Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXII. Jahrgang 1902.

München.
Verlag der k. Akademie.
1903.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Das Problem der conformen Abbildung für eine specielle Kurve von der Ordnung $3n$.

Von **Newel Perry.**

(Eingelaufen 1. Februar.)

§ 1.

Die Gleichung einer circularen Kurve dritter Ordnung in der Ebene $t = u + iv$ ist:

$$t t_1 (a t + a_1 t_1 + \beta) + \gamma t^2 + \gamma_1 t_1^2 + \delta t + \delta_1 t_1 + \varepsilon = 0, \quad (1)$$

wobei $t_1 = u - iv$ gesetzt ist.

Macht man die Transformation

$$t = \varphi(z), \quad \text{wo}$$

$$\varphi(z) \equiv z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n, \quad (2)$$

so erhält man in der Ebene $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ eine „n-fach circulare" Kurve von der Ordnung $3n$, nemlich:

$$\begin{aligned} &\varphi(z) \cdot \varphi_1(z_1) \cdot [a\,\varphi(z) + a_1\,\varphi_1(z_1) + \beta] + \gamma \cdot \varphi^2(z) \\ &\quad + \gamma_1\,\varphi_1^2(z_1) + \delta\,\varphi(z) + \delta_1\,\varphi_1(z_1) + \varepsilon = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Im Anschlusse an eine von Herrn Lindemann gegebene Methode,[1]) nach der Herr Göttler die Kurve (1) behandelt hat,[2]) habe ich in meiner Inaugural-Dissertation[3]) die Kurve (3)

---

[1]) Sitzungsberichte der k. bayer. Akademie d. Wiss. 1895 und 1896; Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., Bd. 32, 1894.

[2]) Sitzungsberichte der k. bayer. Akademie d. Wiss. 1900.

[3]) Das Problem der conformen Abbildung für eine specielle Kurve von der Ordnung $3n$. München 1901.

näher untersucht und gezeigt, dass das Problem der conformen Abbildung für ein von einer derartigen Kurve begrenztes Flächenstück immer mit Hilfe einer integrierbaren Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöst werden kann, wenn bei Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise

$$\begin{aligned} 2 + 2\sum_{i=1}^{m} \varkappa_i + \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - 2) - 2s + \sum_{i=1}^{\mu} (\alpha_i - 1) \\ + \sum_{i=1}^{\varrho} \frac{\beta_i - 1}{2} - \sigma + \pi = 0 \text{ ist.}^{1)} \end{aligned} \tag{4}$$

Hierin sind die Constanten $\varkappa_i$, λ_i, α_i, β_i, s, σ, π durch folgende Festsetzungen erklärt.

Wenn die vier Brennpunkte der Kurve (1) $t = a_1$, $t = a_2$, $t = a_3$, $t = a_4$ von einander verschieden sind, so sei

$$\begin{aligned} R(z) &= [\varphi(z) - a_1][\varphi(z) - a_2][\varphi(z) - a_3][\varphi(z) - a_4] \\ &= \prod_{i=1}^{i=\nu''} (z - h_i)^{\lambda_i}, \text{ wo } \nu'' \leq 4n, \ \Sigma\lambda_i = 4n. \end{aligned}$$

Hat jene Kurve aber einen Doppelpunkt, so sei $a_1 = a_2 = a$; und es wird:

$$\varphi(z) - a = \prod_{i=1}^{n'} (z - g_i)^{\tau_i}$$

$$R(z) = \prod_{i=1}^{n''} (z - h_i)^{\lambda_i} \cdot \prod_{i=1}^{n'} (z - g_i)^{2\tau_i},$$

wobei

$$n' \leq n; \ n'' \leq 2n; \ \Sigma\lambda_i = 2n; \ \Sigma\tau_i = n.$$

Es ist $n' = n$, wenn alle τ_i gleich 1 sind, ebenso $n'' = 2n$, wenn alle λ_i gleich 1 sind. Die Constanten $\varkappa_i$ sind durch die Gleichung

$$\varphi'(z) = \prod_{i=1}^{\nu'} (z - q_i)^{\varkappa_i}, \text{ wo } \nu' \leq n - 1, \ \Sigma\varkappa_i = n - 1$$

definirt, welche die Brennpunkte der Kurve $3n^{\text{ter}}$ Ordnung (3) bestimmt.

[1]) Inaug.-Diss. Gleichung (22) pag. 23.

Die Zahl σ gibt an, durch wie viele Windungspunkte der t-Ebene (entstanden durch die Beziehung $t = \varphi(z)$) die Kurve (1) hindurchgeht ($\sigma = 0, 1, 2, \ldots$ oder $n - 1$), während τ solche Windungspunkte noch in den Brennpunkten a_1, a_2, a_3, a_4 liegen können. Die Kurve (3) hat dann σ Doppelpunkte, τ andere zweifache Brennpunkte und $4n - 2\tau$ einfache Brennpunkte.

Hat aber die Kurve (1) einen Doppelpunkt, so hat die Kurve (3) $\sigma + n$ Doppelpunkte, τ andere zweifache Brennpunkte und $2n - 2\tau$ einfache Brennpunkte.

Liegt der Doppelpunkt von (1) in einem Windungspunkte, so hat die Kurve (3) $n + \sigma - 2$ Doppelpunkte, und an einer andern Stelle noch zwei zusammenfallende Doppelpunkte.

Die Zahlen α_i, β_i und π beziehen sich auf die Winkel, welche in den Verzweigungspunkten bei der Abbildung auf die Halbebene zu berücksichtigen sind.

Ist die Bedingung (4) nicht erfüllt, so führt folgender Weg zum Ziel.

Die Gleichung (3) ergab durch Differentiation

$$\frac{\varphi'(z) \cdot z'}{\sqrt{R(z)}} = - \frac{\varphi_1'(z_1) \cdot z_1'}{\sqrt{R_1(z_1)}}. \tag{5}$$

Hiebei ist:

$$\begin{aligned} R(z) \equiv\; & \alpha^2 \varphi^4(z) + \varphi^3(z) \cdot [2\alpha\beta - 4\alpha_1\gamma] \\ & + \varphi^2(z)[\beta^2 + 2\alpha\delta_1 - 4\alpha_1\delta - 4\gamma\gamma_1] \\ & + \varphi(z) \cdot [2\beta\delta_1 - 4\alpha_1\varepsilon - 4\gamma_1\delta] \\ & + (\delta_1^2 + 4\gamma_1\varepsilon). \end{aligned}$$

Setzt man

$$s' = \frac{ds}{dZ} = \frac{\varphi'(z) z'}{\sqrt{R(z)}},$$

so ist nach Gleichung (5)

$$s' = - s_1'.$$

Man erhält leicht:

$$\frac{d^2}{dZ^2}[\log s'] - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d}{dZ}\log s'\right]^2 = \frac{d^2}{dZ^2}[\log s_1'] - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d}{dZ}\log s_1'\right]^2.$$

Setzt man noch:

$$\{s, Z\} = \frac{d^2}{dZ^2}[\log s'] - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d}{dZ}\log s'\right]^2,$$

so ist $\{s, Z\}$ die bekannte Schwarz'sche Funktion, die bei der Abbildung eines Kreisbogenpolygons auftritt.

$\{s, Z\}$ ist also eine Funktion, welche für reelle Werte von Z reell ist, solange z einen Punkt der Kurve (3) bezeichnet.

Berechnet man $\dfrac{d}{dZ}[\log s']$ und $\dfrac{d^2}{dZ^2}[\log s']$, so ergibt sich leicht:

$$\begin{aligned}\{s, Z\} = {} & \frac{\varphi'''}{\varphi'} z'^2 - \tfrac{3}{2}\cdot\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2} z'^2 + \frac{z'''}{z'} - \tfrac{3}{2}\frac{z''^2}{z'^2} \\ & - \tfrac{1}{2}\frac{R''}{R} z'^2 + \tfrac{3}{8}\frac{R'^2}{R^2} z'^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}\cdot\frac{R'}{R} z'^2.\end{aligned} \tag{6}$$

Hiebei ist $\varphi''' = \dfrac{d^3\varphi(z)}{dZ^3}$ u. s. w.; $z''' = \dfrac{d^3 z}{dZ^3}$, dagegen $R'' = \dfrac{d^2 R(z)}{dz^2}$ u. s. w.

§ 2.

Die Pole der Funktion $\{s, Z\}$ sind offenbar die Nullpunkte der Funktionen φ und R, d. h. die früher mit $z = q_i$, $z = h_i$ und $z = g_i$ bezeichneten Punkte, welche im Innern oder am Rande des betrachteten Flächenstückes liegen.

Die Funktion $\dfrac{d}{dZ}[\log s']$ ist identisch mit der in der Inaugural-Dissertation in Gleichung (11 a) und (11 b) definierten Funktionen $F(z, Z)$. Dort sind im zweiten Kapitel die Pole von $F(z, Z)$ in den Abschnitten I bis VIII untersucht, und es ist die analytische Darstellung von $F(z, Z)$ in der Nähe der Pole bereits gegeben.

Es hat sich gezeigt, dass $F(z, Z)$ nur Pole erster Ordnung besitzt und als Funktion von Z in der Nähe eines jeden Poles $Z = K$ somit die Darstellung hat

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{k}{Z-K} + k_0 + k_1(Z-K) + \dots \tag{7}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2}{dZ^2}[\log s'] = \frac{-k}{(Z-K)^2} + k_1 + 2k_2(Z-K) + \dots$$

und:

$$\left[\frac{d}{dZ}\log s'\right]^2 = \frac{k^2}{(Z-K)^2} + \frac{2kk_0}{Z-K} + (k_0^2 + 2kk_1)$$
$$+ 2(k_0 k_1 + kk_2)\cdot(Z-K) + \dots,$$

folglich:

$$\{s, Z\} = -\frac{k}{2}(k+2)\cdot\frac{1}{(Z-K)^2} + \frac{k'}{Z-K} + \mathfrak{P}(Z-K). \quad (8)$$

Hiebei ist $k' = -kk_0$. Ist also das Residuum in irgend einem Pol der Funktion $\frac{d}{dZ}[\log s']$ bekannt, so ist auch das zweite Residuum der Funktion $\{s, Z\}$ in diesem Pole gegeben, dagegen ist das erste Residuum dieser letzteren Funktion eine unbestimmte Constante k'.

I. Liegt ein Punkt $z = q_i$, welcher nicht mit einem Punkt g_i oder h_i zusammenfällt, im Innern des betrachteten Flächenstückes und ist die komplexe Zahl $Z = A_i$ sein Bild, so haben wir (nach Inaug.-Diss. 13 b) die Darstellung

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{\varkappa_i}{Z-A_i} + \mathfrak{P}(Z-A_i),$$

folglich ist nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = -\frac{\varkappa_i}{2}(\varkappa_i + 2)\cdot\frac{1}{(Z-A_i)^2} + \frac{a_i}{Z-A_i} + \mathfrak{P}(Z-A_i). \quad (9)$$

II. Liegt ein Punkt $z = h_i$ im Innern des Flächenstückes und ist die komplexe Zahl $Z = B_i$ dessen Bild, so ist (nach Inaug.-Diss. 14 b)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{\lambda_i - 2}{2}\cdot\frac{1}{Z-B_i} + \mathfrak{P}(Z-B_i),$$

folglich nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \frac{4-\lambda_i^2}{8}\cdot\frac{1}{(Z-B_i)^2} + \frac{b_i}{Z-B_i} + \mathfrak{P}(Z-B_i). \quad (10)$$

III. Liegt ein Punkt $z = g_i$ im Innern des Flächenstückes und ist die komplexe Zahl $Z = C_i$ dessen Bild, so ist in der Nähe dieser Stelle (Inaug.-Diss. 15 b)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{-1}{Z-C_i} + \mathfrak{P}(Z-C_i),$$

folglich nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(Z-C_i)^2} + \frac{c_i}{Z-C_i} + \mathfrak{P}(Z-C_i). \qquad (11)$$

IV. Liegt ein Punkt $z = q_i$, welcher nicht mit einem h_i oder g_i zusammenfällt, am Rande des Flächenstückes und ist die reelle Zahl $Z = D_i$ sein Bild, so ist (Inaug.-Diss. 16 c)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{a_i - 1}{Z-D_i} + \mathfrak{P}(Z-D_i),$$

folglich nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \frac{1-a_i^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-D_i)^2} + \frac{d_i}{Z-D_i} + \mathfrak{P}(Z-D_i). \qquad (12)$$

V. Liegt $z = h_i$ am Rande des Flächenstückes und ist $Z = E_i$ dessen Bild, so ist (Inaug.-Diss. 17 c)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{\beta_i - 1}{2} \cdot \frac{1}{Z-E_i} + \mathfrak{P}(Z-E_i),$$

und mithin nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \frac{(1-\beta_i)(3+\beta_i)}{8} \cdot \frac{1}{(Z-E_i)^2} + \frac{e_i}{Z-E_i} + \mathfrak{P}(Z-E_i). \quad (13)$$

VI. Liegt $z = g_i$ am Rande des Flächenstückes mit dem Bildpunkte $Z = F_i$, so ist (Inaug.-Diss. 18 b)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{-1}{Z-F_i} + \mathfrak{P}(Z-F_i),$$

mithin nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(Z-F_i)^2} + \frac{f_i}{Z-F_i} + \mathfrak{P}(Z-F_i). \qquad (14)$$

VII. Liegt der Punkt $z = \infty$ im Innern des Flächenstückes und ist $Z = G$ das Bild dieses Punktes, so ist (Inaug.-Diss. 19 b)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{n-1}{Z-G} + \mathfrak{P}(Z-G),$$

Gleichung (8) ergibt hieraus:

$$\{s, Z\} = \frac{1-n^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-G)^2} + \frac{g}{Z-G} + \mathfrak{P}(Z-G). \quad (15)$$

VIII. Liegt der Punkt $z = \infty$ ν-mal am Rande des Flächenstückes und sind die entsprechenden Bildpunkte $Z = G_i$, so ist (Inaug.-Diss. 20 b)

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \frac{\delta_i - 1}{Z-G_i} + \mathfrak{P}(Z-G_i),$$

mithin nach Gleichung (8)

$$\{s, Z\} = \frac{1-\delta_i^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-G_i)^2} + \frac{g_i}{Z-G_i} + \mathfrak{P}(Z-G_i). \quad (16)$$

Das abzubildende Flächenstück habe die folgenden Eigenschaften (vgl. Inaug.-Diss. pag. 19):

1. Die m Punkte $z = q_i$, $i = 1, 2 \ldots . m$, welche nicht mit einem h_i oder g_i zusammenfallen, liegen im Innern des Flächenstückes; das Bild des Punktes q_i sei die komplexe Zahl $Z = A_i$.

2. Die r Punkte $z = h_i$, $i = 1, 2 \ldots . r$ liegen im Innern; das Bild des Punktes $z = h_i$ sei die komplexe Zahl $Z = B_i$.

3. Die s Punkte $z = g_i$, $i = 1, 2 \ldots . s$ liegen im Innern; das Bild des Punktes $z = g_i$ sei die komplexe Zahl $Z = C_i$.

4. Die μ Punkte $z = q_i$, $i = 1, 2 \ldots . \mu$ liegen am Rande des Flächenstückes; der Winkel an der Ecke $z = q_i$ sei $\frac{a_i \cdot \pi}{\varkappa_i + 1}$, wo a_i eine der Zahlen $1, 2, 3 \ldots . 2 \cdot (\varkappa_i + 1)$ ist; das Bild des Punktes $z = q_i$ sei die reelle Zahl $Z = D_i$.

5. Die ϱ Punkte $z = h_i$, $i = 1, 2 \ldots . \varrho$ liegen am Rande des Flächenstückes; der Winkel an der Ecke $z = h_i$ habe die Grösse $\frac{\beta_i \cdot \pi}{\lambda_i}$, wo β_i eine der Zahlen $1, 2, 3 \ldots . (2 \cdot \lambda_i)$ ist; das Bild des Punktes $z = h_i$ ist die reelle Zahl $Z = E_i$.

6. Die σ Punkte $z = g_i$, $i = 1, 2 \ldots . \sigma$ liegen am Rande; der Winkel im Punkte $z = g_i$ habe die Grösse $\frac{\gamma_i \cdot \pi}{\tau_i}$; das Bild des Punktes $z = g_i$ sei die reelle Zahl $Z = F_i$.

7. Wenn der Punkt $z = \infty$ im Innern des Flächenstückes liegt, so sei die komplexe Zahl $Z = G$ sein Bild.

8. Liegt $z = \infty$ ν mal am Rande des Flächenstückes, so seien die Winkel in diesen Punkten $\frac{\delta_i \cdot \pi}{n}$, $i = 1, 2, 3 \ldots . \nu$, wobei δ_i eine der Zahlen $1, 2, 3 \ldots . 2n$ ist. Das Bild derjenigen Ecke $z = \infty$, die den Winkel $\frac{\delta_i \cdot \pi}{n}$ besitzt, sei die reelle Zahl $Z = G_i$.

Zur Abkürzung setzt man, wenn A_i und A_i' ebenso a_i und a_i' u. s. w. konjugierte Zahlen sind,

$$\begin{aligned}
\Psi(z, Z) = \{s, Z\} & - \sum_{i=1}^{m} \left[-\frac{\varkappa_i}{2} (\varkappa_i + 2) \frac{1}{(Z - A_i)^2} + \frac{a_i}{Z - A_i} \right] \\
& - \sum_{i=1}^{m} \left[-\frac{\varkappa_i}{2} (\varkappa_i + 2) \frac{1}{(Z - A_i')^2} + \frac{a_i'}{Z - A_i'} \right] \\
& - \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{4 - \lambda_i^2}{8} \cdot \frac{1}{(Z - B_i)^2} + \frac{b_i}{Z - B_i} \right] \\
& - \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{4 - \lambda_i^2}{8} \cdot \frac{1}{(Z - B_i')^2} + \frac{b_i'}{Z - B_i'} \right] \\
& - \sum_{i=1}^{s} \left[\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(Z - C_i)^2} + \frac{c_i}{Z - C_i} \right] \qquad (17) \\
& - \sum_{i=1}^{s} \left[\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(Z - C_i')^2} + \frac{c_i'}{Z - C_i'} \right] \\
& - \sum_{i=1}^{\mu} \left[\frac{1 - \alpha_i^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z - D_i)^2} + \frac{d_i}{Z - D_i} \right] \\
& - \sum_{i=1}^{\varrho} \left[\frac{(1 - \beta_i)(3 + \beta_i)}{8} \cdot \frac{1}{(Z - E_i)^2} + \frac{e_i}{Z - E_i} \right] \\
& - \sum_{i=1}^{\sigma} \left[\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(Z - F_i)^2} + \frac{f_i}{Z - F_i} \right] \\
& - S.
\end{aligned}$$

Die Grösse S ist eingeführt, um die drei Fälle, wo der Punkt $z = \infty$ im Innern, auf dem Rande oder ausserhalb des Flächenteiles liegt, zugleich behandeln zu können. Es ist nemlich:

a) wenn $z = \infty$ weder im Innern noch am Rande liegt

$$S = 0;$$

b) wenn $z = \infty$ im Innern liegt

$$S = \frac{1-n^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-G)^2} + \frac{g}{Z-G} + \frac{1-n^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-G')^2} + \frac{g'}{Z-G'};$$

c) wenn $z = \infty$ ν-mal am Rande liegt

$$S = \sum_{i=1}^{\nu} \left[\frac{1-\delta_i^2}{2} \cdot \frac{1}{(Z-G_i)^2} + \frac{g_i}{Z-G_i} \right].$$

Diese Funktion $\Psi(z, Z)$ hat im Endlichen keinen Pol und ist reell, wenn Z reell und z ein Punkt der Kurve (3) ist.

§ 3.

Um das Verhalten der Funktion $\Psi(z, Z)$ in der Nähe des Punktes $Z = \infty$ zu studieren, setzen wir $Z = \frac{1}{\zeta}$ und bilden $\Psi\left(z, \frac{1}{\zeta}\right)$.

Es ist:
$$\frac{dz}{dZ} = -\frac{dz}{d\zeta} \cdot \zeta^2$$

$$s' = \frac{-\varphi'(z)}{\sqrt{R(z)}} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \cdot \zeta^2$$

$$\frac{d}{dZ}[\log s'] = \left[\frac{d}{d\zeta}(\log \varphi') - \tfrac{1}{2}\frac{d}{d\zeta}(\log R) + \frac{2}{\zeta}\right] \cdot (-\zeta^2)$$

$$= -\zeta^2 \cdot \frac{d}{d\zeta}(\log \varphi') + \tfrac{1}{2}\zeta^2 \frac{d}{d\zeta}(\log R) - 2\zeta$$

$$\{s, Z\} = \zeta^4 \frac{d^2}{d\zeta^2}(\log \varphi') - \tfrac{1}{2}\zeta^4 \frac{d^2}{d\zeta^2}(\log R) - \tfrac{1}{2}\zeta^4 \left[\frac{d}{d\zeta}(\log \varphi')\right]^2 - \tfrac{1}{8}\zeta^4 \left[\frac{d}{d\zeta}(\log R)\right]^2 + \tfrac{1}{2}\zeta^4 \cdot \frac{d}{d\zeta}(\log \varphi') \cdot \frac{d}{d\zeta}(\log R). \tag{18}$$

Durch die Substitution $Z = \frac{1}{\zeta}$ ist ferner

$$
\begin{aligned}
\frac{k'}{(Z-K)^2} + \frac{k}{Z-K} &= k'\zeta^2(1-K\zeta)^{-2} + k\zeta(1-K\zeta)^{-1} \\
&= k'\zeta^2[1 + 2K\zeta + 3K^2\zeta^2 + \ldots] \\
&= k\zeta[1 + K\zeta + K^2\zeta^2 + K^3\zeta^3 + \ldots].
\end{aligned} \tag{19}
$$

Da $\left\{s, \frac{1}{\zeta}\right\}$ für $\zeta = 0$ Null von der Ordnung vier wird, so muss $\Psi\left(z, \frac{1}{\zeta}\right)$ ebenfalls Null von der Ordnung vier werden für $\zeta = 0$; d. h. in $\Psi\left(z, \frac{1}{\zeta}\right)$ muss der Faktor von ζ, ζ^2 und von ζ^3 einzeln Null ergeben. Hiernach haben wir für die Constanten a_i, b_i, c_i u. s. w. die folgenden drei Bedingungsgleichungen.

$$
\begin{aligned}
\text{I.} \quad & \sum_{i=1}^{m}(a_i + a_i') + \sum_{i=1}^{r}(b_i + b_i') + \sum_{i=1}^{s}(c_i + c_i') \\
& + \sum_{i=1}^{\mu} d_i + \sum_{i=1}^{\varrho} e_i + \sum_{i=1}^{\sigma} f_i + S_1 = 0.
\end{aligned} \tag{20a}
$$

Hiebei ist:

a) wenn $z = \infty$ weder im Innern noch am Rande liegt,

$$S_1 = 0;$$

b) wenn $z = \infty$ im Innern liegt,

$$S_1 = g + g';$$

c) wenn $z = \infty$ ν-mal am Rande liegt,

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\nu} g_i.$$

$$
\begin{aligned}
\text{II.}\quad & \sum_{i=1}^{m}[-\varkappa_i(\varkappa_i+2)+a_i A_i+a_i' A_i'] \\
& +\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{4-\lambda_i^2}{4}+b_i B_i+b_i' B_i'\right] \\
& +s+\sum_{i=1}^{s}\left[c_i C_i+c_i' C_i'\right] \\
& +\sum_{i=1}^{\mu}\left[\frac{1-\alpha_i^2}{2}+d_i D_i\right] \\
& +\sum_{i=1}^{\varrho}\frac{(1-\beta_i)(3+\beta_i)}{8}+e_i E_i\Big] \\
& +\sum_{i=1}^{\sigma}(f_i F_i)+\frac{\sigma}{2}+S_2=0.
\end{aligned}
\tag{20b}
$$

Hiebei ist bez. in den drei obigen Fällen

a) $S_2 = 0$,

b) $S_2 = 1 - n^2 + g\,G + g'\,G'$,

c) $S_2 = \sum_{i=1}^{\nu}\left[\frac{1-\delta_i^2}{2}+g_i\,G_i\right]$.

$$
\begin{aligned}
\text{III.}\quad & \sum_{i=1}^{m}\left[-\frac{\varkappa_i}{2}(\varkappa_i+2)(A_i+A_i')+a_i A_i^2+a_i' A_i'^2\right] \\
& +\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{4-\lambda_i^2}{8}(B_i+B_i')+b_i B_i^2+b_i' B_i'^2\right] \\
& +\sum_{i=1}^{s}[\tfrac{1}{2}(C_i+C_i')+c_i C_i^2+c_i' C_i'^2] \\
& +\sum_{i=1}^{\mu}\left[\frac{1-\alpha_i^2}{2}D_i+d_i D_i^2\right] \\
& +\sum_{i=1}^{\varrho}\left[\frac{(1-\beta_i)(3+\beta_i)}{8}E_i+e_i E_i^2\right] \\
& +\sum_{i=1}^{\sigma}[\tfrac{1}{2}\cdot F_i+f_i F_i^2]+S_3=0.
\end{aligned}
\tag{20c}
$$

Hiebei ist bez. in den drei obigen Fällen

a) $S_3 = 0$,

b) $S_3 = \frac{1-n^2}{2}(G + G') + g\,G^2 + g'\,G'^2$

c) $S_3 = \sum_{i=1}^{\nu}\left[\frac{1-\delta_i^2}{2}\,G_i + g_i\,G_i^2\right]$

Da die Funktion $\Psi(z, Z)$ für keinen Wert von Z ur
lich wird und überall in der Z-Ebene holomorph ist, s
sie nach den Lehren der Funktionentheorie eine Const

Für $Z = \infty$ oder $\zeta = 0$ ist aber $\Psi = 0$; und folglic
die Abbildung eines beliebigen Flächenstückes, das von
Kurve (3) begrenzt wird, abhängig von der Differentialgleic
dritter Ordnung

$$\Psi(z, Z) = 0.$$

Für den Fall, dass die in obiger Gleichung (4) angeg
Bedingung für das abzubildende Flächenstück erfüllt is
unsere Gleichung $\Psi(z, Z) = 0$ zurückgeführt auf die I
rentialgleichung zweiter Ordnung, welche in Gleichung
der Inaugural-Dissertation angegeben ist, und welche
Quadraturen gelöst werden konnte.