. die der gegenwärtigen unmittelbar vorausgehende Arbeit: O. Volk, zur Vossschen Arbeit: „Kurvennetze und Laplacesche partielle Differentialgleichungen“.

oder sie sind miteinander identisch und umhüllen einen Kegelschnitt.

Erfreulicherweise hat auch Herr Volk in der endgültigen Redaktion seiner Arbeit seine ursprünglichen Formeln so vereinfachen können, daß sich ebenfalls dieses Resultat daraus ablesen ließ; gleichwohl dürfte meine Darstellung noch Interesse beanspruchen, da sie einfacher und insbesondere von der Vossschen Vorarbeit ganz unabhängig ist.

Daß auch umgekehrt die Tangenten jedes (nicht ausgearteten) Kegelschnitts ein rhombisches Netz bilden, ist gelegentlich von Herrn Finsterwalder bemerkt worden[1]), wird sich aber auch daraus ergeben, daß wir auf den allgemeinsten Kegelschnitt geführt werden. Daß zwei Büschel ein rhombisches Netz bilden, ist ebenfalls von Herrn Finsterwalder und auch von Herrn Voss erkannt worden, wird aber auch am Schluß des § 3 nochmals bewiesen werden.

§ 1. Zurückführung des Problems auf eine Funktionalgleichung.

Die beiden Geradenscharen seien in rechtwinkligen Koordinaten:

$$(1) \qquad \begin{cases} U_1 x + U_2 y = 1, \\ V_1 x + V_2 y = 1, \end{cases}$$

wo U_1, U_2 Funktionen eines Parameters $\bar{u}$ und V_1, V_2 Funktionen eines Parameters $\bar{v}$ sind. Bei diesem Ansatz ist nur der Fall nicht berücksichtigt, daß die eine Schar ein Büschel durch den Nullpunkt ist, was aber durch eventuelle Verschiebung des Koordinatensystems vermieden werden kann und daher keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Aus (1) folgt:

$$(2) \qquad x = \frac{V_2 - U_2}{U_1 V_2 - U_2 V_1}, \quad y = \frac{U_1 - V_1}{U_1 V_2 - U_2 V_1}.$$

Setzt man das Quadrat des Bogenelementes in die Form

$$dx^2 + dy^2 = E\,d\bar{u}^2 + 2F\,d\bar{u}\,d\bar{v} + G\,d\bar{v}^2,$$

so ist die Bedingung für ein rhombisches Netz: $E = G$. Nun findet man:

---

[1]) S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 6 (1899), S. 45–90, speziell S. 55 f.

$$\sqrt{E} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{u}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{u}}\right)^2} = \frac{(U_1 - V_1)\,U_2' - (U_2 - V_2)\,U_1'}{(U_1 V_2 - U_2 V_1)^2} \cdot \sqrt{V_1^2 + V_2^2},$$

wo die Akzente Differentiation nach $\bar{u}$ bedeuten. Eigentlich müßte der Ausdruck rechts zwischen Absolutstriche gesetzt werden. Man kann aber stets erreichen, daß er von vornherein positiv ist, indem man den Parameter $\bar{u}$ nötigenfalls durch $-\bar{u}$ ersetzt. Ebenso erhält man:

$$\sqrt{G} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{v}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{v}}\right)^2} = \frac{(U_1 - V_1)\,V_2' + (U_2 - V_2)\,V_1'}{(U_1 V_2 - U_2 V_1)^2} \cdot \sqrt{U_1^2 + U_2^2},$$

wo die Akzente Differentiation nach $\bar{v}$ bedeuten. Die Bedingung für rhombische Netze kann daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{(U_1 - V_1)\,U_2' - (U_2 - V_2)\,U_1'}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}} = \frac{-(U_1 - V_1)\,V_2' + (U_2 - V_2)\,V_1'}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}.$$

Führt man jetzt statt $\bar{u}$, $\bar{v}$ neue Parameter u, v ein, indem man setzt:

$$(3) \qquad \int \sqrt{U_1^2 + U_2^2}\, d\bar{u} = u, \qquad \int \sqrt{V_1^2 + V_2^2}\, d\bar{v} = v,$$

also umgekehrt:

$$(4) \qquad \bar{u} = \int \frac{du}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}}, \qquad \bar{v} = \int \frac{dv}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}},$$

und deutet man von jetzt an durch Akzente die Differentiation nach u bzw. v an, so geht die vorige Gleichung über in:

$$(5) \quad (U_1 - V_1)\,U_2' - (U_2 - V_2)\,U_1' = -(U_1 - V_1)\,V_2' + (U_2 - V_2)\,V_1'.$$

Wir haben also die Aufgabe, alle Lösungen dieser Funktionalgleichung zu bestimmen. Ist das geschehen, so kann man hinterher natürlich leicht vermittels der Formeln (4) zu den rhombischen Parametern $\bar{u}$, $\bar{v}$ übergehen. Da die Gleichung (5) die Variabeln u und v nicht explizit enthält und in bezug auf die Ableitungen nach u und v homogen ist, so bleibt sie ungeändert, wenn man von den Parametern u, v dadurch zu andern übergeht, daß man sie um beliebige Konstanten vermehrt und daß man beide mit ein und derselben von Null verschiedenen Konstanten multipliziert. Wir werden von dieser Befugnis einer Differentialgleichung von dieser einfachen Form. Dabei unterscheiden wir fünf verschiedene Fälle:

$$
\begin{array}{rl}
\text{I.} & a = b = c = 0, \\
\text{II.} & a = b = 0, \quad c \neq 0, \\
\text{III.} & a = 0, \quad b \neq 0, \\
\text{IV.} & a \neq 0, \quad b^2 - 4ac = 0, \\
\text{V.} & a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0,
\end{array}
$$

mit denen offenbar alle Möglichkeiten erschöpft sind.

Fall I. In diesem ist nach (15): $f' = 0$, also f konstant; aber das ist ausgeschlossen, wie schon in § 1 gezeigt.

Fall II. Nach (15) ist jetzt $f'(z) = c \neq 0$, also

$$f(z) = cz + c_1 \qquad (c \neq 0),$$

wo c_1 eine weitere Konstante ist (ebenso wie in der Folge $c_2, c_3, \ldots$). Damit geht die zu lösende Funktionalgleichung (6) über in:

$$U_2 - V_2 = (U_1 - V_1)(cu + cv + c_1), \tag{6a}$$

und die daraus abgeleitete Gleichung (8) in:

$$U_1' = V_1', \quad \text{also} = c_2. \tag{8a}$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$U_1 = c_2 u + c_3, \qquad V_1 = c_2 v + c_4.$$

Dabei muß $c_2 \neq 0$ sein, weil sonst $V_2' V_1'' - V_1' V_2''$ identisch verschwinden würde, gegen die Voraussetzung. Darum darf man, da u, v nach einer Bemerkung des § 1 um beliebige Konstanten vermehrt und beide mit derselben Konstanten ($\neq 0$) multipliziert werden dürfen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_2 = 1$ setzen. Dann ist also einfach

$$U_1 = u, \qquad V_1 = v.$$

Setzt man das in (6a) ein, so kommt:

$$U_2 - V_2 = (u - v)(cu + cv + c_1),$$

oder etwas anders geschrieben:

$$U_2 - cu^2 - c_1 u = V_2 - cv^2 - c_1 v, \quad \text{also} = c_5.$$

Somit ist

$$U_2 = cu^2 + c_1 u + c_5, \qquad V_2 = cv^2 + c_1 v + c_5,$$

und die beiden Geradenscharen sind die folgenden:

$$\begin{aligned} u x + (c u^2 + c_1 u + c_5) y &= 1, \\ v x + (c v^2 + c_1 v + c_5) y &= 1. \end{aligned} \qquad (c \neq 0).$$

Sie sind miteinander identisch und umhüllen den Kegelschnitt

$$(x + c_1 y)^2 - 4 c y (c_5 y - 1) = 0.$$

Dieser berührt die X-Achse im Nullpunkt und ist bei der Willkürlichkeit der Konstanten bereits der allgemeinste Kegelschnitt in solcher Lage.

Fall III. In diesem lautet die Formel (15) mit einer kleinen Änderung in der Bezeichnung der Konstanten:

$$f'(z) = b(f(z) - c_1) \qquad (b \neq 0).$$

Daraus folgt durch Integration:

$$f(z) = c_1 + c_2 e^{bz},$$

und zwar ist $c_2 \neq 0$, weil ja $f(z)$ nicht konstant sein kann. Setzt man das wieder in (6) und (8) ein, so kommt:

(6 b) $$U_2 - V_2 = (U_1 - V_1)(c_1 + c_2 e^{b(u+v)}),$$

(8 b) $$U_1' - V_1' + (U_1 - V_1) b = 0.$$

Aus (8 b) folgt aber:

$$U_1' + b U_1 = V_1' + b V_1, \text{ also etwa } = b c_3 \qquad (\text{wegen } b \neq 0),$$

und hieraus ergibt sich durch Integration:

$$U_1 = c_3 + c_4 e^{-bu}, \quad V_1 = c_3 + c_5 e^{-bv}.$$

Setzt man das in (6 b) ein, so erhält man:

$$U_2 - V_2 = (c_4 e^{-bu} - c_5 e^{-bv})(c_1 + c_2 e^{b(u+v)}),$$

oder etwas anders geschrieben:

$$U_2 - c_4 c_1 e^{-bu} + c_5 c_2 e^{bu} = V_2 - c_5 c_1 e^{-bv} + c_4 c_2 e^{bv}, \quad \text{also} = c_6.$$

Sonach ist

$$U_2 = c_4 c_1 e^{-bu} - c_5 c_2 e^{bu} + c_6, \quad V_2 = c_5 c_1 e^{-bv} - c_4 c_2 e^{bv} + c_6.$$

Nun kann weder c_4 noch c_5 verschwinden, weil in beiden Fällen $V_2' V_1'' - V_1' V_2'' = 0$ sich herausstellen würde, was wir in diesem Paragraphen ausgeschlossen haben.

Führt man daher die neuen Parameter

$$c_4 e^{-bu} = U, \quad c_5 e^{-bv} = V$$

ein und setzt zur Abkürzung $c_2 c_4 c_5 = c_7$, so ist auch $c_7 \neq 0$ und man erhält einfach:

$$U_1 = c_3 + U, \quad V_1 = c_3 + V,$$

$$U_2 = c_1 U - \frac{c_7}{U} + c_6, \quad V_2 = c_1 V - \frac{c_7}{V} + c_6.$$

Die beiden Geradenscharen sind daher die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}(U^2 + c_3 U)\,x + (c_1 U^2 + c_6 U - c_7)\,y &= U,\\ (V^2 + c_3 V)\,x + (c_1 V^2 + c_6 V - c_7)\,y &= V,\end{aligned}\right\} \quad (c_7 \neq 0).$$

Sie sind miteinander identisch und umhüllen den Kegelschnitt

$$(c_3 x + c_6 y - 1)^2 + 4 c_7 y (x + c_1 y) = 0 \qquad (c_7 \neq 0).$$

Das ist der allgemeinste die X-Achse berührende und nicht durch den Nullpunkt gehende Kegelschnitt.

Fall IV. In diesem kann, wie die Entstehung der Formel (15) aus (14) zeigt, die Funktion $V_1' V_1''' - V_1''^2$ nicht identisch verschwinden, also V_1 gewiß keine lineare Funktion sein. Der Gleichung (15) aber kann man mit einer kleinen Änderung in der Bezeichnung der Konstanten die Form geben:

$$a f'(z) = (f(z) - b)^2 \qquad (a \neq 0),$$

woraus durch Integration folgt:

$$f(z) = b - \frac{a}{z - c_1}.$$

Setzt man das in (6) und (8) ein, so kommt:

$$U_2 - V_2 = (U_1 - V_1)\left(b - \frac{a}{u + v - c_1}\right), \tag{6 c}$$

$$(U_1' - V_1')(u + v - c_1) - 2(U_1 - V_1) = 0. \tag{8 c}$$

Differenziert man die letzte Gleichung nach u und die so entstehende nach v, so erhält man:

$$U_1'' = V_1'', \text{ also } = 2 c_2,$$

und daher

$$U_1 = c_2 u^2 + c_3 u + c_4, \quad V_1 = c_2 v^2 + c_5 v + c_6.$$

Dabei ist gewiß $c_2 \neq 0$, weil ja V_1 diesmal keine lineare Funktion sein darf. Dann kann man aber durch Vermehrung von u und v um passende Konstanten erreichen, daß c_3 und c_5 verschwinden, so daß man also hat:

$$U_1 = c_2 u^2 + c_4, \quad V_1 = c_2 v^2 + c_6.$$

Setzt man das zunächst in (8c) ein, so ergibt sich:

$$2 c_2 (u - v)(u + v - c_1) - 2 c_2 (u^2 - v^2) - 2 (c_4 - c_6) = 0,$$

und daraus folgt:

$$c_1 = 0, \quad c_6 = c_4.$$

Daher ist definitiv

$$U_1 = c_2 u^2 + c_4, \quad V_1 = c_2 v^2 + c_4,$$

und wenn man das in (6c) einsetzt, erhält man (wegen $c_1 = 0$):

$$U_2 - V_2 = c_2 (u^2 - v^2)\left(b - \frac{a}{u+v}\right) = c_2 b (u^2 - v^2) - c_2 a (u - v),$$

oder anders geschrieben:

$$U_2 - c_2 b u^2 + c_2 a u = V_2 - c_2 b v^2 + c_2 a v, \text{ also } = c_7.$$

Daher ist endlich, indem man die Konstanten $c_2 a$, $c_2 b$ kürzer durch a, b bezeichnet:

$$U_2 = b u^2 - a u + c_7, \quad V_2 = b v^2 - a v + c_7 \qquad (a \neq 0).$$

Die beiden Geradenscharen sind somit die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} (c_2 u^2 + c_4) x + (b u^2 - a u + c_7) y = 1, \\ (c_2 v^2 + c_4) x + (b v^2 - a v + c_7) y = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (a \neq 0, \ c_2 \neq 0).$$

Sie sind miteinander identisch und umhüllen den Kegelschnitt

$$a^2 y^2 - 4 (c_2 x + b y)(c_4 x + c_7 y - 1) = 0 \qquad (a \neq 0, \ c_2 \neq 0).$$

Das ist der allgemeinste durch den Nullpunkt gehende und die X-Achse daselbst nicht berührende Kegelschnitt.

Fall V. In diesem kann man die Gleichung (15) mit geringer Änderung in der Bezeichnung der Konstanten in die Form setzen[1]):

---

[1]) Dabei können, wenn man sich auf reelle Netze beschränkt, c und c sehr wohl konjugiert-komplex sein, und a ist dann rein imaginär. Außerdem müssen in diesem Fall die im folgenden mit c_γ und c_ν bezeichneten

$$(c-\bar{c})\,f'(z)=a\,(f(z)-c)\,(f(z)-\bar{c})\qquad (a\neq 0,\ c\neq \bar{c}),$$

woraus durch Integration folgt:

$$f(z)=\frac{c\,c_1-\bar{c}\,\bar{c}_1\,e^{az}}{c_1-\bar{c}_1\,e^{az}}.$$

Dabei ist die Integrationskonstante mit Rücksicht auf die letzte Fußnote in die Form $\frac{\bar{c}_1}{c_1}$ gesetzt worden, und es muß $c_1\neq 0$, $\bar{c}_1\neq 0$ sein, weil ja $f(z)$ nicht konstant sein darf. Setzt man das in (6) und (8) ein, so erhält man:

$$\text{(6 d)}\qquad U_2-V_2=(U_1-V_1)\,\frac{c\,c_1-\bar{c}\,\bar{c}_1\,e^{a(u+v)}}{c_1-\bar{c}_1\,e^{a(u+v)}},$$

$$\text{(8 d)}\quad (U_1'-V_1')(c_1-\bar{c}_1\,e^{a(u+v)})+(U_1-V_1)\,a(c_1+\bar{c}_1\,e^{a(u+v)})=0.$$

Differenziert man diese letzte Gleichung nach u und die so entstehende nach v, so erhält man eine Gleichung, die nach Weghebung des von Null verschiedenen Faktors $\bar{c}_1\,a\,e^{a(u+v)}$ die einfache Form annimmt:

$$U_1''-a^2U_1=V_1''-a^2V_1,\ \text{also etwa}\ =-a^2b_1\qquad (\text{wegen } a\neq 0),$$

wo b_1 eine Konstante. Daher ist

$$U_1''=a^2U_1-a^2b_1,\qquad V_1''=a^2V_1-a^2b_1,$$

und aus diesen Differentialgleichungen folgt durch Integration:

$$U_1=b_1+c_2e^{au}+\bar{c}_2e^{-au},\qquad V_1=b_1+c_3e^{av}+\bar{c}_3e^{-av}.$$

Setzt man das jetzt in (8 d) ein, so erhält man nach Wegheben des Faktors a:

$$\begin{gathered}(c_2e^{au}-\bar{c}_2e^{-au}-c_3e^{av}+\bar{c}_3e^{-av})\,(c_1-\bar{c}_1\,e^{a(u+v)})\\+(c_2e^{au}+\bar{c}_2e^{-au}-c_3e^{av}-\bar{c}_3e^{-av})\,(c_1+\bar{c}_1\,e^{a(u+v)})=0,\end{gathered}$$

oder ausgerechnet:

$$2\,(c_1c_2-\bar{c}_1\bar{c}_3)\,e^{au}+2\,(\bar{c}_1\bar{c}_2-c_1c_3)\,e^{av}=0.$$

Konstanten jeweils zueinander konjugiert und die mit b_ν bezeichneten reell sein. Das Endresultat läßt sich alsdann leicht wieder in reelle Form setzen, womit wir uns nicht aufhalten wollen. Übrigens ließe sich die ganze Rechnung ebenso leicht auch von vornherein im Reellen durchführen; wir wollen aber nicht noch einen sechsten Fall anschließen.

Daher muß $c_1 c_2 = \bar{c}_1 \bar{c}_3$ und $\bar{c}_1 \bar{c}_2 = c_1 c_3$ sein, was man am einfachsten und allgemein erreicht, indem man

$$c_2 = \bar{c}_1 c_4, \qquad \bar{c}_3 = c_1 c_4,$$
$$\bar{c}_2 = c_1 \bar{c}_4, \qquad c_3 = \bar{c}_1 \bar{c}_4$$

setzt. Dann ist also definitiv

$$U_1 = b_1 + \bar{c}_1 c_4 e^{au} + c_1 \bar{c}_4 e^{-au}, \quad V_1 = b_1 + \bar{c}_1 \bar{c}_4 e^{av} + c_1 c_4 e^{-av}.$$

Führt man das nun in (6d) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} U_2 - V_2 &= [c_4(\bar{c}_1 e^{au} - c_1 e^{-av}) + \bar{c}_4(c_1 e^{-au} - \bar{c}_1 e^{av})] \frac{cc_1 - \bar{c}\bar{c}_1 e^{a(u+v)}}{c_1 - \bar{c}_1 e^{a(v+v)}} \\ &= (\bar{c}_4 e^{-au} - c_4 e^{-av})(cc_1 - \bar{c}\bar{c}_1 e^{a(u+v)}) \\ &= cc_1 \bar{c}_4 e^{-au} - cc_1 c_4 e^{-av} - \bar{c}\bar{c}_1 \bar{c}_4 e^{av} + \bar{c}\bar{c}_1 c_4 e^{au}, \end{aligned}$$

und somit:

$$U_2 - \bar{c}\bar{c}_1 c_4 e^{au} - cc_1 \bar{c}_4 e^{-au} = V_2 - \bar{c}\bar{c}_1 \bar{c}_4 e^{av} - cc_1 c_4 e^{-av}, \quad \text{also} = b_2,$$

wo auch b_2 eine Konstante. Daher ist

$$U_2 = b_2 + \bar{c}\bar{c}_1 c_4 e^{au} + cc_1 \bar{c}_4 e^{-au}, \quad V_2 = b_2 + \bar{c}\bar{c}_1 \bar{c}_4 e^{av} + cc_1 c_4 e^{-av}.$$

Nun kann auch von den Konstanten c_4, $\bar{c}_4$ keine verschwinden, weil sonst mit den gefundenen Werten von V_1 und V_2 sich ergeben würde: $V_1' V_2'' - V_2' V_1'' = 0$, was in diesem Paragraphen ausgeschlossen ist. Führt man daher die neuen Parameter

$$\bar{c}_1 c_4 e^{au} = U, \qquad \bar{c}_1 \bar{c}_4 e^{av} = V$$

ein und setzt noch zur Abkürzung $c_1 \bar{c}_1 c_4 \bar{c}_4 = b_3$, so ist auch $b_3 \neq 0$ und man erhält einfach:

$$U_1 = b_1 + U + \frac{b_3}{U}, \quad V_1 = b_1 + V + \frac{b_3}{V},$$

$$U_2 = b_2 + \bar{c}U + \frac{cb_3}{U}, \quad V_2 = b_2 + \bar{c}V + \frac{cb_3}{V}.$$

Die beiden Geradenscharen sind also diesmal die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} (U^2 + b_1 U + b_3)x + (\bar{c}U^2 + b_2 U + cb_3)y &= U, \\ (V^2 + b_1 V + b_3)x + (\bar{c}V^2 + b_2 V + cb_3)y &= V, \end{aligned}\right. \quad (c \neq \bar{c},\ b_3 \neq 0).$$

Sie sind miteinander identisch und umhüllen den Kegelschnitt

$$(b_1 x + b_2 y - 1)^2 - 4b_3(x + cy)(x + \bar{c}y) = 0 \quad (c \neq \bar{c},\ b_3 \neq 0).$$

Das ist der allgemeinste nicht durch den Nullpunkt gehende und nicht die X-Achse berührende Kegelschnitt (man beachte dazu die Fußnote S. 189).

§ 3. Der Fall $V_2' V_1'' - V_1' V_2'' = 0$.

Wir behandeln jetzt den im vorigen Paragraphen zurückgestellten Fall, daß die Funktion von v: $V_2' V_1'' - V_1' V_2''$ identisch verschwindet. Dann besteht aber zwischen V_1 und V_2 eine lineare Relation

$$aV_1 + bV_2 + c = 0 \tag{16}$$

mit konstanten Koeffizienten, und folglich ist die Geradenschar

$$V_1 x + V_2 y = 1$$

ein Büschel. Die genauere Bestimmung der Funktionen U_1, U_2, V_1, V_2 läßt sich auf Grund der Gleichung (16) bequemer direkt an die Gleichung (5) als an die Gleichung (6) anknüpfen; es sind aber wieder mehrere Fallunterscheidungen notwendig. Indessen können wir uns diese ganze Untersuchung sparen, indem wir bemerken, daß jetzt auch die Funktion von u: $U_2' U_1'' - U_1' U_2''$ identisch verschwinden muß. Wenn das nämlich nicht der Fall wäre, so könnte man die beiden Geradenscharen ihre Rolle tauschen lassen und dann die Entwicklungen des vorigen Paragraphen wiederholen. Daraus würde sich ergeben, daß beide Geradenscharen einen Kegelschnitt umhüllen, was der obigen Feststellung widerspricht, daß die eine ein Büschel ist. Sonach muß in der Tat die Funktion $U_2' U_1'' - U_1' U_2''$ identisch verschwinden und infolgedessen besteht auch zwischen U_1 und U_2 eine lineare Relation

$$a' U_1 + b' U_2 + c' = 0$$

mit konstanten Koeffizienten, so daß die Geradenschar

$$U_1 x + U_2 y = 1$$

ebenfalls ein Büschel ist. Beide Geradenscharen sind also Büschel, und damit ist das in der Einleitung mitgeteilte Theorem vollständig bewiesen.

Zur Vervollständigung der Betrachtung soll nur die bereits von Herrn Finsterwalder und Herrn Voss gemachte Feststellung, daß die Geraden zweier Büschel auch wirklich ein rhombisches Netz bilden, hier nochmals bewiesen werden. Wegen der offenbaren Invarianz dieser Eigenschaft gegenüber rechtwinkliger Koordinatentransformation und Ähnlichkeitstransformation genügt es, diesen Nachweis zu erbringen:

erstens für zwei Zentralbüschel mit den Zentren $x = \pm 1$, $y = 0$;

zweitens für ein Zentralbüschel mit dem Zentrum $x = 1$, $y = 0$ und ein Parallelbüschel, das der X-Achse parallel ist;

drittens für zwei Parallelbüschel, deren eines der X-Achse parallel und deren zweites beliebig ist.

Man braucht also nur für diese drei Fälle eine Parameterdarstellung anzugeben, für welche die Funktionalgleichung (5) erfüllt ist.

Der erste Fall ergibt sich, indem man

$$U_1 = 1, \quad U_2 = u, \quad V_1 = -1, \quad V_2 = -v$$

setzt. Dann ist in der Tat die Differentialgleichung (5) erfüllt, und die Gleichungen der beiden Büschel sind

$$x + uy = 1, \quad -x - vy = 1.$$

Der zweite Fall ergibt sich, indem man

$$U_1 = 1, \quad U_2 = -u, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = v$$

setzt. Dann ist wieder die Differentialgleichung (5) erfüllt, und die Gleichungen der beiden Büschel sind

$$x - uy = 1, \quad vy = 1.$$

Der dritte Fall endlich, der übrigens geometrisch trivial ist, ergibt sich, indem man

$$U_1 = 0, \quad U_2 = \pm e^{-u}, \quad V_1 = ae^v, \quad V_2 = be^v \qquad (a \neq 0)$$

setzt. Dann ist wieder die Differentialgleichung (5) erfüllt, und die Gleichungen der beiden Parallelbüschel sind

$$\pm e^{-u} y = 1, \quad ae^v x + be^v y = 1.$$