

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

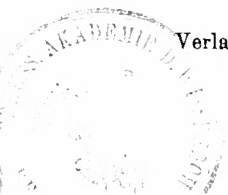
1924. Heft II

Juli- bis Dezembersitzung

München 1924

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Dreiecksnetze bilden.

Von H. Graf und R. Sauer¹⁾.

Mit 20 Figuren.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 12. Juli 1924.

In einem von S. Finsterwalder der deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Bericht²⁾ werden dreifache Geradensysteme in der Ebene erwähnt, welche so beschaffen sind, daß je drei Gerade sich in einem Punkte schneiden. Dabei werden zwei Gattungen unterschieden, einmal nämlich die Kollineationen eines Quadratnetzes und einer Schar von Diagonalen. Diese Netze werden zum Möbiusschen Netze, wenn noch die zweite Diagonalenschar dazu genommen wird. Als zu einer zweiten Art von dreifachen Geradensystemen gehörend wird das System erwähnt, welches von den Tangenten und Radien eines Kreises gebildet wird.

Die Möbiusschen Netze begreifen die sämtlichen vierfachen Geradensysteme der Ebene in sich, welche so beschaffen sind, daß jeweils vier Gerade in einem Knoten des Netzes sich schneiden. Alle vierfachen Geradensysteme von der geforderten Beschaffenheit können daher als kollineare Umformungen eines und desselben Geradenetzes, beispielsweise eines Quadratnetzes und seiner beiden Diagonalenscharen, aufgefaßt werden. Dagegen ist die Mannigfaltigkeit der dreifachen Geradensysteme in der Ebene von der Art, daß stets drei Gerade sich in einem Punkte schneiden, eine weit umfassendere. (Während die Möbiusschen Netze neben den Knotenpunkten noch die Diagonalenschnittpunkte enthalten, in denen sich jeweils nur zwei Gerade schneiden, besitzen die dreifachen hier

¹⁾ An der vorliegenden Abhandlung haben beide Verfasser gleichmäßigen Anteil. § 1 geht auf H. Graf, § 4 auf R. Sauer zurück.

²⁾ S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung 6, 1897.

zu untersuchenden Geradensysteme nur eine Art von Schnittpunkten mit jeweils drei durch sie hindurchgehenden Geraden.)

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist die Feststellung der allgemeinsten dreifachen Geradenetze von der verlangten Beschaffenheit.

In den ersten drei Paragraphen werden einige grundlegende allgemeine Sätze auf synthetisch-geometrischem Wege gewonnen. Zugleich wird eine lineare Konstruktionsmethode für die Herstellung dreifacher Geradensysteme von der verlangten Beschaffenheit entwickelt.

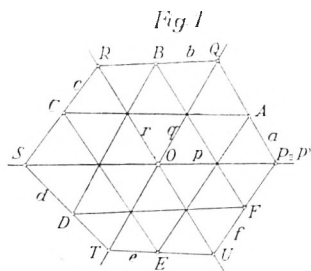
§ 4 behandelt das Problem von der analytischen Seite. Bei dieser Gelegenheit kommen die drei Scharen krummliniger Diagonalkurven, welche zu den von den dreifachen Geradensystemen gebildeten Dreiecksnetzen gehören, zur Diskussion.

In § 5 werden die allgemeinen Resultate an typisierten Beispielen angewendet.

In den Schlußbemerkungen wird auf verschiedene Fragen hingewiesen, welche mit unserem Problem in engem Zusammenhang stehen.

§ 1. Lineare Erzeugungsweise eines dreifachen Geradenetzes.

Zur Beantwortung der Frage, wie läßt sich in allgemeinsten Weise ein Dreiecksnetz erzeugen, derart, daß durch jeden Knoten-



punkt desselben immer drei und nur drei Gerade hindurchgehen, denke man sich das Netz von einem beliebigen Knotenpunkt O aus aufgebaut. Rund um den Punkt O (Fig. 1) mit den drei durch ihn gehenden beliebig gewählten Netzgeraden p, q, r lagern sich immer sechs Dreiecke des Netzes und bilden zusammen

ein Brianchonsches Sechseit mit p, q, r als Diagonalen. Die Seiten des Sechsseits sind ebenfalls willkürlich anzunehmen¹⁾. Je drei

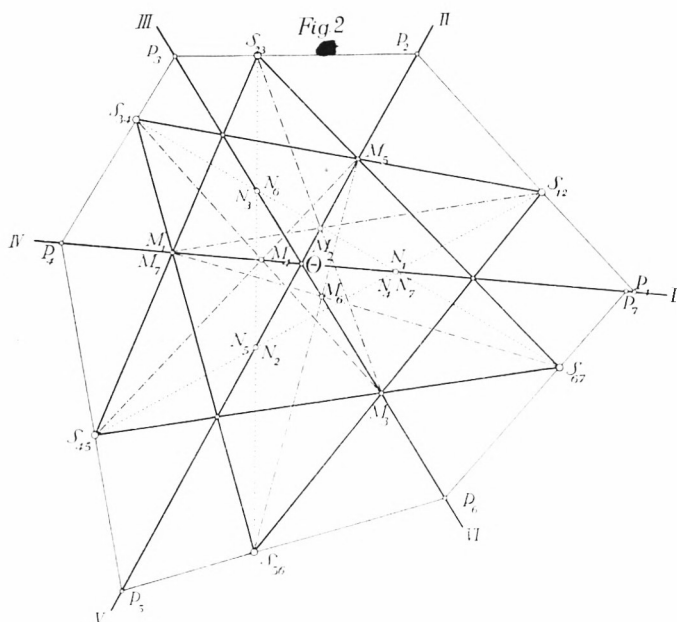
¹⁾ Von dem Fall, daß unser vorliegendes Grundsechseit einspringende Ecken hat, möge für die zunächst folgenden Erörterungen abgesehen werden, obgleich die Bildung des Netzes bei solchen Annahmen hier durchaus analog vorgenommen werden kann und nur der Begriff „Netz“ einer besonderen weiter unten gegebenen Deutung bedarf.

aufeinander folgende Seiten desselben bestimmen insgesamt sechs weitere Netzdreiecke, welche sich an das Grundsechseit anlagern und zusammen mit diesem einen Sechsstern mit den Ecken $A, B, \dots F$ bilden. Durch jede dieser sechs nur Geradenpaare tragende Sternecken, etwa durch B , muß notwendig eine weitere Netzgerade b gehen, welche sich mit der Geraden c der Nachbarsternecke C in einem Knotenpunkt R der Diagonalen r schneidet. Bei beliebiger Wahl einer der Geraden, z. B. a durch A , ist der Knotenpunkt Q bereits bestimmt, damit aber zugleich der Polygonzug der weiteren fünf Netzgeraden b, c, d, e, f . Da der Polygonanfangspunkt P auch ein Netzknoten sein soll, muß notwendig das Polygon $PQR \dots P'$ ein geschlossenes sein; es entsteht unter dieser Voraussetzung mindestens innerhalb des sechsseitigen Polygons ein Netz von der verlangten Eigenschaft.

Die Frage: ist es möglich, den Polygonanfangspunkt, etwa P auf p , so zu wählen, daß der Endpunkt P' desselben mit P zusammenfällt, beantwortet sich dahin: Das Polygon $PQ \dots UP'$ ist immer ein geschlossenes ($P' \equiv P$), unabhängig von der Gestalt des Brianchonschen Sechsseits und unabhängig von der Wahl der Ausgangsecke P .

Für die nachfolgenden Betrachtungen werde die in Figur 2 durch starke Linien hervorgehobene, willkürlich angenommene Grundfigur, das Brianchonsche Sechseit mit den vier in O zusammentreffenden Diagonalen I IV, II V, III VI, bzw. den 6 Sterneckpunkten $S_{12} S_{23} \dots S_{67}$ als fest gedacht.

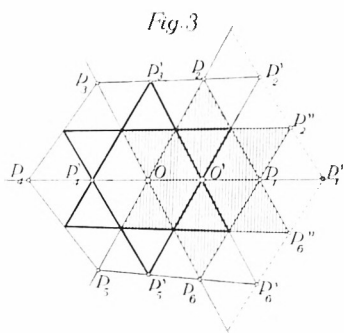
Eine um S_{12} gedrehte Polygonseite $P_1 P_2$ erzeugt auf den Trägern I und II zwei zueinander perspektive Punktreihen mit dem gemeinsamen Element O . Desgleichen wird durch die um S_{23} drehbare Gerade $P_2 S_{23}$ auf III eine zur Punktreihe P_2 perspektive Reihe P_3 übertragen. So fortfahrend gelangt man zur Punktfolge P_7 auf I, welche projektiv sein muß zur Ausgangsreihe P_1 auf dem gleichen Träger; O ist dabei ein Doppelpunkt der Projektivität. Letztere besitzt aber außer O noch weitere Doppelpunkte. Um dies zu beweisen, betrachte man in der Figur 2 den Polygonzug der strich-punktierten Linien. Ein zusammengehöriges Paar von Verbindungslinien der Ecken des Grundsechsseits und des Sternsechsecks schneiden sich jeweils in einem Punkt einer der drei durch Punkt O gehenden Diagonalen; so etwa



$M_1 S_{12}$ und $M_3 S_{23}$ in M_2 auf II; bei passender Änderung in der Seitenfolge des Grundsechsecks ist M_2 Brianchonscher Punkt. Analoges gilt für die Punkte M_4 und M_6 auf den Diagonalen IV und VI. Ferner treffen sich die punktiert gezeichneten Verbindungslinien der Gegenecken des Sechssterns ebenfalls paarweise auf den durch O gehenden Diagonalen in den Punkten $N_1 N_2 N_3$, was auch wieder aus dem Brianchonschen Satz bei entsprechender Umnummerierung der Seitenfolge des Grundsechsecks folgt. Wandert nun der Polygonanfangspunkt P_1 nach M_1 , so tritt an Stelle des Polygons $P_1 P_2 P_3 \dots P_7$ das in der Figur strichpunktierte geschlossene Polygon $M_1 M_2 M_3 \dots M_7$, wo M_1 mit M_7 zusammenfällt. Ebenso ist, wenn das Polygon an Stelle von P_1 mit N_1 begonnen wird, der zugehörige punktiert angegebene (hier doppelt zu umlaufende) Dreieckszug $N_1 N_2 \dots N_7$ ein geschlossener. Neben Punkt O sind also auch die Punkte M_1 und N_1 Doppelemente der Punktprojektivität $P_1 \overline{\wedge} P_7$ auf I, d. h. diese Punktreihen sind identisch, w. z. bew. w.

Auf Grund des eben bewiesenen Schließungssatzes läßt sich in einfacher Weise zeigen, daß nicht nur im inneren Bereich des

Polygons $P_1 P_2 \dots P_6 P_1$ ein dreifaches Geradennetz vorliegt, sondern daß bei Verlängerung der bereits vorhandenen 15 Netzgeraden über den Bereich hinaus auch außerhalb ein Netz von der verlangten Eigenschaft erzeugt werden kann, und zwar ist letzteres durch das Brianchonsche Ausgangssechseit und eine Seite des äußeren Polygons bereits eindeutig bestimmt. Um dies einzusehen, erweitere man sinngemäß das bereits innerhalb des Sechsecks $P_1 P_2 \dots P_6$ vorliegende Dreiecksnetz (Fig. 3), indem an zwei Nachbarseiten des letzteren, etwa $P_1 P_2$ und $P_1 P_6$, die anliegenden Dreiecke gebildet werden. Durch die paarweise zusammengehörigen Knotenpunkte $P'_2 P'_2$ und $P'_6 P'_6$ sind zwei weitere Netzgerade bestimmt, die sich nach obiger Behauptung in einem Punkt P'_1 der Diagonale OO' schneiden müssen.



Zur Begründung dieser Tatsache betrachte man nicht das Brianchonsche Sechseit um O als Ausgangsfigur — in Figur 3 stark ausgezogen —, sondern den um den Knotenpunkt O' gelegenen schraffiert hervorgehobenen Sechsstern, für welchen sich laut obigem Schließungssatz der zugehörige äußere Polygonzug $P'_1 P'_2 \dots P'_6 P'_1$ schließen muß, oder anders ausgedrückt: die beiden neu hinzutretenden Geraden $P'_2 P'_2$ und $P'_6 P'_6$ schneiden sich auf der Diagonale OO' .

In dieser Weise läßt sich die Netzbildung schrittweise fortsetzen; die neuen Netzgeraden sind jeweils bereits durch zwei oder mehrere Knotenpunkte bestimmt.

Durch die hier angegebene lineare Erzeugungsweise kann jedes dreifache Geradensystem von der verlangten Beschaffenheit konstruiert werden. Da durch das Brianchonsche Ausgangssechseit mit den drei Diagonalen und eine weitere Netzgerade als Anfangsbedingungen das Netz bereits eindeutig fixiert ist, so können umgekehrt bei irgend einem vorliegenden dreifachen Geradennetz die Anfangsbedingungen auf diese Weise bestimmt werden und unsere Erzeugungsweise liefert in eindeutiger Weise die Geraden des vorgegebenen Netzes; d. h. sie ist die allgemeinste. Der Grad der Mannigfaltigkeit eines allgemeinen Netzes

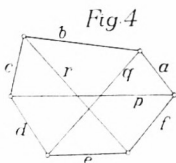
ist, wenn man von kongruenten Ortsveränderungen absieht, durch neun willkürliche Konstante bestimmt.

Zusatz: Wenn das Brianchonsche Grundsechseit oder eines der sich daran angliedernden Sechseite einspringende Ecken hat, so tritt ein Überspringen des Netzes ein, derart, daß im weiteren Verlauf das Netz auf einem den alten Netzbereich überdeckenden neuen „Blatt“ der Ebene ausgebreitet gedacht werden muß, um den ursprünglich definierten Begriff des dreifachen Geradennetzes beibehalten bzw. sinnvoll verallgemeinern zu können. Die Netzgeraden gelten dann für ein Blatt der Ebene nicht mehr in ihrer ganzen Ausdehnung, sondern nur bis zu einem gewissen Punkt, von wo sie im weiteren Verlauf zum nächstfolgenden Blatt zu rechnen sind. Ein tieferer Einblick in diese Verhältnisse kann erst mit Hilfe der in den späteren Paragraphen gewonnenen Erkenntnisse erhalten werden (vgl. § 4, S. 138, Einteilungsprinzip der dreifachen Geradenetze).

§ 2. Jedes dreifache Geradenetz von der Beschaffenheit, dass stets drei Gerade sich in einem Punkte schneiden, umhüllt eine Kurve 3. Klasse.

Zum Beweise werden benützt:

1. Satz von Chasles:¹⁾ Sind von einem Sechseck die sechs Seiten a, b, c, d, e, f sowie zwei Diagonalen p, q Tangenten einer Kurve 3. Klasse K_3 , so ist auch die dritte Diagonale r eine Tangente der nämlichen K_3 (Fig. 4).

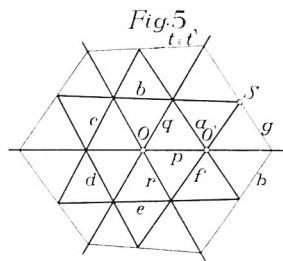


2. Durch acht beliebige Gerade ist stets eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven 3. Klasse definiert, welche alle außerdem noch eine neunte „Restgerade“ gemeinsam haben. Durch irgend eine von den neun Geraden verschiedene zehnte Gerade ist dann eine K_3 eindeutig bestimmt²⁾.

¹⁾ Der Satz findet sich (in dualer Form) bei H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebr. Kurven höherer Ordnung, § 47, S. 185, Beispiel. — Vgl. dazu J. Steiner, Geometrische Lehrsätze, Crelles Journal f. Math., Bd. XXXII, S. 182, ferner H. Schröter, Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung, § 31, S. 268.

²⁾ H. Schröter, Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung, § 10, S. 75.

Auf diese Voraussetzungen gestützt, schließen wir folgendermaßen: Ein beliebiges dreifaches Geradenetz ist vorgegeben; sechs an einem Netzknoten O zusammenstoßende Maschendreiecke (Fig. 5) bilden ein Brianchonsches Sechseit a, b, c, d, e, f mit dem Brianchonschen Punkt O und den Diagonalen p, q, r . Durch acht Gerade, etwa $a, b, c, d, e, f; p, q$ ist eine Schar von Kurven 3. Klasse bestimmt. Die Restgerade ist nach dem Satz von Chasles die dritte Diagonale r . Infolge der Bemerkung 2) ist durch Hinzunahme irgend einer zehnten Geraden eine K_3 eindeutig bestimmt. Wir wählen als zehnte Gerade die durch den Schnittpunkt S von b und f gehende Gerade g des vorgegebenen Netzes. Es existiert dann also eine Kurve 3. Klasse Γ , welche die zehn Geraden $a, b, \dots, g, p, q, r$ zu Tangenten hat.



Nun gehört offenbar die Kurve Γ auch der Schar der Kurven 3. Klasse an, welche durch die acht dem benachbarten Sechseck mit O' als Brianchonschen Punkt entnommenen Fundamentalgeraden $g, b, q, r, e; a, p, f$ definiert wird. Nach dem Satz von Chasles haben nun aber alle Kurven dieser Schar als neunte Restgerade noch die Gerade h des vorgelegten Netzes gemeinsam. Daher ist auch h eine Tangente der Kurve Γ .

So kann man schrittweise weitergehen und von jeder Netzgeraden zeigen, daß sie Tangente an Γ ist.

Zusatz 1: Der Beweis enthält nebenbei auch eine Begründung des in § 1 verwendeten Schließungssatzes. Setzt man nämlich den Beweis, von S ausgehend über die Schnittpunkte von a und e , ferner von f und d usw. fort, so muß schließlich die durch den Schnittpunkt von c und a gehende dritte Tangente t die Diagonale q in deren Schnittpunkt mit g treffen; denn die durch die Schnittpunkte von q, g und a, c gehende Gerade t' muß aus gleichen Gründen Tangente an Γ sein, wie g . Da aber durch den Schnittpunkt von a und c nicht mehr als drei Tangenten gehen können, muß $t \equiv t'$ sein.

Zusatz 2: Während das Möbiussche Netz die ganze Ebene überdeckt, breitet sich, abgesehen von Ausartungen (vgl. § 5), jedes dreifache Geradenetz der gewünschten Art nur auf einem

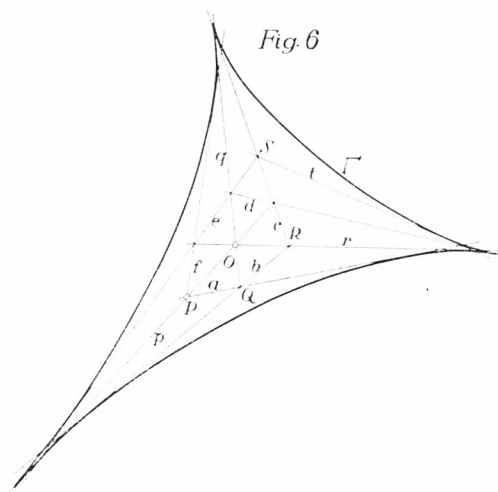
Teil der Ebene aus, da die umhüllende Kurve 3. Klasse die Ebene in Gebiete einteilt, welche vom Netz überdeckt werden (Gebiete, für dessen Punkte alle drei Tangenten an die K_3 reell sind), und in Gebiete, auf welche das Netz nicht fortgesetzt werden kann (Gebiete, für dessen Punkte jeweils nur eine Tangente an die K_3 reell ist). Das Netz liegt stets auf der konvexen Seite der umhüllenden K_3 .

Zusatz 3: Von der Tatsache ausgehend, daß die Umhüllende jedes dreifachen Geradensystems eine K_3 ist, kann folgender Satz gezeigt werden: Irgend zwei Netzgerade der nämlichen Gruppe (vgl. S. 132) werden von einer der drei Systeme der Diagonalkurven (vgl. S. 129) nach projektiven Punktreihen geschnitten. Mit anderen Worten: Die Anordnung der Knotenpunkte auf einer Netzgeraden und der übernächsten der nämlichen Gruppe ist projektiv.

§ 3. Die Tangenten jeder beliebigen Kurve 3. Klasse können so angeordnet werden, dass sie ein dreifaches Geradenetz von der verlangten Beschaffenheit bilden.

Aus den Überlegungen des vorangehenden Paragraphen hat sich herausgestellt, daß jedes beliebige dreifache Geradenetz von der

verlangten Beschaffenheit eine K_3 umhüllt. Hier soll nun gezeigt werden, daß es sich nicht um spezielle, sondern um die allgemine K_3 handelt. Zu diesem Zweck beweisen wir den Satz: Die Tangenten jeder beliebigen K_3 können so angeordnet werden, daß sie ein dreifaches Geradensystem von der verlangten Beschaffenheit bilden.



Ist irgend eine beliebige, zerfallende oder nicht zerfallende Kurve 3. Klasse Γ vorgegeben, so existiert stets ein ein- oder

zweiteiliger endlicher Bereich von der Art, daß von jedem ihm angehörnden Punkte drei reelle Tangenten an die Kurve I' gelegt werden können. Wir gehen von irgend einem Punkte O (Fig. 6) dieses Bereiches als Anfangsknotenpunkt des zu konstruierenden Netzes aus und zeichnen in O die drei Tangenten p, q, r . Aus einem von O verschiedenen Punkt P von p , der willkürlich ist, jedoch mit O im nämlichen Realitätsbereiche liegen muß, ziehen wir diejenige zweite Tangente a , welche stetig in r übergeführt werden kann dadurch, daß P stetig nach O längs p wandert¹⁾. Durch den Schnittpunkt Q von a und q , der notwendigerweise auch dem Realitätsbereich von O und P angehört, wird dann die dritte stets reelle Tangente b gelegt bis zum Schnittpunkt R mit r . Auch R liegt im gleichen Realitätsbereich wie O, P und Q . Durch schrittweise Fortsetzung dieser Konstruktion ergibt sich schließlich das Sechseit $a, b \dots f$, das sich nach dem Satze von Chasles in P schließen muß, und welches p, q, r als Diagonalen hat, sonach ein Brianchonsches Sechseit ist. Durch den Schnittpunkt S von c und e , welcher wiederum dem ursprünglichen Realitätsbereich angehört, geht stets noch eine dritte Tangente t .

Von dem Brianchonschen Sechseit und der Tangente t als Anfangsbedingungen ausgehend, kann man in eindeutiger Weise durch lineare Konstruktionen gemäß § 1 ein dreifaches Geraden-netz von der verlangten Beschaffenheit erzeugen. Nach § 2 hat dieses Netz als Umhüllende eine K_3 . Diese Kurve muß jedoch mit der vorgegebenen Kurve I' identisch sein, weil sie 10 Tangenten, nämlich die neun Geraden des Brianchonschen Sechsseits und die Gerade t mit ihr gemeinsam hat. Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Die tatsächliche Durchführung der Konstruktion eines dreifachen Geraden-netzes, welches zu der vorgegebenen K_3 gehört, erfordert im allgemeinen die Auflösung einer Aufgabe 3. Grades, nämlich die Bestimmung der drei von O an die Kurve gehenden Tangenten p, q, r . Alle weiteren Konstruktionen sind dann vom 2. bzw. 1. Grad und können somit durch Zirkel und Lineal gelöst werden. Praktisch jedoch wird man, wenn die K_3 gezeichnet

¹⁾ O und P dürfen nicht durch eine Häufungslinie getrennt sein (vgl. § 4, S. 139).

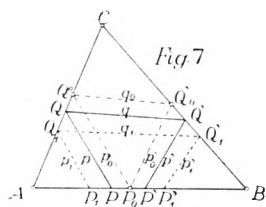
vorliegt, die Tangenten durch Anlegen des Lineals hinreichend genau finden und das Netz lediglich durch Anwendung des Lineals näherungsweise konstruieren können.

Zusammenfassung: Das allgemeinste ebene dreifache Geradenetz von der Beschaffenheit, daß je drei Gerade sich in einem Punkte schneiden, besteht aus Tangenten einer K_3 .

Umgekehrt: Die Tangenten der allgemeinsten K_3 lassen sich so anordnen, daß sie ein dreifaches Geradenetz von der vorerwähnten Art bilden.

Anschließend hieran stellen wir die Aufgabe, ein vorgegebenes Netz zu unterteilen, d. h. aus dem ursprünglichen Netz durch Einschalten weiterer Geraden ein engermaschiges Netz herzustellen. Dieses Netz muß dann die nämliche Kurve 3. Klasse I' als Umhüllende haben, wie das ursprüngliche Netz.

Wir greifen irgend ein Dreieck ABC des gegebenen Netzes (Fig. 7) heraus und suchen durch drei weitere Tangenten an I' das

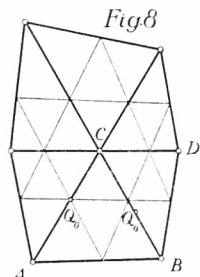


Dreieck ABC in vier Teildreiecke zu zerlegen. Durch einen beliebigen Punkt P auf der Strecke AB zieht man diejenige Tangente p an I' , welche stetig in die Gerade BC übergeht, wenn P stetig nach B wandert. Durch den Schnitt Q von p mit AC wird die dritte Tangente q

an I' gelegt und schließlich wird noch durch den Schnittpunkt Q' von q und BC die dritte Tangente p' gezeichnet, welche AB in P' treffen möge. Auf diese Weise ordnet sich auf AB jedem Punkte P ein Punkt P' eindeutig zu. (Die Beziehung zwischen P und P' ist eine gegenseitige, wie nach dem Satze von Chasles gezeigt werden kann.) Geht man von P zum Nachbarpunkt P_1 über, so werden dadurch p , q und p' in benachbarte Gerade p_1 , q_1 , p'_1 übergeführt. p und p_1 ebenso wie q und q_1 oder p' und p'_1 schneiden sich als benachbarte Tangenten auf der Umhüllungskurve I' , welche den Netzbereich begrenzt. Demnach liegen diese Schnittpunkte außerhalb des Dreiecks ABC . Daraus folgt, daß P und der ihm entsprechende Punkt P' die Strecke AB im gegenläufigen Sinne durchwandert. Insbesondere ist für $P = A$ das zugehörige $P' = B$ und für $P = B$ das entsprechende $P' = A$.

Notwendigerweise existiert zwischen A und B ein und nur ein Punkt P_0 derart, daß $P_0 = P = P'$ wird. Von diesem Punkt P_0 ausgehend wird das Dreieck ABC durch p_0, q_0, p'_0 in der gewünschten Weise in vier Teildreiecke zerlegt.

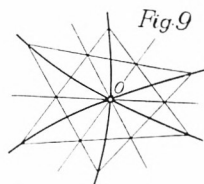
Sei nun CD die dritte durch C gehende Tangente (Figur 8), so zeichnen wir mit $Q_0 Q'_0$ beginnend aus den Tangenten an I' das Brianchonsche Sechseit, welches C als Schnittpunkt der Diagonalen hat. Durch die neun Geraden dieses Sechsseits und AB ist dann ein dreifaches Geradennetz eindeutig bestimmt. Konstruiert man nach der in § 1 auseinander gesetzten Weise weitere Netzgerade, so zeigt sich, daß unter denselben die Geraden des ursprünglichen Netzes BD usw. enthalten sind. Das neue Netz erscheint demnach in der Tat als eine „halbierende“ Unterteilung des vorgegebenen Netzes. Durch wiederholte Halbierung läßt sich ein beliebig engmaschiges Netz herstellen.



Zusatz. In ähnlicher Weise kann das gegebene Netz dreifach oder allgemein n -fach unterteilt werden.

Die Aufgabe, ein vorgegebenes Netz zu „halbieren“, wird auf Grund der vorangehenden Ausführungen mittels sukzessiver Näherung durch Lösung von Aufgaben 2. und 1. Grades im Prinzip beliebig genau durchgeführt. Der Grad für die exakte Lösung des Problems soll in den analytischen Bemerkungen des § 4 festgestellt werden. Praktisch bedient man sich mit Vorteil, um rasch einen Näherungswert für P_0 zu finden, der Diagonalkurven. Darunter wird folgendes verstanden: Wir denken uns das ursprüngliche Netz durch fortgesetztes Halbieren beliebig engmaschig gemacht und fassen je zwei benachbarte Netzdreiecke mit gemeinsamer Seite zu einem Viereck zusammen. Die fehlenden Diagonalen dieser Vierecke sind die Linienelemente der Diagonalkurven.

Betrachtet man irgend einen Knotenpunkt O des Netzes (Fig. 9) und den ihn umgebenden von 12 Dreiecken gebildeten sechszackigen Stern, so erkennt man, daß in jedem Netzknoten sich drei Diagonalkurven schneiden. Zu dem dreifachen Geradensystem, dessen Ge-



raden sich in einem Punkte schneiden, gehört somit auch ein dreifaches System krummliniger Diagonalkurven, welche die gleiche Beschaffenheit haben, sich zu je dreien in einem Knotenpunkt des Netzes zu treffen.

Von dem engen Netz gehen wir durch wiederholtes Verdoppeln zum weitmaschigen Ausgangsnetz zurück. Auch hier sind die Gegenecken der jetzt größeren Vierecke Punkte einer Diagonalkurve. So gehören beispielsweise in Figur 8 A und D der nämlichen Diagonalkurve an. Q'_0 kann als Schnittpunkt dieser Diagonalkurve mit der Netzgeraden BC aufgefaßt werden. Indem wir die Sehne AD der Diagonalkurve statt ihres unbekannten Bogens AD benützen, erhalten wir eine erste Näherung für den gesuchten Punkt Q'_0 , durch dessen Bestimmung die Unterteilung grundsätzlich festgelegt ist.

Um die Mannigfaltigkeit aller möglichen dreifachen Geradensysteme von der verlangten Art zu ermitteln, ist zu bedenken, daß die Kurven 3. Klasse eine gegen projektive Veränderungen invariante Konstante enthalten. Daher können die dreifachen Geradensysteme nicht wie die Möbiusschen Netze Kollineationen eines und des nämlichen Netzes sein. Liegt nun eine K_3 vor, so ist ein zugehöriges Netz eindeutig bestimmt, sobald ein Knotenpunkt O und die Entfernung eines benachbarten Knotenpunktes PO als Anfangsbedingungen fest vorgegeben sind. Da nun aber durch sukzessive Unterteilung jedes Netz beliebig engmaschig gemacht werden kann, so dürfen die Anfangsbedingungen O und P in gewissem Sinne als unwesentlich betrachtet werden. Man kann mit dieser Einschränkung sagen, daß die Mannigfaltigkeit der dreifachen Geradennetze gleich ist der Mannigfaltigkeit der Kurven 3. Klasse; denn zu jeder K_3 existiert ein infinitesimales dreifaches Netz von der verlangten Art, welches jedes zur nämlichen K_3 gehörige Netz von endlicher Maschenweite beliebig nahe in sich begreift.

Zusatz: Nach den in § 2 und § 3 gewonnenen Ergebnissen kann die in § 1 gegebene lineare Konstruktionsmethode auch als eine Erzeugungsweise für eine beliebige zerfallende oder nicht zerfallende Kurve 3. Klasse aufgefaßt werden. Allerdings kann der Fall eintreten, daß durch die Erzeugungsweise nur eine endliche Anzahl von Tangenten gefunden wird, oder der andere Fall,

daß sich zwar unendlich viele Tangenten ergeben, die jedoch an einer oder mehreren Linien Häufungsstellen besitzen. Abgesehen davon ist es möglich, daß die Erzeugungsweise nur einen Teil der Kurve 3. Klasse liefert (z. B. bei Typ III des § 5, wenn O im Dreispitz angenommen wird, oder bei Typ II des § 5, wenn O innerhalb des von Einspitz und Doppeltangente begrenzten Gebiets gelegen ist). Vgl. § 4 die Netze III—VII, welche aus einer endlichen Anzahl von Geraden bestehen und die Netze I, II, (VIII), X, XI, welche Häufungslinien besitzen.

§ 4. Analytische Bemerkungen.

Nachdem durch geometrische Betrachtungen bereits festgestellt ist, daß jedes dreifache Geradensystem von der verlangten Beschaffenheit aus den Tangenten einer K_3 gebildet wird, und daß umgekehrt die Tangenten einer beliebigen K_3 so angeordnet werden können, daß sie ein dreifaches Geradensystem von der verlangten Art erzeugen, soll in diesem Paragraphen die analytische Darstellung der dreifachen Geradennetze abgeleitet werden.

Die Linienkoordinaten jeder K_3 können unter Zugrundelegung eines passend gewählten Fundamentaldreiecks eindeutig als elliptische Funktionen eines Parameters φ dargestellt werden durch die Gleichungen

$$\varrho u_1 = \operatorname{sn} \varphi, \quad \varrho u_2 = \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi, \quad \varrho u_3 = \operatorname{sn}^3 \varphi^1).$$

Jedem Werte φ entspricht eine bestimmte Tangente u der Kurve; dagegen entsprechen jeder Tangente u der Kurve unendlich viele Argumentwerte, welche sich aus irgend einem (φ) von ihnen zusammensetzen in der Form $\varphi + \omega m + \omega' n$. m und n sind ganze Zahlen, die doppelten Perioden 2ω und $2\omega'$ der Kurve sind gleichzeitig Perioden für die Funktionen $\operatorname{sn} \varphi$, $\operatorname{cn} \varphi$ und $\operatorname{dn} \varphi$. Für reelle Kurven 3. Klasse ist die eine Periode reell, die andere rein imaginär.

Bekanntlich¹⁾ wird die Bedingung dafür, daß drei Tangenten der Kurve, welche zu den Argumenten φ_1 , φ_2 , φ_3 gehören, sich

¹⁾ A. Clebsch, Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Kurven 3. Ordnung, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 63, 1864, S. 94. — Enc. d. math. Wiss., III 2, Heft 4, S. 481.

in einem Punkte schneiden, ausgedrückt durch die Kongruenz $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$.

Wir setzen nun drei Geradensysteme an durch die Gleichungen für die Linienkoordinaten u bzw. v bzw. w :

$$\begin{aligned} & \varrho u_1 = \operatorname{sn}(\alpha + \varphi), & \varrho v_1 &= \operatorname{sn}(\beta + \psi), \\ 1) \quad & \varrho u_2 = \operatorname{cn}(\alpha + \varphi) \operatorname{dn}(\alpha + \varphi), & 2) \quad \varrho v_2 &= \operatorname{cn}(\beta + \psi) \operatorname{dn}(\beta + \psi), \\ & \varrho u_3 = \operatorname{sn}^3(\alpha + \varphi), & \varrho v_3 &= \operatorname{sn}^3(\beta + \psi), \\ & \varrho w_1 = \operatorname{sn}(\gamma + \chi), \\ 3) \quad & \varrho w_2 = \operatorname{cn}(\gamma + \chi) \operatorname{dn}(\gamma + \chi), \\ & \varrho w_3 = \operatorname{sn}^3(\gamma + \chi), \end{aligned}$$

welche sich auf das nämliche Fundamentaldreieck und die nämliche K_3 beziehen, und wobei α, β, γ willkürliche Konstante, ϱ einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor bedeuten, während γ der Beziehung $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$ genügen soll. Die Parameter φ, ψ, χ sind gleich ganzzahligen positiven oder negativen Vielfachen einer beliebigen Konstanten $\Delta\varepsilon$ zu setzen, die endlich oder unendlich klein genommen werden kann. Durch den Schnittpunkt einer Geraden φ_0 des ersten Systems und einer Geraden ψ_0 des zweiten Systems geht stets eine dem dritten System angehörende Tangente χ_0 der vorgegebenen Kurve hindurch, wobei die Beziehung besteht:

$$\alpha + \varphi_0 + \beta + \psi_0 + \gamma + \chi_0 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}.$$

Erteilt man φ_0 den Zuwachs $\Delta\varepsilon$ und ψ_0 den nämlichen, jedoch negativen Zuwachs ($-\Delta\varepsilon$), so ändert sich an der vorangehenden Kongruenz nichts, da die Zuwächse von φ_0 und ψ_0 sich gegenseitig aufheben. Das heißt aber: Die dritte Tangente, welche durch die Schnittpunkte der Geraden φ_0 und ψ_0 gelegt werden kann, geht auch durch den Schnittpunkt der folgenden Geraden $\varphi_0 + \Delta\varepsilon, \psi_0 - \Delta\varepsilon$.

So wird also in der Tat durch die Gleichungen 1), 2) und 3) ein dreifaches Geradensystem beschrieben, welches so beschaffen ist, daß jeweils drei Gerade sich in einem Punkt schneiden. Jedem Wert $\varphi_0 = \text{konst.}$, $\psi_0 = \text{konst.}$, $\chi_0 = \text{konst.}$ entspricht eine Gerade des 1., bzw. 2., bzw. 3. Systems.

Man überzeugt sich leicht, daß jedes vorgegebene dreifache Geradensystem von der verlangten Beschaffenheit durch die Gleichungen 1), 2) und 3) dargestellt werden kann. Das vorgegebene

Geradensystem ist nämlich eindeutig definiert durch die von ihm umhüllte K_3 , einen im reellen Netzbereich befindlichen, sonst aber willkürlich zu wählenden Knotenpunkt und den Abstand eines benachbarten Knotenpunktes. Dadurch aber werden zugleich die Konstanten α , β und γ und der konstante Zuwachs $\Delta \varepsilon$ für die Gleichungen 1), 2) und 3) bestimmt.

In der Darstellung durch die Gleichungen 1), 2) und 3) sind auch die Fälle einbegriffen, welche durch die Ausartung der elliptischen Funktionen entstehen und welche geometrisch durch die rationalen Kurven 3. Klasse und die zerfallenden Kurven 3. Klasse repräsentiert werden.

Für die rationalen Kurven 3. Klasse möge noch kurz die Darstellung der von ihren Tangenten gebildeten dreifachen Geradenetze abgeleitet werden, ausgehend von der kanonischen Form für die Linienkoordinaten der Tangenten:¹⁾

$$\varrho u_1 = \lambda(1 - \Omega \lambda^2), \quad \varrho u_2 = 1 - \Omega \lambda^2, \quad \varrho u_3 = \lambda^3.$$

ϱ ist ein willkürlicher Proportionalitätsfaktor, λ der Parameter und $\Omega = 0$, bzw. $\Omega = 1$, bzw. $\Omega = -1$.

Wenn λ_1 , λ_2 , λ_3 die Argumente dreier sich in einem Punkt schneidenden Tangenten sind, so besteht die Beziehung:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \Omega \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0.$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

a) $\Omega = 0$ (Beispiel: Neilsche Parabel).

Die Schnittbedingung lautet: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

b) $\Omega = +1$ (Beispiel: Einspitzige Epizykloide).

Setzt man $\lambda = \Im g \mu$, so lautet die Schnittbedingung:

$$\Im g \mu_1 + \Im g \mu_2 + \Im g \mu_3 + \Im g \mu_1 \cdot \Im g \mu_2 \cdot \Im g \mu_3 = 0, \\ \Im g (\mu_1 + \mu_2) = -\Im g \mu_3 = \Im g (-\mu_3).$$

Also $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \equiv 0 \pmod{i\pi}$.

c) $\Omega = -1$ (Beispiel: Dreispitzige Hypozykloide).

Setzt man $\lambda = \operatorname{tg} v$, so lautet die Schnittbedingung:

$$\operatorname{tg} v_1 + \operatorname{tg} v_2 + \operatorname{tg} v_3 - \operatorname{tg} v_1 \cdot \operatorname{tg} v_2 \cdot \operatorname{tg} v_3 = 0, \\ \operatorname{tg} (v_1 + v_2) = -\operatorname{tg} v_3 = \operatorname{tg} (-v_3).$$

Also $v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0 \pmod{\pi}$.

¹⁾ G. Pittarelli, Napoli Rend. 24 (1885), S. 216. — Enc. d. math. Wiss. III 2, Heft 4, S. 507.

Indem man von den Schnittbedingungen ausgeht, gelangt man unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen auf die nämliche Weise wie im Falle der nichtrationalen Kurve 3. Klasse zu folgender Darstellung der dreifachen Geradensysteme, welche von den Tangenten einer rationalen Kurve 3. Klasse gebildet werden:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} \varrho u_1 = a + \varphi, \\ \varrho u_2 = 1, \\ \varrho u_3 = (a + \varphi)^3, \end{array} \right. & \text{2)} \left\{ \begin{array}{l} \varrho v_1 = \beta + \psi, \\ \varrho v_2 = 1, \\ \varrho v_3 = (\beta + \psi)^3, \end{array} \right. & \text{3)} \left\{ \begin{array}{l} \varrho w_1 = \gamma + \chi, \\ \varrho w_2 = 1, \\ \varrho w_3 = (\gamma + \chi)^3. \end{array} \right.
 \end{array}$$

Nach einigen Umformungen wird:

$$\begin{array}{lll}
 \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} \varrho u_1 = \mathfrak{S} \sin (a + \varphi), \\ \varrho u_2 = \mathfrak{C} \cos (a + \varphi), \\ \varrho u_3 = \mathfrak{S} \sin^3(a + \varphi), \end{array} \right. & \text{2)} \left\{ \begin{array}{l} \varrho v_1 = \mathfrak{S} \sin (\beta + \psi), \\ \varrho v_2 = \mathfrak{C} \cos (\beta + \psi), \\ \varrho v_3 = \mathfrak{S} \sin^3(\beta + \psi), \end{array} \right. & \text{3)} \left\{ \begin{array}{l} \varrho w_1 = \mathfrak{S} \sin (\gamma + \chi), \\ \varrho w_2 = \mathfrak{C} \cos (\gamma + \chi), \\ \varrho w_3 = \mathfrak{S} \sin^3(\gamma + \chi). \end{array} \right. \\
 \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} \varrho u_1 = \sin (a + \varphi), \\ \varrho u_2 = \cos (a + \varphi), \\ \varrho u_3 = \sin^3(a + \varphi), \end{array} \right. & \text{2)} \left\{ \begin{array}{l} \varrho v_1 = \sin (\beta + \psi), \\ \varrho v_2 = \cos (\beta + \psi), \\ \varrho v_3 = \sin^3(\beta + \psi), \end{array} \right. & \text{3)} \left\{ \begin{array}{l} \varrho w_1 = \sin (\gamma + \chi), \\ \varrho w_2 = \cos (\gamma + \chi), \\ \varrho w_3 = \sin^3(\gamma + \chi). \end{array} \right.
 \end{array}$$

Bemerkung: Die Tatsache, daß alle zur nämlichen K_3 gehörigen Netze durch die nämlichen Gleichungen bei verschiedenen Konstanten dargestellt werden können, ist der analytische Ausdruck für unsere frühere Bemerkung, daß in gewissem Sinne die Mannigfaltigkeit der dreifachen Geradenetze gleich ist der Mannigfaltigkeit der Kurven 3. Klasse.

Als Anwendung unserer analytischen Betrachtungen soll das Problem der Unterteilung mittels wiederholter „Halbierung“ erörtert werden!

Es hat sich bereits herausgestellt, daß die Aufgabe, ein vorgegebenes Netz zu unterteilen, äquivalent ist mit der Aufgabe, die Schnittpunkte der Netzgeraden mit einer Diagonalkurve zu ermitteln. Daraus folgt, daß der Grad der Aufgabe, das Netz zu unterteilen, nicht größer, höchstens gleich sein kann der Ordnung der Diagonalkurven. Aus diesem Grund wird zunächst die Ordnung der Diagonalkurven untersucht.

Die Gleichungen für die Punktkoordinaten x der drei Systeme von Diagonalkurven ergeben sich als Schnittpunkte entsprechender Geraden von zweien der drei Systeme nach Maßgabe der Matrix:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \left\| \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right\|, \text{ bzw. } x_1 : x_2 : x_3 = \left\| \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right\|,$$

$$\text{bzw. } x_1 : x_2 : x_3 = \left\| \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \right\|.$$

Nimmt man φ und ψ und χ als fest an, wobei $\alpha + \varphi + \beta + \psi + \gamma + \chi \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$, so ist je eine Diagonalkurve der drei Systeme durch t als Parameter bestimmt. Die drei Systeme von Diagonalkurven gehören ebenso wie die drei Geradensysteme selbst der nämlichen Mannigfaltigkeit von Kurven an und gehen durch gleichzeitige zyklische Vertauschung von α, β, γ und φ, ψ, χ ineinander über.

Für das erste System der Diagonalkurven ergibt sich nach einigen Umformungen mit Hilfe des Additionstheorems der elliptischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= -1 + \operatorname{cn}(\alpha + \varphi + \beta + \psi + 2t) \operatorname{cn}(\alpha + \varphi + t) \operatorname{cn}(\beta + \psi + t), \\ \varrho x_2 &= \operatorname{sn}(\alpha + \varphi + \beta + \psi + 2t) \operatorname{sn}(\alpha + \varphi + t) \operatorname{sn}(\beta + \psi + t), \\ \varrho x_3 &= 1. \end{aligned}$$

ϱ bedeutet einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor.

Um die Ordnung der Diagonalkurven zu ermitteln, substituieren wir $\operatorname{sn}^2 \frac{\alpha + \varphi + \beta + \psi + 2t}{2} = t'$ und finden nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= -1 + k^2 t'^2 + (1 - 2t' + k^2 t'^2) \left(\operatorname{cn}^2 \frac{\alpha + \varphi - \beta - \psi}{2} - t' \operatorname{dn}^2 \frac{\alpha + \varphi - \beta - \psi}{2} \right), \\ \varrho^2 x_2^2 &= 4t'(1 - t')(1 - k^2 t') \left(t' - \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha + \varphi - \beta - \psi}{2} \right)^2, \\ \varrho x_3 &= (1 - k^2 t'^2) \left(1 - k^2 t' \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha + \varphi - \beta - \psi}{2} \right). \end{aligned}$$

k ist der Modul der elliptischen Funktionen und die wesentliche, gegen Kollineation invariante Konstante der Kurven 3. Klasse.

Setzt man nun x_1, x_2, x_3 in die Gleichung irgend einer beliebigen Geraden $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ ein, so ergibt sich zur Bestimmung von t' eine Gleichung 6. Grades. Sonach sind die Diagonalkurven im allgemeinen Falle von der 6. Ordnung.

Sie sind überdies vom Geschlecht 1, da sie durch elliptische Funktionen rational dargestellt werden können. Unter den Diagonalkurven befindet sich die Kurve 3. Klasse, welche sowohl von den Geraden, als auch von den Diagonalkurven umhüllt wird. Sie ergibt sich, wenn man $\alpha + \varphi = \beta + \psi$ bzw. $\beta + \psi = \gamma + \chi$ bzw. $\gamma + \chi = \alpha + \varphi$ setzt.

Für rationale Kurven gestaltet sich die Rechnung, ausgehend von der kanonischen Form, völlig analog. Man erhält:

Für a):

$$\varrho x_1 = (\beta + \psi + t)^3 - (\alpha + \varphi + t)^3,$$

$$\varrho x_2 = (\alpha + \varphi + t)(\beta + \psi + t)[(\alpha + \varphi + t)^2 - (\beta + \psi + t)^2],$$

$$\varrho x_3 = \alpha + \varphi - \beta - \psi.$$

Die Kurven sind rational von der dritten Ordnung.

Für c):

$$\varrho x_1 = -1 + \cos(\alpha + \varphi + \beta + \psi + 2t) \cos(\alpha + \varphi + t) \cos(\beta + \psi + t),$$

$$\varrho x_2 = \sin(\alpha + \varphi + \beta + \psi + 2t) \sin(\alpha + \varphi + t) \sin(\beta + \psi + t),$$

$$\varrho x_3 = 1.$$

Durch die Substitution $\sin^2 \frac{\alpha + \varphi + \beta + \psi + 2t}{2} = t'$ kommt

$$\varrho x_1 = -1 + (1 - 2t') \left(\cos^2 \frac{\alpha + \varphi - \beta - \psi}{2} - t' \right),$$

$$\varrho^2 x_2^2 = 4t'(1 - t') \left(t' - \sin^2 \frac{\alpha + \varphi - \beta - \psi}{2} \right)^2,$$

$$\varrho x_3 = 1.$$

Diese Formeln ergeben sich aus den allgemeinen Gleichungen unmittelbar durch die Annahme $k = 0$. Die Kurven sind rational von der 4. Ordnung; denn setzt man x_1, x_2, x_3 in die Gleichung einer beliebigen Geraden $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ ein, so ergibt sich eine Gleichung 4. Grades zur Bestimmung von t' . Unter den Kurven 4. Ordnung befindet sich stets ein doppelt zählender Kegelschnitt. Für $\alpha + \varphi - \beta - \psi = \frac{\pi}{2}$ wird nämlich

$$\varrho x_1 = -1 + \frac{1}{2} (2t' - 1)^2,$$

$$\varrho^2 x_2^2 = t'(1 - t') (2t' - 1)^2,$$

$$\varrho x_3 = 1.$$

Substituiert man $\frac{1}{2}(2t' - 1)^2 = t''$, so kommt

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= -1 + t'', \\ \varrho^2 x_2^2 &= \frac{1}{2} t'' (t'' - \frac{1}{2}), \\ \varrho x_3 &= 1, \end{aligned}$$

und dies sind die Gleichungen einer Kurve 2. Ordnung. Ist diese Kurve unter den Diagonalkurven eines gegebenen Netzes enthalten, so kann mit ihrer Hilfe die Aufgabe der Unterteilung exakt gelöst werden.

Für b):

Hier sind lediglich die trigonometrischen Funktionen durch die entsprechenden hyperbolischen Funktionen zu ersetzen. Man findet so auf analoge Weise die Diagonalkurven als rational von der 4. Ordnung.

Zusammenfassend gilt der Satz:

Die Diagonalkurven eines dreifachen Geradenetzes stimmen in Geschlecht und Ordnung mit der Kurve 3. Klasse überein, welche die Geraden des Netzes sowie die Diagonalkurven umhüllt. Die Kurve 3. Klasse gehört selbst dem System der Diagonalkurven an.

Bei Geradenetzen, deren Umhüllende von einer zerfallenden K_3 gebildet wird, sind die Diagonalkurven Kegelschnitte. So gehören beispielsweise für den Fall, daß die K_3 in 3 ein Dreieck bildende Punkte ABC zerfällt, die Diagonalkurven zu den drei Kegelschnittbüscheln, welche AB und AC in B und C bzw. BC und BA in C und A bzw. CA und CB in A und B berühren (vgl. Typ VIII des § 5). Bei den Ausartungen trifft es nicht mehr zu, daß die drei Systeme von Diagonalkurven zusammen eine einheitliche Mannigfaltigkeit bilden.

Aus den vorangehenden Rechnungen ergibt sich, daß die Aufgabe der Unterteilung für nichtrationale Kurven 3. Klasse von der 6. Ordnung, für rationale Kurven 3. Klasse von der 4. bzw. 3. Ordnung und für zerfallende Kurven 3. Klasse von der 2. Ordnung ist.

Sind Netze so beschaffen, daß α , β und γ Vielfache des konstanten Zuwachses $\Delta\epsilon$ sind (hierher zählen die einfach geschlossenen Netze $A2$) und die die Ebene einfach überdeckenden

Netze B_2) der nachfolgend gegebenen Klassifikation), so erniedrigt sich der Grad der Aufgabe jeweils um 2. Für die hierher gehörigen Netze sind nämlich die Berührungspunkte der Geraden des Netzes Knotenpunkte. In diesen Netzknotenpunkten schneiden sich je drei Gerade, von denen zwei mit der Tangente in dem Knotenpunkt zusammenfallen. Zwischen je zwei auf der Kurve einander folgenden Netzknoten liegt ein Schnittpunkt einer Netzgeraden mit der Umhüllungskurve, welcher für das halbierte Netz Knotenpunkt wird. Die Ermittlung dieser Knotenpunkte läuft darauf hinaus, die vier noch unbekannten Schnittpunkte einer Tangente der Kurve 3. Klasse bei bekanntem Berührungspunkt zu bestimmen.

Aus der analytischen Darstellung ergibt sich für die Gesamtheit der dreifachen Geradenetze von der verlangten Beschaffenheit bei endlicher Maschenweite folgendes Einteilungsprinzip:

A. Netze, bestehend aus einer endlichen Anzahl von Geraden.

1. $\Delta\epsilon$ und die reelle Periode ω der Kurve sind kommensurabel, dagegen sind α , β und γ willkürlich, jedoch nicht gleichzeitig Vielfache von $\Delta\epsilon$.

Jedes Geradensystem bildet eine Gruppe für sich. Indem man von den drei sich in einem Punkt schneidenden Geraden weiterfährt, entsteht ein dreifaches Geradenetz von der verlangten Beschaffenheit. Da, wo die Geraden die Umhüllende K_3 berühren, überschlägt sich das Netz und kann in seinem weiteren Verlaufe auf einer zweiten Ebene ausgebreitet gedacht werden. Im einzelnen zeigen sich die Verhältnisse bei Figur 12 des § 5. Dort sind sechs Ebenen nötig, um darauf das Netz auszubreiten.

2. α , β und γ sind Vielfache von $\Delta\epsilon$. Dann sind $\Delta\epsilon$ und die reelle Periode ω der Kurve kommensurabel. Diese „einfach geschlossenen“ Netze überdecken den Netzbereich einmal. Die drei Geradensysteme sind miteinander identisch und bilden zusammen eine Gruppe.

B. Netze, bestehend aus unendlich vielen Geraden.

1. $\Delta \varepsilon$ und die reelle Periode der Kurve sind nicht kommensurabel. Das Netz besteht aus unbegrenzt vielen Geraden, die sich bei Erweiterung des Netzes nach einer endlichen Zahl von Schritten nicht wiederholen. Zur Ausbreitung des Netzes sind unendlich viele übereinandergelagerte Ebenen notwendig. Dieser Fall ist der allgemeinste und repräsentiert das durch die in § 1 auseinandergesetzte Konstruktion erzeugte Netz bei willkürlichen Anfangsbedingungen. Da bei Weiterbildung des Netzes immer neue Gerade auftreten, kann für diesen allgemeinen Fall die Kurve 3. Klasse beliebig genau als Umhüllungsgebilde erzeugt werden.

2. Die umhüllende Kurve 3. Klasse hat keine reelle Periode.

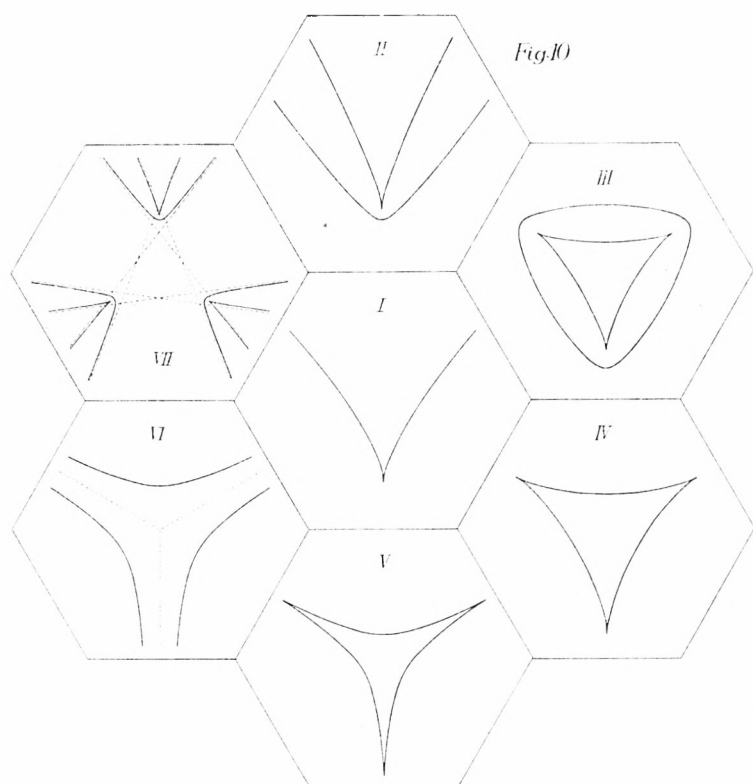
Dies tritt ein bei rationalen Kurven 3. Klasse für $\Omega = 0$ und $\Omega = +1$, sowie dann, wenn die Kurve 3. Klasse zerfällt in drei Punkte, oder in einen Kegelschnitt und einen äußeren Punkt oder in einen Kegelschnitt und einen Punkt auf dem Kegelschnitt (vgl. die Typen I, II, VIII, X, XI des § 5). In diesen Fällen existieren eine oder mehrere Gerade, in deren Umgebung sich die Netzgeraden häufen, und zwar sind dies die Doppeltangenten der umhüllenden Kurve 3. Klasse. Unter den Netzen dieser Art gibt es solche, welche eine einzige Ebene überdecken und solche, welche auf einer endlichen Zahl von Blättern ausgebreitet werden müssen, in ähnlicher Weise wie unter A 1).

§ 5. Einzelne typische Formen, dargestellt an Beispielen.

Um einen Überblick über die Mannigfaltigkeit der dreifachen Geradensysteme zu bekommen, geben wir in diesem Paragraphen die Netze an, welche zu elf normierten Typen von Kurven 3. Klasse gehören, die sich topologisch ineinander überführen lassen, ohne miteinander projektiv verwandt zu sein. Die ersten sieben Kurven sind in nachstehender Übersicht (Fig. 10) zusammengestellt¹⁾.

Der Reihe nach werden folgende Kurven als Umhüllende eingeführt (vgl. Typ I bis XI):

¹⁾ F. A. Möbius, Leipziger Abb. 1 (1852), pag. 1.



I. Die Neilsche Parabel.

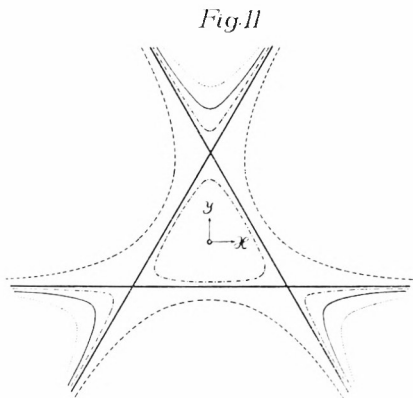
II. Eine projektive Verallgemeinerung der einspitzigen Hypozykloide. Die Doppeltangente ist die unendlich ferne Gerade und die Spitzentangente ist Symmetrielinie. Die Kurve hat keine Asymptoten.

III. Löst sich der Einspitz der Kurve II von der Doppeltangente ab, so entsteht die allgemeine Kurve 3. Klasse, welche aus Oval und Dreispitz besteht. Das Beispiel ist dreifach symmetrisch.

IV. Das Oval werde größer und größer, während das Dreispitz im Endlichen bleibe. Schließlich geht das Oval in die unendlich ferne Gerade über. Die Kurve besteht jetzt aus einem Dreispitz und der unendlich fernen Geraden als isolierter Doppeltangente. Als normiertes Beispiel dient die dreispitzige Hypozykloide (Steinersche Kurve).

V. Nach dem Durchgang durch die unendlich ferne Gerade wird das Oval imaginär. Es bleibt im Reellen nur der Dreispitz übrig. Um uns hier die topologischen Zusammenhänge klar zu machen, betrachten wir die Verhältnisse im Dualen.

Wir polarisieren die Kurve III an einem Kreis um den Schnittpunkt der Spitzentangenten. Die drei Spitzen gehen in die Wendetangenten über, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden. Dem Oval der Klassenkurve entspricht das Oval der durch Polarisation erzeugten Ordnungskurve innerhalb des gleichseitigen Dreiecks. Den Spitzentangenten entsprechen die unendlich fernen Punkte der Dreiecksseiten als Wendepunkte. Zwischen diesen verläuft die Kurve in hyperbolischen Ästen innerhalb der Scheitelwinkel zu den Innenwinkeln des gleichseitigen Dreiecks (Figur 11, strichpunktierte Kurve).



Wird nun das Oval kleiner und schrumpft schließlich zu einem isolierten Punkt zusammen, so ergibt sich das zur Steiner'schen Kurve duale Gebilde. (Figur 11, ausgezogene Kurve.) Wird das Oval imaginär, so bleiben nur die drei hyperbolischen Äste (unter Erhaltung der dreifachen Symmetrie) reell. (Figur 11, punktierte Kurve.) Das zu einer Kurve dieser Art hinsichtlich des vorerwähnten Polarisationskreises duale Gebilde ist der in Typ V dargestellte Dreispitz.

VI. Die drei Spitzen des Types V rücken unter Erhaltung der dreifachen Symmetrie auf die unendlich ferne Gerade. Dual entspricht diesem Fall die Annahme, daß die drei Asymptoten der Figur 11 stetig in drei sich in einem Punkt schneidende Gerade übergeführt werden. Die drei Spitzentangenten des Types V sind die Asymptoten der Kurve.

VII. und VIII. Wir lassen in Figur 11 das Oval größer und größer werden. Schließlich geht es dann ebenso wie die drei

hyperbolischen Äste in die drei Asymptoten über. Hierzu dual ist die unter VIII. dargestellte Kurve 3. Klasse, welche in die drei Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks zerfällt.

Bemerkung: Wenn die drei Punkte, in welche die Kurve 3. Klasse zerfällt, in eine Gerade hineinwandern, wird das dreifache Netz zum Möbiusschen Netz, indem die Diagonalkurven in Geradenbüschel übergehen, deren Scheitel mit den drei gegebenen Punkten in gerader Linie liegen.

Nach Überschreiten der Dreieckseiten kommt die gestrichelte Kurve zustande, welche wiederum dreifach symmetrisch ist, die Dreieckseiten als Wendetangenten mit den unendlich fernen Punkten als Wendepunkten hat. Während bei der zu III. dualen Ordnungskurve Punkte existieren, von denen aus keine reelle Tangente an die Kurve gelegt werden kann, nämlich die innerhalb des Ovals gelegenen Punkte, gehen an die gestrichelte Kurve von jedem beliebigen Punkt der Ebene mindestens zwei reelle Tangenten. Polarisieren wir sie nun an dem Kreis um den Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks, so ergibt sich der dreifach symmetrische Typ VII. Diese Kurve wird von jeder Geraden in mindestens zwei reellen Punkten geschnitten, muß also notwendig durch das Unendliche gehen. Sie besteht aus drei Einspitzen und drei hyperbolischen Ästen mit sechs Asymptoten und kann, wie man aus der dualen gestrichelten Kurve leicht sieht, in einem Zug durchlaufen werden, ebenso wie die Kurven IV, V und VI.

Die Typen I, II und IV repräsentieren die rationalen Kurven 3. Klasse, die Typen III, V, VI und VII die nichtrationalen.

Alle rationalen Kurven 3. Klasse ($k = 0$, vgl. S. 135) lassen sich projektiv auf die drei speziellen Kurven I, II, IV beziehen. Bei den nichtrationalen Kurven 3. Klasse gehört zu jedem Wert von $k \neq 0$ eine Mannigfaltigkeit von kollinear verwandten Kurven. Der stetigen Veränderung von k entspricht die stetige Folge der projektiv nicht verwandten Kurven, wie sie in Figur 11 und Figur 10 (III bis VII) dargestellt sind. (Die Typen III, V und VII sind als normierte generelle Vertreter von je ∞^1 projektiv nicht miteinander verwandten Kurven von der gleichen topologischen Form zu betrachten.)

Bemerkung: Bezeichnet man die Höhe des gleichseitigen Dreiecks der Figur 11 mit $3a$, ferner mit p_1, p_2, p_3 unter Be-

rücksichtigung des Vorzeichens die senkrechten Abstände irgend-eines Punktes von den Dreieckseiten, so werden die zu III—VIII dualen Kurven 3. Ordnung der Figur 11 durch die gemeinsame Formel umfaßt: $p_1 p_2 p_3 = c$, $c =$ willkürliche Konstante.

Von den homogenen Koordinaten p_i zu x, y übergehend, folgt:

$$3x^2 = (y - 2a)^2 - \frac{2c}{y + a},$$

$$\begin{array}{l} c > 0, \quad a > 0 \\ (y - 2a)^2 (y + a) - 2c = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ verschiedene reelle Wurzeln} \\ \text{(Fall III),} \\ 2 \text{ zusammenfallende und 1 dritte} \\ \text{reelle Wurzel (Fall IV),} \\ 1 \text{ reelle und 2 imaginäre Wurzeln} \\ \text{(Fall V),} \end{array} \right.$$

$c > 0, \quad a = 0$ (Fall VI) ($c < 0, \quad a = 0$ gibt die nämliche Kurve um 60° gedreht),

$c = 0, \quad a \neq 0$ (Fall VIII),

$c < 0, \quad a \neq 0$ (Fall VII).

(Durch Polarisation am Einheitskreis um den Koordinatenanfangspunkt erhält man die entsprechenden Klassenkurven.)

Als IX., X. und XI. Beispiel schließen sich die in Kegelschnitt und Punkt zerfallenden Kurven 3. Klasse an. Läßt man den Dreispitz des Types III unter Erhaltung der dreifachen Symmetrie zusammenschrumpfen, so ergibt sich als Grenzfall die in Kreis und dessen Mittelpunkt zerfallende Kurve 3. Klasse. Das zugehörige Netz IX ist bereits bei Finsterwalder¹⁾ angegeben.

Der innere Punkt rücke allmählich an den Kegelschnitt heran. Man kommt so auf den Typus X: Kurve 3. Klasse, zerfallend in Kegelschnitt und Punkt auf dem Kegelschnitt. Als Beispiel ist eine Parabel und ihr unendlich ferner Punkt gewählt,

Überschreitet der Punkt den Kegelschnitt und wird zum äußeren Punkt, so ergibt sich der Typus XI. In dem behandelten Beispiel ist eine gleichseitige Hyperbel und ihr Mittelpunkt als zerfallende Kurve 3. Klasse eingeführt.

Alle Kurven 3. Klasse, welche in irgend einen Kegelschnitt und irgend einen Punkt zerfallen, sind projektive Verallgemeinerungen der letzten drei Beispiele.

¹⁾ Finsterwalder, Mech. Bez. bei der Flächendeformation.

Wir besprechen jetzt der Reihe nach die gezeichneten Netze I bis XI (S. 145 – 150):

Die Netze sind alle so beschaffen, daß die Berührungspunkte der Netzgeraden Knotenpunkte des Netzes sind. (Auf Fall VIII ist diese Bemerkung nicht übertragbar.) Das Problem der Unterteilung wird dadurch um zwei Grade erniedrigt (vgl. S. 138). Die Umhüllungskurve ist durch Tangenten und deren Berührungspunkte sehr gut bestimmt. Die Netze sind symmetrisch oder trimetrisch mit den Spitzentangenten als Symmetrieachsen. Die Erzeugung wird, von Ausartungen abgesehen, mit der einen reellen bzw. mit den drei reellen Spitzentangenten und deren Schnittpunkten mit der umhüllenden Kurve 3. Klasse begonnen.

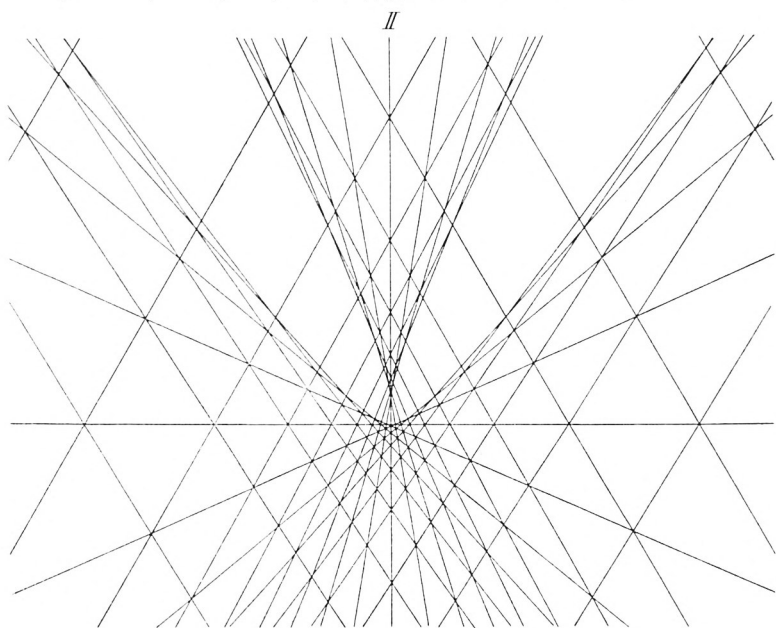
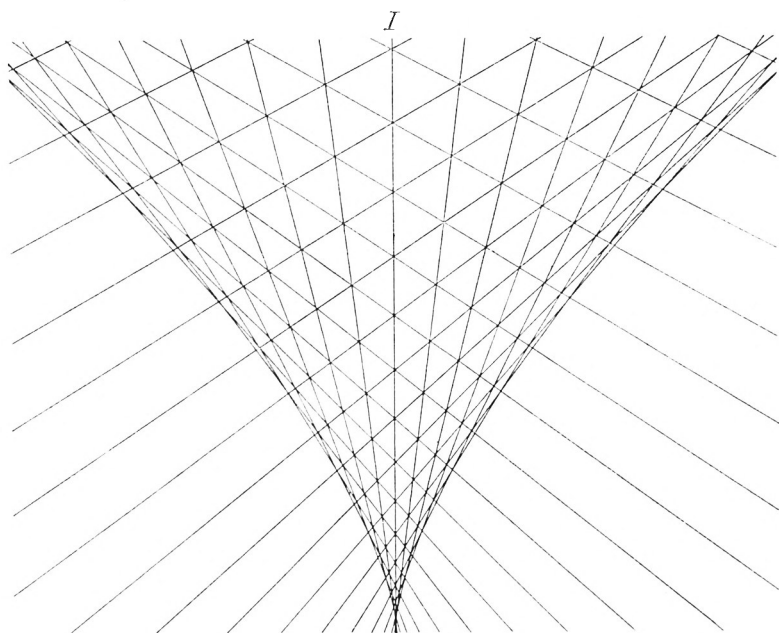
I. Das Netz hat die unendlich ferne Gerade als Häufungslinie. Es kann nicht kollinear so umgeformt werden, daß die Umhüllende ganz im Endlichen verläuft, da letztere von der 3. Ordnung ist.

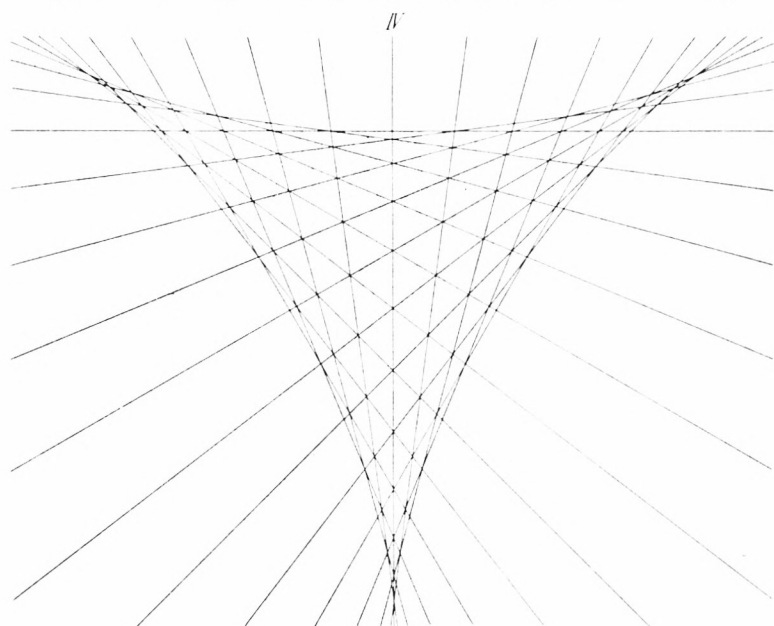
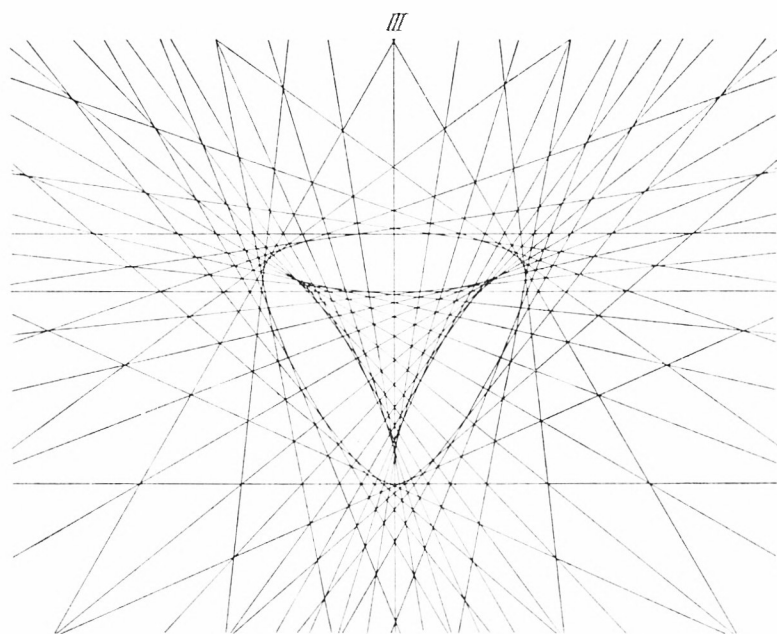
II. Der Netzbereich wird durch die unendlich ferne Gerade als Häufungslinie in zwei Teile zerlegt. Beginnt man mit der Netzbildung in dem Netzbereich, der von der Häufungslinie und dem Kurvenzug mit Spitze begrenzt wird, so führt die in § 1 beschriebene Konstruktion nicht über die Häufungslinie hinaus. Wenn man aber im anderen Teil des Netzes beginnt, so entsteht gleichzeitig auch das jenseits der Häufungslinie liegende Netz.

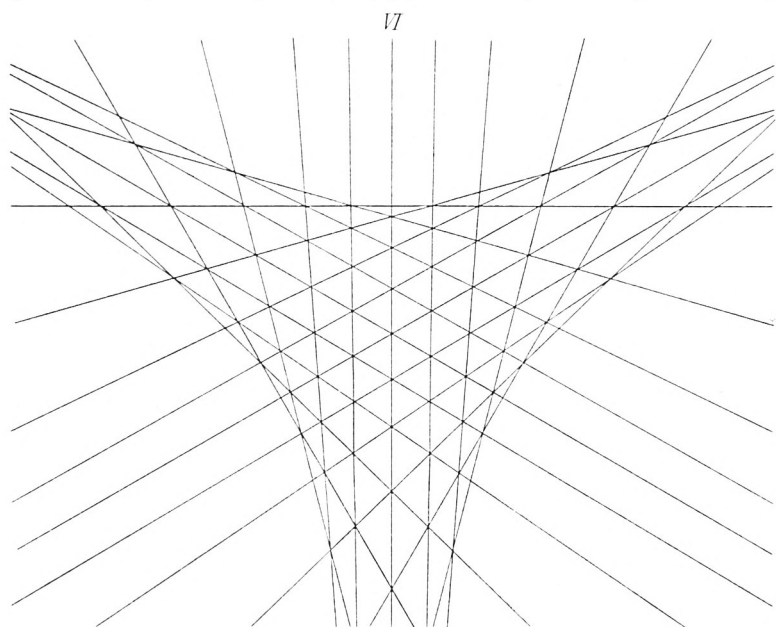
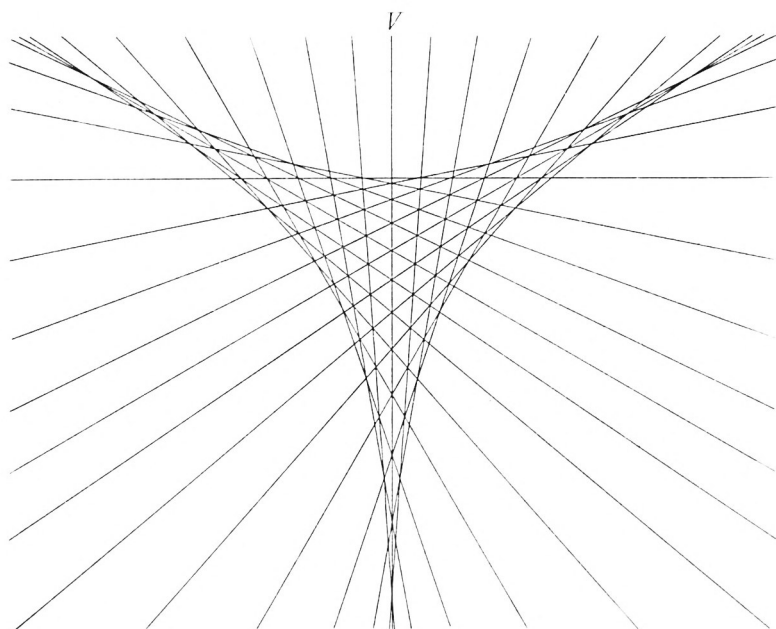
Die Netze III—VII bestehen jeweils aus einer endlichen Anzahl von Geraden. Sie sind Unterteilungen eines denkbar weitmaschigen Grundnetzes, bestehend aus den Scheiteltangenten und Spitzentangenten.

III. Das Netz besteht aus zwei getrennten Bereichen. Die Tangenten des Dreispitzes haben reelle Argumente, die Parameter für die Tangenten des Ovals stimmen im imaginären Bestandteil überein¹⁾. Die Geraden des außerhalb des Ovals liegenden Netzes liefern gleichzeitig das Netz im Dreispitz, während die Umkehrung wiederum nicht zutrifft. Der außerhalb des Ovals liegende Netzbereich erstreckt sich ins Unendliche.

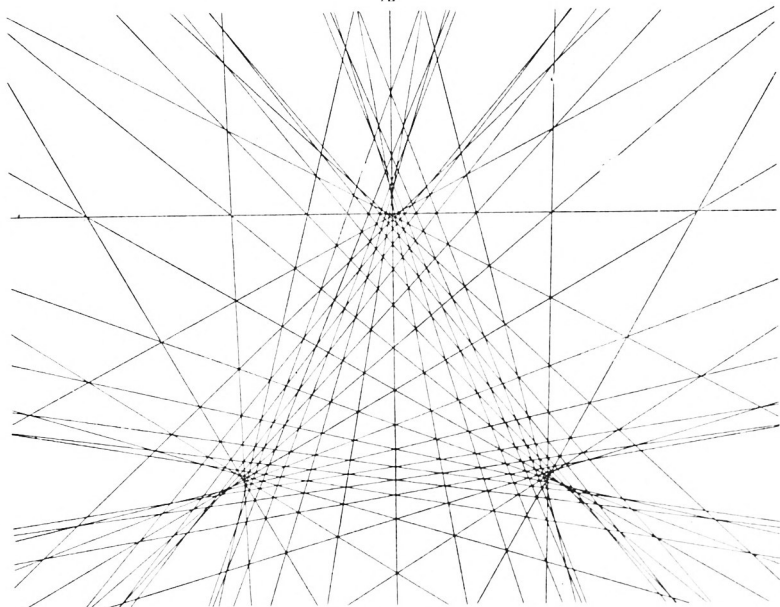
¹⁾ A. Clebsch — F. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, 1876. Bd. I, S. 612.



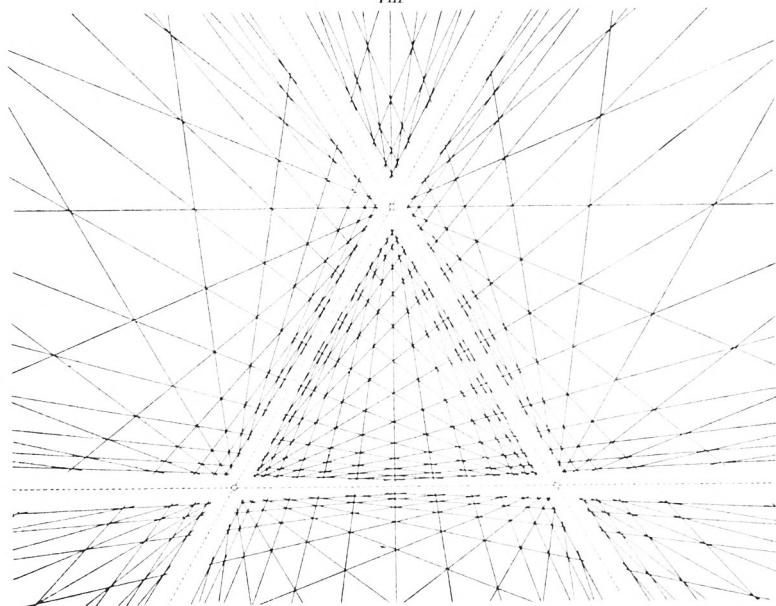


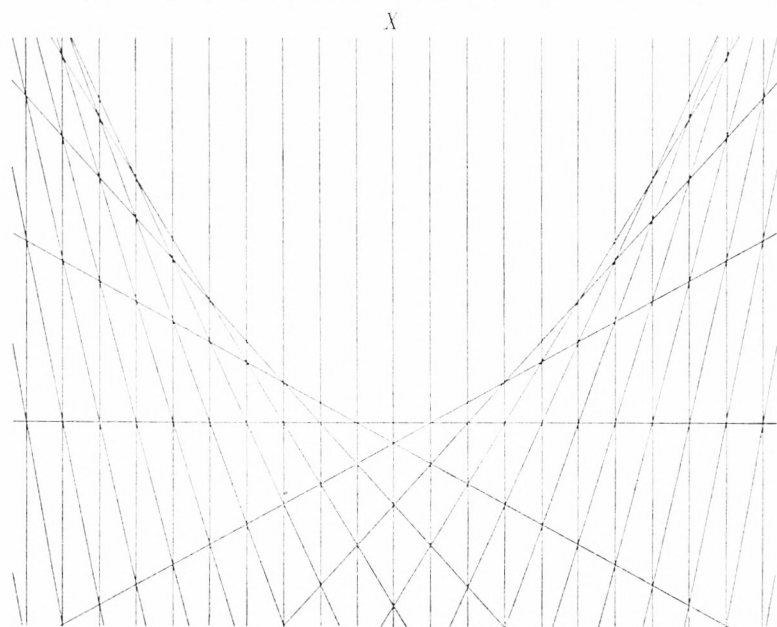
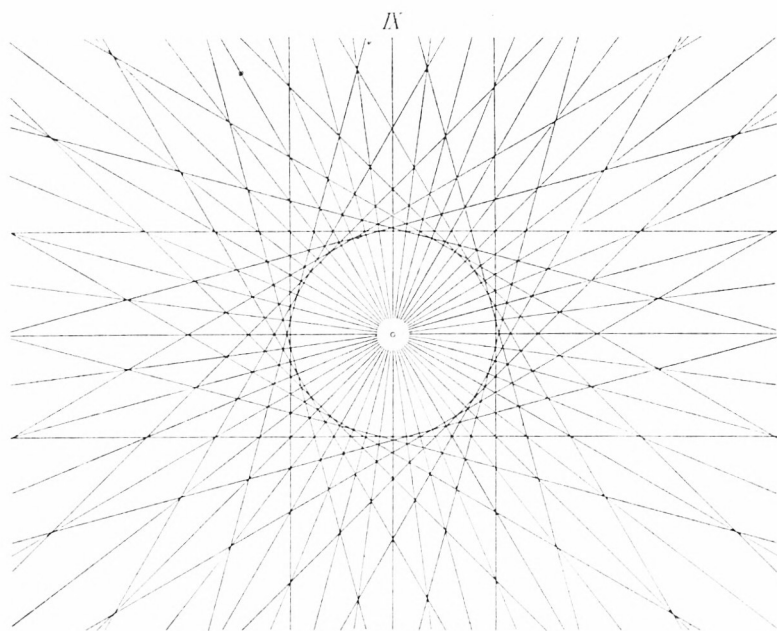


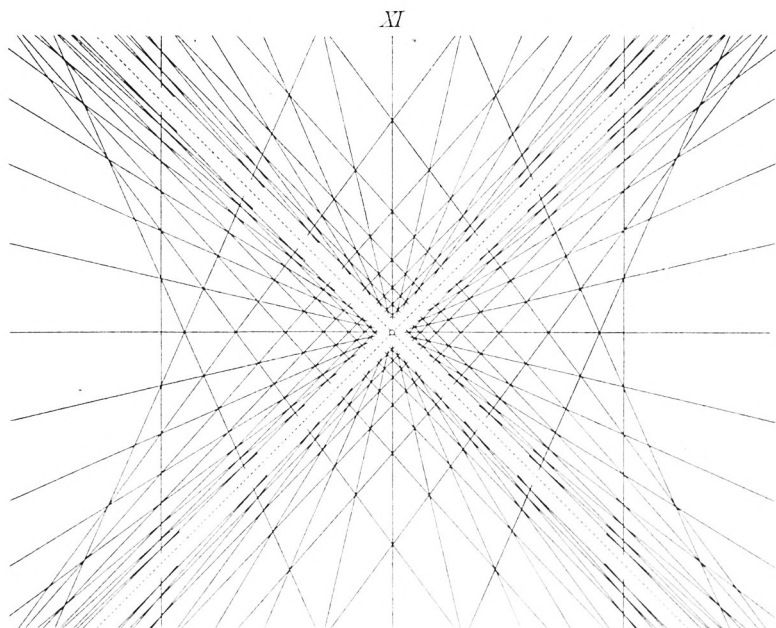
VII



VIII







IV. Der Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden Geraden ist konstant. Das Netz kann unmittelbar gezeichnet werden, wenn man die Erzeugungsweise der dreispitzigen Hypozykloide als Klassenkurve sinngemäß verwendet¹⁾. Der hierbei zu zeichnende Kreis ist Diagonalkurve des Netzes und gestattet dessen fortgesetzte Halbierung auf linearem Wege. Der Netzbereich ist einteilig, das außerhalb des Ovals liegende Netz von III) degeneriert zu einer Reihe von Knotenpunkten auf der unendlich fernen Doppeltangente.

V. Der Netzbereich ist wiederum einteilig.

VI. Das Netz ist einteilig und rückt bei fortgesetzter Unterteilung zu den drei unendlich fernen Spitzen vor. Die Asymptoten sind Netzgerade.

Die in den Dreispitzen von III, IV, V und VI gelegenen Netze unterscheiden sich augenfällig durch diejenige Diagonalkurve, welche durch die drei Scheitel hindurchgeht. Während die übrigen Diagonalkurven dreifache Schleifen bilden, ziehen sich

¹⁾ H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Nr. 148.

diese Schleifen für die erwähnte spezielle Diagonalkurve zu einem trimetrischen Oval zusammen. Dieses Oval wird bei IV ein Kreis, bei III fallen in die Scheitel des Dreispitzes die schwächer gekrümmten Scheitel der Diagonalkurve, bei V und VI die stärker gekrümmten Scheitel derselben.

VII. Die vier in der Figur ersichtlichen Netzbereiche sind im Unendlichen verbunden zu denken. Die sechs Asymptoten der umhüllenden Kurve sind nicht unter den gezeichneten Netzgeraden enthalten.

Bemerkung: Zu den dreifach symmetrischen Kurven des Typus VII kann man Dreiecknetze zeichnen, für die das Brianchonsche Ausgangssechseit regulär ist. Dieser Umstand ist bemerkenswert, weil man auf diese Weise durch drei Geradensysteme eine Unterteilung eines regulären Sechsecks in nicht gleichseitige Dreiecke erzielen kann.

Ausartungen:

VIII. Die drei Verbindungsgeraden der drei Punkte, in welche die Kurve 3. Klasse zerfällt, sind Häufungslinien. Diese zerlegen die Ebene in vier Bereiche. Beginnt man die Netzbildung in einem der Bereiche, so kommt man nach der Erzeugungsweise des § 1 nicht über die Häufungslinien hinaus. Jedoch lassen sich aus den nämlichen Geraden Netze für alle vier Gebiete aufbauen, derart, daß immer eine Gerade für je zwei Bereiche gültig ist. Diese Netzanordnung ist die einzige, welche die ganze Ebene bis auf die Umgebung der Häufungsstellen überdeckt (vgl. § 2 Zusatz 2). Die Diagonalkurven sind Kegelschnitte, welche je zwei Häufungslinien in deren Schnittpunkten mit der dritten Häufungslinie berühren. Darunter befinden sich drei Kreise durch den Mittelpunkt des von den Häufungslinien gebildeten gleichseitigen Dreiecks.

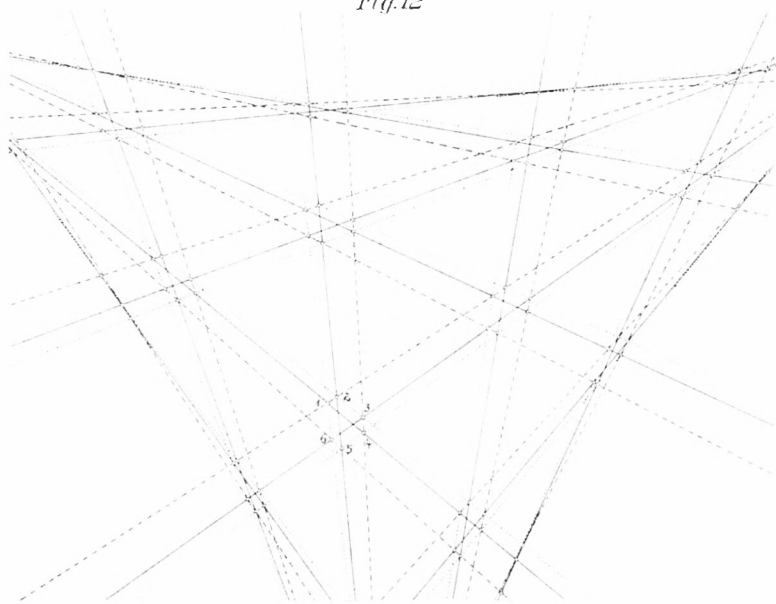
IX. Das Netz ist „einfach geschlossen“ (vgl. § 4, Klassifikation A 2) und zentrisch symmetrisch). Sein Bereich erstreckt sich ins Unendliche. Die Diagonalkurven sind konzentrische Kreise und gleichseitige Hyperbeln.

X. Die Netzbildung läuft auf die Erzeugungsweise der Parabel durch ähnliche Punktreihen hinaus. Die Parallelen sind äquidistant. Die Netzbildung wird mit der Achse und Scheitel-

tangente begonnen. Die unendlich ferne Gerade ist Häufungslinie. Die Diagonalkurven sind Parabeln mit parallelen Achsen.

XI. Die Asymptoten der Hyperbel sind Häufungslinien. Die drei verschiedenen Netzbereiche können ähnlich wie bei VIII von den nämlichen Geraden als Elementen erfüllt werden. Die Diagonalkurven sind gleichseitige Hyperbeln und Ellipsen.

Fig. 12



Als Beispiel eines aus einer endlichen Anzahl von Geraden bestehenden Netzes, welches nicht auf einer einblättrigen Ebene ausgebreitet werden kann, ist in Figur 12 ein Netz angefügt, welches von der Steinerschen Kurve umhüllt wird (vgl. A 1) S. 138). Als Anfangsknotenpunkt ist ein willkürlicher Punkt gewählt (α, β, γ sind nicht Vielfache von 4π ; vgl. § 4, S. 132). Die Geraden gehören drei in sich geschlossenen Gruppen an, welche als durchgezogen, punktiert und strichpunktiert voneinander unterschieden werden. Die mit Nullkreisen versehenen Punkte sind Netzknoten, die übrigen Schnittpunkte haben keine Bedeutung; denn die sich dort schneidenden Geraden gehören an der betreffenden Stelle verschiedenen Blättern der Ebene an. Die sechs

Knotenpunkte 1 bis 6 haben für sechs verschiedene Blätter Geltung. Geht man von irgend einem Knotenpunkt aus und wendet die Erzeugungsweise des § 1 an, so schlägt an der Umhüllenden das Netz in ein anderess Blatt über. Jene Geraden, welche beim Übergang ins neue Blatt die Umhüllende berühren, gelten vom Berührungspunkt ab für das neue Blatt. Diejenigen Geraden dagegen, welche beim Übergang ins neue Blatt die Umhüllende schneiden, gelten für den in Rede stehenden Bereich sowohl für das alte als für das neue Blatt. Der Netzbereich ist nur in einem Ausschnitt gezeichnet, weil in der Nähe der Spitzen die Verhältnisse unübersichtlich werden. Die Umhüllungskurve kommt weniger scharf zur Darstellung, da nicht wie in den vorangehenden Fällen die Berührungspunkte als Netzknotenpunkte mitgegeben werden.

Wenn nun beispielsweise das Dreieck, welches von den der gleichen Gruppe entnommenen Geraden 14, 25, 36 gebildet wird (und auf dessen Seitenstrecken keine Knotenpunkte liegen), zu einem Punkt zusammenschrumpft und das nämliche für ein einer anderen Gruppe zugehöriges Dreieck gilt, so trifft dies von selbst für alle analogen Dreiecke der durchzogenen, punktierten und strichpunktierten Geraden zu. Die gesamte Konfiguration kann dann auch als ein entsprechend engermaschiges, unterteiltes „einfach geschlossenes“ Netz (vgl. A 2) S. 138) auf einem einzigen Blatt der Ebene aufgefaßt werden.

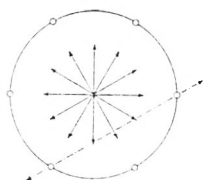
Schlussbemerkungen.

1. Den behandelten dreifachen Geradensystemen entsprechen dual dreifache Punktsysteme von der Art, daß auf der Verbindungslinie von irgend zwei Punkten zweier Systeme stets noch ein Punkt des dritten Systems liegt. Durch duale Übertragung unserer Untersuchungen ergeben sich die Existenz solcher Punktsysteme und folgende Sätze:

Alle Punkte irgend eines vorgegebenen dreifachen Punktsystems von der verlangten Beschaffenheit liegen auf einer Kurve dritter Ordnung.

Die Punkte jeder beliebigen Kurve dritter Ordnung (die auch zerfallen kann) können so angeordnet werden, daß sie ein dreifaches Punktsystem der verlangten Art bilden.

Fig. 13



Beispiel (dual zu IX): Kurve 3. Ordnung (zerfallend in Kreis und unendlich ferne Gerade). Das dreifache Punktsystem wird repräsentiert durch die n Punkte, welche den Kreis in n gleiche Teile zerlegen und durch die n Punkte, welche auf der unendlich fernen Geraden von den n Kreistrassen nach den n vorerwähnten Punkten und den n Winkelhalbierenden zwischen je zwei aufeinander folgenden Kreistrassen ausgeschnitten werden. Im nebenstehenden Beispiel ist $n = 6$ gewählt.

Zusatz: Durch duale Übertragung der im § 1 entwickelten Konstruktion gewinnt man eine Methode um die Punktsysteme der verlangten Beschaffenheit linear zu erzeugen. Diese Konstruktion kann auch als eine Erzeugungsweise einer allgemeinen Kurve 3. Ordnung gedeutet werden.

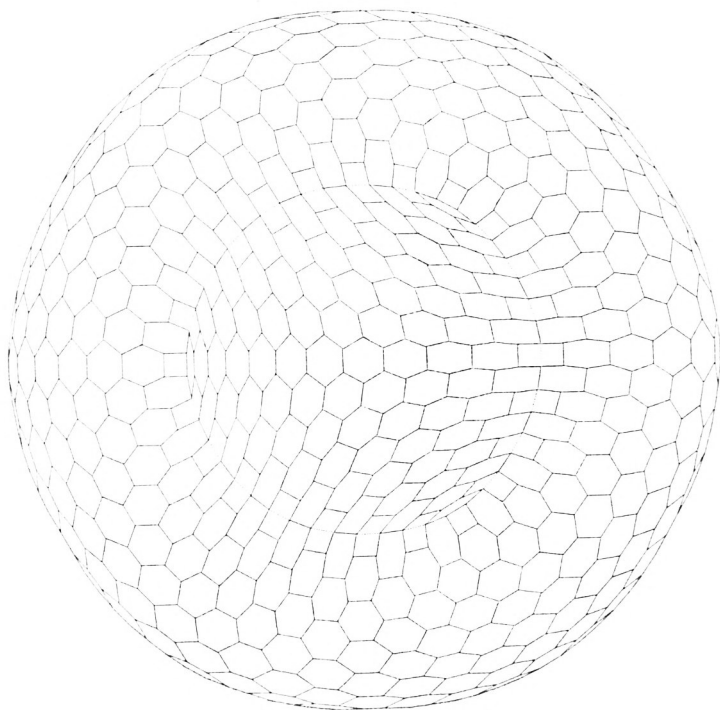
2. Durch Abbildung mittels reziproker Radien bei beliebig zu wählendem Inversionskreis gehen die dreifachen Geradensysteme in dreifache Kreissysteme über, welche so beschaffen sind, daß alle Kreise sich im Inversionszentrum schneiden und daß außerdem jeweils drei Kreise durch einen Punkt gehen.

3. Zu einem dreifachen Geradensystem von der Art, daß je drei Gerade sich in einem Punkt schneiden, läßt sich ein Netz aus gleichseitigen Sechsecken mit parallelen Gegenseiten konstruieren. Jedem Netzknoten ist ein Sechseck zugeordnet, dessen Seiten paarweise parallel sind zu den drei sich in dem Netzknoten schneidenden Geraden. Derartige Sechsecknetze stehen mit dem zugehörigen Geradensystem als Kräfteplan und Lageplan in reziproker Beziehung (Cremonapläne). Das nachstehend gezeichnete Sechsecknetz gehört zu dem dreifachen Geradenetz des Types III. Ebenso wie das Dreiecknetz III besteht auch der zugehörige Cremonaplan aus zwei Teilen, nämlich einem dreifach symmetrischen Bereich A , der von einer Kurve k (in der Figur punktiert) begrenzt wird, und einem dreifach symmetrischen ringförmigen Gebiet B , welches sich ohne Zwischenraum an A anschließt. Längs der Kurve k ist die regelmäßige Struktur des Netzes insofern gestört, als sowohl in A wie auch in B sechseckige und viereckige Maschen mit einander abwechseln. (Diese Ausnahme kann dadurch beseitigt werden, daß A das von k umschlossene

ovalförmige Gebiet doppelt überdeckend und längs k zusammengefügt gedacht und in analoger Weise dem Netz B der Zusammenhang einer Ringfläche gegeben wird. Vgl. Finsterwalder, Mech. Bez. bei der Flächendeformation.)

Das Dreiecknetz III kann stetig in das Dreiecknetz IV und in das Dreiecknetz IX übergeführt werden. Beiden Änderungen entspricht folgende Ausartung des Cremonaplanes: A wird das zum Netz der Steinerschen Kurve gehörige Sechsecknetz, die Kurve k geht in einen Kreis über, das Gebiet B wird zum Kreisring. Die B erfüllende Sechseckeinteilung ist mittels des Dreiecknetzes IX zu konstruieren (vgl. Finsterwalder, Mech. Bez. bei der Flächendeformation). Wenn man die Konfiguration als zu IV zugeordnet betrachtet, hat zunächst nur A eigentliche Bedeutung, während B der unendlich fernen Doppeltangente der Steinerschen Kurve als uneigentlichem Netzanteil entspricht. Wird dagegen

Fig. 14



die Sechseckkonfiguration als zu IX gehörig aufgefaßt, so bezieht sich $\mathcal{A}$ auf den Kreismittelpunkt als uneigentlichen Netzbereich.

Bemerkung: Die Konfiguration ist auch als Einteilung des Kreises in nichtreguläre gleichseitige Sechsecke mit parallelen Gegenseiten bemerkenswert.

4. Die dreifachen ebenen Geradensysteme lassen sich unmittelbar auf Flächen konstanten Krümmungsmaßes übertragen, derart, daß sich dabei auf diesen Flächen dreifache Systeme von geodätischen Linien ergeben, von denen je drei sich in einem Punkt schneiden.

Bei Flächen konstanten positiven Krümmungsmaßes (Biegungsflächen der Kugel) werden die dreifachen Geradensysteme der Ebene aus dem Mittelpunkt einer Kugel auf deren Oberfläche zentral projiziert.

Auf den Flächen negativen konstanten Krümmungsmaßes bedient man sich der Beltramischen Abbildung dieser Flächen in die Ebene, bei der die geodätischen Linien der Fläche den Geraden der Ebene eindeutig zugeordnet werden. Der Grenzkreis, welcher dem Unendlichen der pseudosphärischen Fläche entspricht, kann noch willkürlich angenommen werden.

Die Flächen konstanten Krümmungsmaßes sind (vgl. Finsterwalder, Mech. Bez. bei der Flächendeformation) die allgemeinsten Flächen, auf denen vierfache geodätische Netze existieren, welche den Möbiusschen Geradenetzen der Ebene entsprechen. Die Beantwortung der analogen Frage nach den allgemeinsten Flächen, auf denen dreifache geodätische Netze der verlangten Beschaffenheit vorhanden sind, scheint erheblichen Schwierigkeiten zu begegnen. Jedenfalls gehören die Rotationsflächen zu den gesuchten Flächen (vgl. Finsterwalder, Mech. Bez. bei der Flächendeformation). Das System der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Fundamentalgrößen 1. Ordnung der gesuchten Flächen ergibt für die Nebenbedingung $K=0$ die dreifachen Geradensysteme der Ebene. Die Gleichungen des § 5 erscheinen somit als allgemeine Lösung der erwähnten partiellen Differentialgleichungen für $K=0$.
