Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten.

Von **G. Faber** in Karlsruhe.

(*Eingelaufen 8. November.*)

Überwiegen in einer Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius die Koeffizienten vom Werte Null in genügend starkem Maße über die übrigen, so läßt sich unter geeigneten einfachen Zusatzbedingungen nachweisen, daß der Konvergenzkreis eine natürliche Grenze der betreffenden Funktion ist. Herr Fabry hat diese Fragen zuerst auf das gründlichste untersucht;[1]) einen Teil seiner Sätze habe ich dann einfacher bewiesen.[2])

Wenn man mit $n(\nu)$ die Anzahl der nicht verschwindenden Koeffizienten bezeichnet, die zu Potenzen mit Exponenten $\leq \nu$ gehören, so ist z. B. $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{n(\nu)}{\nu} = 0$ eine hinreichende Bedingung für die Nichtfortsetzbarkeit der Reihe. Andrerseits ist, wie Herr Fabry[3]) ausdrücklich hervorhebt, das Vorhandensein unendlich vieler und schließlich beliebig viele aufeinanderfolgende Koeffizienten umfassender Lücken in der Koeffizientenreihe für sich allein nicht hinreichend dafür, daß der Konvergenzradius sich als natürliche Grenze ergibt; ja es kann $\underline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \frac{n(\nu)}{\nu} = 0$

[1]) Ann. éc. norm. (3) 13 (1896) und acta math. 22 (1899).
[2]) Münchener Berichte 34 (1904).
[3]) Acta math. 22 (1899), p. 87 u. Journ. de Math. (5) 4 (1898), p. 349.

und $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \frac{n(\nu)}{\nu}$ beliebig klein (aber > 0) sein, ohne daß auf dem Konvergenzkreise mehr als eine einzige singuläre Stelle zu liegen braucht.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, diese von Herrn Fabry konstatierte interessante Möglichkeit durch Konstruktion einfacherer Beispiele als derjenigen des Herrn Fabry aufs neue darzutun.

Wenn $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = 1$ ist, konvergiert die Reihe

$$\sum_0^\infty {}^{\nu}\, a_{m_\nu} \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^{m_\nu} \tag{1}$$

in dem Gebiete, in welchem $\frac{1}{2}|x|\cdot|x+1| < 1$ ist, d. i. im Innern einer Lemniskate (ohne Doppelpunkt) mit den Brennpunkten 0 und -1. Vom Kreise $|x| = 1$ liegt der eine Punkt $x = 1$ **auf** dieser Lemniskate, alle übrigen aber **innerhalb** derselben; denn für diese übrigen Punkte des Einheitskreises ist $\frac{1}{2}|x^2+x| < \frac{1}{2}(|x^2| + |x|)$ mit Ausschluß des Gleichheitszeichens, also < 1.

Wählt man nun

$$m_{\nu+1} > 2\, m_\nu \tag{2}$$

und ordnet man (1) nach Potenzen von x:

$$\sum_0^\infty {}^{\mu}\, b_\mu x^\mu, \tag{3}$$

so werden sämtliche b_μ, deren Indices zwischen $2\, m_\nu$ und $m_{\nu+1}$ liegen, gleich Null; es lassen sich also auf diese Weise in der Koeffizientenreihe $b_0, b_1, b_2 \ldots$ beliebig viele und beliebig große Lücken herstellen. Trotzdem hat die Reihe (3), da sie ja die gleiche Funktion wie (1) darstellt, auf dem Einheitskreise keine singuläre Stelle als höchstens die Stelle $x = 1$; diese ist aber sicher singulär; denn auf Grund der Voraussetzung (2) und des eingangs erwähnten Fabryschen Satzes ist die Lemniskate $|x(x+1)| = 2$ natürliche Grenze der Funktion (1). Will man von jenem Satze keinen Gebrauch machen, so wähle man die

a_{m_ν} reell, dann werden es auch die b_μ und es wird, wie leicht zu sehen, $\overline{\lim\limits_{\mu=\infty}} \sqrt[\mu]{|b_\mu|} = 1$, woraus ebenfalls folgt, daß der Punkt $x = 1$ ein singulärer für (3) ist.

Wählt man die m_ν so, daß $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty$ wird, so ergibt sich für die Reihe (3): $\underline{\lim\limits_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = 0$ (speziell: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{n(m_\nu)}{m_\nu} = 0$), dagegen wird im allgemeinen $\overline{\lim\limits_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = \frac{1}{2}$ werden, da ja zwischen $\mu = m_\nu$ und $\mu = 2m_\nu$ sämtliche Koeffizienten vorhanden sein können und dann $\lim \frac{n(2m_\nu)}{2m_\nu} = \frac{1}{2}$ ist; man kann aber den obern Limes beliebig verkleinern, wenn man statt von (1) von der im übrigen genau dasselbe leistenden Reihe $\sum\limits_0^\infty {}^\nu a_{m_\nu} \left(\frac{x^l + x^{l+1}}{2}\right)^{m_\nu}$ ausgeht, wo l eine beliebige natürliche Zahl ist; es ergibt sich dann, wenn wieder $\lim \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty$ angenommen wird, $\underline{\lim\limits_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = 0$, $\overline{\lim\limits_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = \frac{1}{l+1}$ (speziell: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{n(l \cdot m_\nu)}{l \cdot m_\nu} = 0$; $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{n((l+1)m_\nu)}{(l+1)m_\nu} = \frac{1}{l+1}$).

In den so konstruierten Beispielen ist die einzige auf dem Konvergenzkreise gelegene singuläre Stelle keine isolierte Singularität der betreffenden Funktion, und es scheint in der Tat (obwohl hiefür ein Beweis nicht vorliegt) $\underline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \frac{n(\nu)}{\nu}$ immer >0 zu sein, sobald auf dem Konvergenzkreis nur eine endliche Anzahl isolierter Singularitäten auftritt.