Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden.

Von A. Voss.

(Eingelaufen 21. Mai.)

Über Eigenschaften von Kurvenscharen konstanter geodätischer Krümmung auf krummen Flächen habe ich bereits vor längerer Zeit den folgenden Satz ausgesprochen, der die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Liouville bildet:[1])

„Schneiden sich zwei Kurvensysteme von den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1 und γ_2 auf einer Fläche überall unter konstantem Winkel, so ist die Fläche von negativer konstanter Krümmung." Nur in dem ganz speziellen Falle, wo die Krümmungen γ_1, γ_2 gleichzeitig Null sind, also die beiden Kurvenscharen in geodätische Linien übergehen, wird die Krümmung gleich Null, oder die Fläche developpabel.

In der folgenden Note untersuche ich nun die Form des Längenelementes derjenigen Flächen, welche durch ein Kurvensystem von den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1, γ_2 in infinitesimale Rhomben geteilt werden — Flächen mit infinitesimaler rhombischer Teilung[2]) durch

[1]) Vgl. Über die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie, diese Sitzungsber. Bd. XXII, p. 268, 1892; desgleichen die Inauguraldissertation von F. Probst, Über Flächen mit isogonalen Systemen von geodätischen Kreisen. Würzburg 1893.

[2]) Statt dessen soll auch einfach rhombische Teilung gesagt werden.

geodätische Kreise von konstanten Radien, wie man auch sagen könnte.[1])

---

[1]) Es seien hier noch folgende Bemerkungen über infinitesimale Teilung in Rhomben angeführt. Aus jedem rhombischen System

$$ds^2 = e(du^2 + dv^2) + 2f\,du\,dv$$

erhält man ein Orthogonalsystem

$$\left(\frac{e+f}{2}\right) du'^2 + \left(\frac{e-f}{2}\right) dv'^2,$$

wenn man

$$u' = u + v, \quad v' = u - v$$

setzt, vermöge der Diagonalkurven der Rhomben. Umgekehrt erhält man auch aus jedem Orthogonalsystem

$$e_1 du_1^2 + g_1 dv_1^2$$

durch die Substitution

$$u' = u + v, \quad v' = u - v$$

das rhombische System

$$(e_1 + g_1)(du^2 + dv^2) + 2\,du\,dv\,(e_1 - g_1).$$

Die Auffindung aller Kurvensysteme, welche eine Fläche in infinitesimale Rhomben zerlegen, ist daher identisch mit der Ermittelung aller Orthogonalsysteme.

Es gehört ferner zu jeder Kurvenschar eine unendliche Anzahl anderer Scharen, welche mit der ersten eine rhombische Teilung bewirken.

Ist nämlich

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

das Längenelement, und geht dasselbe durch die Substitutionen

$$u = u_1, \quad v_1 = \psi(u, v)$$

in

$$ds^2 = e_1(du_1^2 + dv_1^2) + 2\,du_1\,dv_1\,f_1$$

über, so ist

$$e = e_1(1 + \psi_u^2) + 2\psi_u f_1,$$
$$f = e_1 \psi_u \psi_v + \psi_v f_1,$$
$$g = e_1 \psi_v^2.$$

Hieraus folgt durch Elimination von f_1 und e_1 die partielle Differentialgleichung

$$e\psi_v^2 - 2f\psi_u\psi_v + g\psi_u^2 = g,$$

d. h. man hat unter Anwendung des Symboles Δ für den ersten Differentialparameter

$$\Delta(\psi) = \Delta(u).$$

Man überzeugt sich leicht, daß nicht auf jeder Fläche derartige Systeme möglich sind, sondern daß nur Flächen eines charakteristischen Längenelementes solche Systeme zulassen, und auf die Bestimmung dieses letzteren kann es hier allein ankommen, da die geforderte Eigenschaft allen zueinander isometrisch zugeordneten Flächen gleichmäßig zukommt.

§ 1.

Flächen mit infinitesimal rhombischer Teilung durch Kurven, deren konstante geodätische Krümmungen weder gleich noch entgegengesetzt gleich sind.

Bezeichnet man das Quadrat des Längenelementes auf der Fläche mit

$$1)\qquad ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

so sind bekanntlich die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ oder g_u und g_v gegeben durch[1])

$$2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{f}{\sqrt{g}} &= -g_u\sqrt{\Delta} \\ \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{f}{\sqrt{e}} &= -g_v\sqrt{\Delta}, \end{aligned}$$

So sind z. B. alle rhombischen Teilungen der Ebene, bei denen die eine Schar aus Parallelen resp. aus einem Strahlbüschel besteht, abhängig von den Gleichungen

$$\psi_v^2 + \psi_u^2 = 1$$

resp.

$$v_1^2\,\psi_{v_1}^2 + \psi_u^2 = 1,$$

welche letztere durch die Substitution $l\,v_1 = v$ auf die obere zurückgeführt wird. Analog kann man die Teilungen einer Rotationsfläche, bei denen entweder die Parallelkreise oder die Meridiane als Kurven $u = \text{const}$ gewählt werden, auf die Gleichung

$$\psi_v^2 + \psi_u^2 = Fu$$

zurückführen.

[1]) Vgl. z. B. J. Knoblauch, Einleitung in die Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888, p. 248.

wo
$$\Delta = eg - f^2$$
gesetzt ist.

Soll nun wegen der rhombischen Teilung $e = g = \varepsilon^2$ und $g_u = -c_1$, $g_v = -c$ sein, setzt man ferner
$$f = \varepsilon\,\varphi,$$
so daß $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ der Kosinus des Koordinatenwinkels ω ist, so hat man aus 2)

$$2^{a})\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= c_1\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= c\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2}. \end{aligned}$$

Wird ferner die Substitution

$$3)\qquad \begin{aligned} u_1 &= c\,u + c_1\,v, \\ v_1 &= c_1\,u + c\,v \end{aligned}$$

eingeführt, was unter der Voraussetzung, daß die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien weder gleich, noch entgegengesetzt gleich sind,[1] oder
$$\lambda = c^2 - c_1^2 \neq 0$$
ist, zulässig ist, so hat man
$$\begin{aligned} \lambda\,u &= c\,u_1 - c_1\,v_1 \\ \lambda\,v &= c\,v_1 - c_1\,u_1. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen
$$\frac{\partial}{\partial u} = c\frac{\partial}{\partial u_1} + c_1\frac{\partial}{\partial v_1},\quad \frac{\partial}{\partial v} = c_1\frac{\partial}{\partial u_1} + c\frac{\partial}{\partial v_1}$$
$$\lambda\frac{\partial}{\partial u_1} = c\frac{\partial}{\partial u} - c_1\frac{\partial}{\partial v},\quad -\lambda\frac{\partial}{\partial v_1} = c_1\frac{\partial}{\partial u} - c\frac{\partial}{v_1}$$
folgt nun nach 2^{a})

---

[1]) In Wirklichkeit kommt es auf das Verhältnis der Krümmungen c und c_1 an, da man durch Ähnlichkeitstransformation von jeder Fläche zu einer anderen übergehen kann, welcher dasselbe Verhältnis $c : c_1$ und derselbe Koordinatenwinkel ω zukommt.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial v_1}$$

oder

$$4) \qquad \varepsilon = \frac{\partial \psi}{\partial v_1}, \quad \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial u_1},$$

wo ψ eine willkürliche Funktion der Argumente u_1, v_1 bezeichnet. Führt man, in dem man statt der Differentialquotienten

$$\frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} \dots$$

der Kürze halber

$$F_u, \; F_{uu}, \; F_v \dots$$

schreibt, die Werte in 4) in die Gleichungen 2ᵃ) ein, so ergibt sich zur Bestimmung von ψ die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{A)} \qquad \psi_{v_1 v_1} - \psi_{u_1 u_1} = \psi_{v_1} \sqrt{\psi_{v_1}^2 - \psi_{u_1}^2},$$

welche von c und c_1 gänzlich unabhängig ist.

Und umgekehrt gehört zu jeder Lösung der Gleichung A vermöge der Substitution 3) und der Gleichungen 4) das Längenelement einer Fläche, welche durch die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ mit den konstanten geodätischen Krümmungen $-c_1$, $-c$ in infinitesimale Rhomben zerlegt wird, falls nur die Voraussetzung

$$c^2 - c_1^2 \neq 0$$

eingehalten wird.

Das Quadrat des Längenelementes der Fläche 1) wird in Bezug auf die Variabeln u_1, v_1

$$5) \qquad ds^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2}$$

$$[(du_1^2 + dv_1^2)(\varepsilon^2 + \varepsilon \varkappa \varphi) + 2\, du_1\, dv_1\, (\varepsilon \varphi + \varepsilon^2 \varkappa)],$$

wo zur Abkürzung

$$\varkappa = -\frac{2\,c\,c_1}{c^2 + c_1^2}\,^{1)}$$

gesetzt ist, und der Kosinus des Koordinatenwinkels ω^1 der Kurven u_1, v_1 steht mit ω in der Beziehung

$$\cos\omega^1 = \frac{\cos\omega + \varkappa}{1 + \varkappa\cos\omega}.$$

Die Kurven $u_1 = \text{const}, v_1 = \text{const}$ bilden daher wieder eine rhombische Teilung der Fläche.

Wählt man insbesondere $\varkappa = 0$, d. h. etwa $c_1 = 0$, $c = -1$ so wird

$$\begin{aligned} ds^2 &= (du_1^2 + dv_1^2)\,\psi_{v1}^2 + 2\,du_1\,dv_1\,\psi_{u1}\,\psi_{v1} \\ &= d\psi^2 + du_1^2\,(\psi_{v1}^2 - \psi_{u1}^2). \end{aligned}$$

Die Fläche hat daher jetzt die Kurven $u_1 = \text{const}$ zu geodätischen Linien, während die Linien $v_1 = \text{const}$ von der geodätischen Krümmung $+1$ sind, woraus man durch Ähnlichkeitstransformation diejenigen Flächen erhält, bei denen das eine System aus geodätischen Kurven, das andere aus Kurven von konstanter geodätischer Krümmung besteht.

Es ist übrigens leicht zu zeigen, daß nicht auf jeder beliebigen Fläche solche Kurvensysteme, wie die hier betrachteten, existieren. Aus der Bonnetschen Formel[2]) für die geodätische Krümmung g_φ der Kurven $\varphi = \text{const}$

$$-g_\varphi\sqrt{\Delta} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{g\,\varphi_u - f\,\varphi_v}{s}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e\,\varphi_v - f\,\varphi_u}{s}\right),$$

$$s = \sqrt{g\,\varphi_u^2 - 2\,f\,\varphi_u\,\varphi_v + e\,\varphi_v^2},$$

folgt nämlich, unter der Voraussetzung, daß die Fläche auf ihre Minimalkurven $e = g = 0$ bezogen sei

$$-f\sqrt{2}\,g_\varphi = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{f\frac{\varphi_v}{\varphi_u}} + \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{f\frac{\varphi_u}{\varphi_v}}$$

---

1) $\varkappa$ darf dabei den Wert ± 1 nicht annehmen.

2) Vgl. z. B. Knoblauch, a. a. O., p. 247.

oder, wenn man $\frac{\varphi_v}{\varphi_u}$ mit z^2, f mit $1 : \lambda^2$ bezeichnet:

$$6^a) \qquad -\sqrt{2}\, g_\varphi = \lambda \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \frac{1}{z}}{\partial v} - \frac{1}{z} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Soll nun auf einer zweiten Kurve $\psi = \text{const}$ die geodätische Krümmung wieder einen vorgeschriebenen Wert g_ψ haben, so wird für $\frac{\psi_v}{\psi_u} = \zeta^2$

$$6^b) \qquad -\sqrt{2}\, g_\psi = \lambda \frac{\partial z}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \frac{1}{\zeta}}{\partial v} - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Damit endlich eine rhombische infinitesimale Teilung durch die Kurven $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ hervorgebracht werde, muß

$$\psi_u \psi_v = \varphi_u \varphi_v$$

sein. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} \varphi_u\, d u + \varphi_v\, d v &= d \varphi \\ \psi_u\, d u + \psi_v\, d v &= d \psi, \end{aligned}$$

so wird, wenn man mit ϱ die Funktionaldeterminante von φ und ψ bezeichnet,

$$\begin{aligned} \varrho\, d u &= \psi_v\, d \varphi - \varphi_v\, d \psi \\ \varrho\, d v &= \varphi_u\, d \psi - \psi_u\, d \varphi \end{aligned}$$

oder

$$-d s^2 = \frac{2 f}{\varrho^2} \left[d \varphi^2 \psi_v \psi_u + d \psi^2 \varphi_v \varphi_u - d \varphi\, d \psi\, (\psi_v \varphi_u + \varphi_v \psi_u)\right].$$

Setzt man demgemäß

$$\psi_u = \frac{\mu}{\zeta}, \quad \varphi_u = \frac{\mu}{z}$$

$$\psi_v = \mu \zeta, \quad \varphi_v = \mu z,$$

wo μ eine neue unbekannte Funktion ist, so ergibt sich durch die Integrabilitätsbedingungen in Bezug auf φ und ψ, sowie in Bezug auf μ, eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für z und ζ, so daß man mit 6^a), 6^b) im ganzen drei partielle Differentialgleichungen für z und ζ hat, welche nur für gewisse Formen von λ oder f miteinander verträglich sein werden, wie dies übrigens auch schon aus der oben angegebenen Form des Längenelementes ersichtlich sein dürfte.

§ 2.

Beispiele zu § 1.

Die partielle Differentialgleichung A des § 1, welche durch die Substitutionen

$$u_2 = u_1 + v_1$$
$$v_2 = v_1 - u_1$$

auch auf die Form

$$2\,\psi_{u_2 v_2} = (\psi_{u_2} + \psi_{v_2})\sqrt{\psi_{u_2}\psi_{v_2}}$$

oder in gewöhnlicher Schreibweise in die Gestalt

$$4\,s^2 = (p+q)^2\,p\,q$$

gebracht werden kann, scheint einer allgemeinen Behandlung in dem hier erforderlichen Sinne nicht zugänglich. Ich beschränke mich daher auf die Betrachtung einfacher partikulärer Lösungen derselben.

1. Setzt man

$$\psi = u_1\,\lambda + V$$

wo V eine Funktion von v_1 allein ist, und die Konstante λ, wie im folgenden geschehen soll, auch gleich 1 gesetzt werden kann, so folgt aus A § 1,

$$V'' = V'\sqrt{V'^2 - 1}$$

oder

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{V'} = v_1,\quad V' = \frac{1}{\cos v_1}$$

mithin wird

$$\varepsilon = \psi_{v1} = \frac{1}{\cos v_1}$$

$$\varphi = \psi_{u1} = 1$$

und der Kosinus des Koordinatenwinkels ist

$$\cos \omega = \cos v_1.$$

Das Quadrat des Längenelementes wird daher nach § 1, 5

$$d s^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} \times$$

$$\left\{(du_1^2 + dv_1^2)\left(\frac{1}{\cos^2 v_1} + \frac{\varkappa}{\cos v_1}\right) + 2\, d u_1\, d v_1 \left(\frac{\varkappa}{\cos^2 v_1} + \frac{1}{\cos v}\right)\right\}$$

oder

$$d s^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^4 - c_1^2)^2} \frac{1}{\cos^2 v_1} \times$$

$$\{(d u_1^2 + d v_1)(1 + \varkappa \cos v_1) + 2\, d u_1\, d v_1\, (\varkappa + \cos v_1)\}.$$

Bestimmt man nun nach der Weingartenschen Formel[1])

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{A}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\partial e}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right)\right]$$

$$A = e^2 - f^2$$

das Krümmungsmaß K, so ergibt sich

$$K = -\frac{1}{(1 - k^2)} : \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} = -(c^2 + c_1^2).$$

Die Fläche ist daher von konstanter negativer Krümmung, der Koordinatenwinkel aber nicht von den Variabeln unabhängig.

2. Setzt man dagegen:

$$\psi = v_1 + U,$$

so ist

$$-U' = \sqrt{1 - U'^2}$$

oder:

$$\text{arc} \cos U' = u_1,$$

---

1) Vgl. z. B. Knoblauch, a. a. O., p. 177.

d. h.

$$\varepsilon = 1, \ \varphi = \cos u.$$

Daher wird

$$d s^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} \left[(d u_1^2 + d v_1^2)(1 + \varkappa \cos u_1) + 2 d u_1 d v_1 (\cos u_1 + \varkappa)\right]$$

und das Krümmungsmaß wird jetzt gleich **Null**.

3. Man kann ferner ψ als Funktion von $\alpha u_1 + \beta v_1 = z$ annehmen. Setzt man $\psi = F(z)$, so ist[1])

$$(\beta^2 - \alpha^2) F'' = F'^2 \beta \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

oder

$$F' = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta(\alpha u_1 + \beta v_1)}.$$

Da hier

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{(\alpha u_1 + \beta v_1)}, \ \varphi = \frac{\alpha \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta(\alpha u_1 + \beta v_1)},$$

so wird $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ konstant; d. h. die **Fläche ist konstanter negativer Krümmung.**

4. Setzt man endlich

$$\psi = F\left(\frac{u_1}{v_1}\right) = F(z),$$

so wird die Differentialgleichung A

$$F'' + \frac{2 u_1 v_1}{u_1^2 - v_1^2} F' = - F'^2 \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 - v_1^2}},$$

wobei die Indizes von F die Differentiationen nach z angeben. Für $F' = {}^1/\zeta$ erhält man

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{2 z \zeta}{z^2 - 1} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

---

[1]) Der Wert $\alpha = + \beta$ ist hier nicht zulässig. Allerdings ist dann die Funktion F willkürlich, aber $\cos \omega$ wird gleich $+1$, was keinen Sinn hat.

oder
$$\zeta = -\sqrt{z^2-1} + k(z^2-1)$$
$$F = \frac{v_1^2}{k(u_1^2 - v_1^2) - v_1\sqrt{u_1^2 - v_1^2}},$$

wo k eine willkürliche Konstante. Demgemäß wird

$$\varepsilon = -\frac{u_1}{k(u_1^2 - v_1) - v_1\sqrt{u_1^2 - v_1^2}}$$

$$\varphi = +\frac{v_1}{k(u_1^2 - v_1) - v_1\sqrt{u_1^2 - v_1^2}}$$

und zugleich wird
$$\cos\omega = -\frac{v_1}{u_1} = -\frac{u c_1 + v c}{u c + v c_1}.$$

Die Flächen dieser Klasse zeichnen sich durch eine besondere Eigenschaft aus, welche im nächsten § 3 nachgewiesen wird.

§ 3.

Die Differentialgleichung für den Koordinatenwinkel ω.

Durch die vorige Betrachtung ist die Bestimmung des Längenelementes auf die partielle Differentialgleichung A des § 1 zurückgeführt. Man kann statt derselben auch eine analoge Gleichung für den Winkel ω der Kurven u, v ermitteln. Hierzu würde nur eine Transformation der genannten Gleichung erforderlich sein, doch erscheint es angemessener, die ursprünglichen Variabeln u, v jetzt beizubehalten. Setzt man

$$\varphi = \varepsilon \cos\omega$$
$$\varepsilon = {}^1/\eta,$$

so gehen die Gleichungen 2^a) des § 1 über in

$$1)\qquad -\eta_u = -\eta\left[\frac{\omega_v}{\sin\omega} + \operatorname{cotg}\omega\,\omega_u\right] + \frac{c_1 + c\cos\omega}{\sin\omega}$$
$$-\eta_v = -\eta\left[\frac{\omega_u}{\sin\omega} + \operatorname{cotg}\omega\,\omega_v\right] + \frac{c_1\cos\omega + c}{\sin\omega},$$

und man hat nur die Integrabilitätsbedingungen für die Funktion η zu bilden. Ist nun allgemein

$$\begin{aligned} -\xi_u &= -\xi A' + B' \\ -\xi_v &= -\xi A + B, \end{aligned}$$

so folgt aus den Integrabilitätsbedingungen für ξ

$$\xi\,[A'_v - A_u] + (B_u + B' A) - (B'_v + B A') = 0. \tag{2}$$

Ist also nicht gleichzeitig

$$\begin{aligned} A'_v - A_u &= 0 \\ B_u + B' A &= B'_v + B A', \end{aligned} \tag{3}$$

so ist ξ völlig bestimmt. Unter diesen Umständen gehört also auch zu dem Werte ω in den Gleichungen 1) eine völlig bestimmte Form des Längenelementes, d. h. eine ganz bestimmte Klasse zueinander isometrischer Flächen. Sind dagegen die beiden Gleichungen 3) erfüllt, so wird ξ im allgemeinen noch eine für das Längenelement wesentliche Konstante enthalten; d. h. es existieren dann ∞^1 Flächen mit rhombischer Teilung durch Kurven konstanter geodätischer Krümmung, ohne daß sich dabei der von diesen eingeschlossene Winkel ω ändert.[1])

Man hat nun:

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\omega_v}{\sin\omega} + \omega_u \operatorname{cotg}\omega \\ A &= \frac{\omega_u}{\sin\omega} + \omega_v \operatorname{cotg}\omega \\ B &= \frac{c_1 + c\cos\omega}{\sin\omega} \\ B' &= \frac{c + c_1\cos\omega}{\sin\omega}; \end{aligned}$$

also

[1]) Dabei ist selbstverständlich nicht ausgeschlossen, daß diese Flächen selbst zueinander isometrisch sein können.

4) $$A_u - A'_v = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\omega_u}{\sin\omega}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\omega_v}{\sin\omega}\right)$$

$$B_u - B' A = \omega_v \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}(c_1 + c\cos\omega)$$

$$B'_v - BA' = \omega_u \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}(c_1\cos\omega + c).$$

Der zuletzt genannte Fall kann, abgesehen von der Möglichkeit $\omega = \text{const}$, wo die Fläche wegen der konstanten Krümmung ∞^3 Transformationen in sich zuläßt,[1]) nur stattfinden, wenn

5) $$\omega_v[c_1 + c\cos\omega] = \omega_u[c_1\cos\omega + c]$$

und die erste der Gleichungen 4) erfüllt ist. Aus dieser letzteren folgt aber unmittelbar

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\log\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\log\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = F\cdot\Phi,$$

wo F, resp. Φ Funktionen der Argumente $u+v$, resp. $u-v$ allein sind. Setzt man nun

$$\cos\omega = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}},$$

so ergibt sich aus 5) die Funktionalgleichung für F und Φ

6) $$0 = (c - c_1)F' F^2\Phi^2 + (c + c_1)\Phi' F$$

oder

$$2FF'(c_1 - c) = 2(c + c_1)\frac{\Phi'}{\Phi^2} = h,$$

wo h eine willkürliche Konstante bedeutet.

[1]) Hierüber vgl. § 8, 9, 10.

Demnach wird, falls $(c^2 - c_1^2) \neq 0$

$$F^2 = \frac{h(u+v)}{c_1 - c}$$

$$\frac{1}{\Phi^2} = -\frac{h(u-v)}{c+c_1},$$

wo die Integrationskonstanten als ganz unwesentlich von vornherein gleich Null gewählt sind. Mithin ergibt sich

$$F = \sqrt{\frac{h(u+v)}{c_1 - c}}$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{-(c+c_1)}{h(u-v)}},$$

und hieraus folgt

$$\cos\omega = -\frac{u c_1 + v c}{u c + v c_1};$$

d. h. gerade der Wert, der sich bei dem früheren Ansatze in § 2 ergeben hatte. In der Tat ergibt sich nun nach entsprechender Rechnung auch genau die dort angegebene Form des Längenelementes, welche noch eine willkürliche wesentliche Konstante k enthält.

Es wird nämlich

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}\sqrt{c^2 - c_1^2}}{u c + v c_1}$$

$$A = \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{u^2 - v^2}{u c + v c_1}\right)$$

$$A' = \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{u^2 - v^2}{u c + v c_1}\right)$$

$$B = \frac{u\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}}$$

$$B' = -\frac{v\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

Setzt man noch

$$\frac{1}{\psi} = \frac{u^2 - v^2}{u c + v c_1},$$

so werden die Differentialgleichungen 1)

$$\psi \eta_u + \eta \psi_u - \psi v \frac{\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}} = 0$$

$$\psi \eta_v + \eta \psi_v + \psi u \frac{\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}} = 0,$$

so daß

$$\frac{d \eta \psi}{\sqrt{c^2 - c_1^2}} + \int \frac{(u c + v c_1)}{(u^2 - v^2)^{3/2}} (u\, d v - v\, d u) = 0$$

oder

$$\frac{\eta}{\sqrt{c^2 - c_1^2}} = \frac{k (u^2 - v^2) - (c u + c_1 v) \sqrt{u^2 - v^2}}{u c + v c_1}$$

wird, wo k die Integrationskonstante.

Demgemäß wird

$$\varepsilon \sqrt{c^2 - c_1^2} = \frac{u c + v c_1}{k (u^2 - v^2) - (c u + c_1 v) \sqrt{u^2 - v^2}}$$

und wenn man den Nenner mit w bezeichnet, so daß

$$w = k (u^2 - v^2) - (c u + c_1 v) \sqrt{u^2 - v^2}$$

ist, wird das Längenelement

$$d s^2 = \frac{1}{w^2 (c^2 - c_1^2)} \times$$

$$[(d u^2 + d v^2) (u c + v c_1)^2 - 2 (u c_1 + v c) (u c + v c_1)\, d u\, d v].$$

Die Koeffizienten desselben sind in u, v homogene Funktionen vom Grade -2. Nach einem bekannten Satze von Bour[1]) ist aber dasselbe einer zu einer Rotationsfläche isometrischen Fläche angehörig.

---

[1]) Vgl. z. B. Maurice Lévy, Sur le développement des surfaces dont l'élément linéaire est exprimable par une fonction homogène. Compt. Rend. 87, p. 788.

Das Krümmungsmaß K kann am einfachsten vermöge der folgenden Formel berechnet werden, welche nur noch Differentialquotienten von ω enthält:

$$\sin^2 \omega\, K = \frac{\omega_{uv} \sin \omega}{e} - (c^2 + 2\, c\, c_1 \cos \omega + c_1^2)$$
$$+ \frac{\omega_v (c_1 + c \cos \omega) + \omega_u (c + c_1 \cos \omega)}{\sqrt{e}},$$

hat aber bei beliebigem c, c_1 keinen einfachen Wert. Ist indessen c_1 (oder auch c) gleich Null, so ergibt sich eine Fläche negativer konstanter Krümmung. Man sieht dies am leichtesten aus der oben gegebenen Form von $d\,s^2$, welche in dem genannten Falle die Gestalt

$$d\,s^2 = \frac{(d\,u^2 + d\,v^2)\,u^2 - 2\,v\,u\,d\,u\,d\,v}{(k\,(u^2 - v^2) - c\,v\sqrt{u^2 - v^2})^2}$$

annimmt. Setzt man $u^2 - v^2 = u_1^2$, $v = v$, so erhält man

$$d\,s^2 = \frac{d\,u_1^2 + d\,v_1^2}{(k\,u_1 - c\,v_1)^2}$$

und dies ist das Längenelement einer Fläche von dem Krümmungsmaße

$$-(k^2 + c^2).$$

Man hat also den folgenden Satz:

Die einzigen Flächen, bei denen Systeme von Kurven geodätischer, durchweg konstanter Krümmung c, c_1 $(c^2 - c_1^2 \neq 0)$ existieren, und bei denen zu ein und demselben Koordinatenwinkel ω noch ∞^1 Längenelemente gehören, sind diejenigen, bei denen

$$\cos \omega = -\frac{u\,c_1 + v\,c}{u\,c + v\,c_1}$$

ist. Sie sind zu Rotationsflächen isometrisch.[1]) In

[1]) Ich unterlasse es, den Typus dieser Rotationsflächen anzugeben, der in bekannter Weise erhalten werden kann, aber keine einfache Gestalt anzunehmen scheint.

dem besonderen, Falle wo die eine Kurvenschar aus geodätischen Linien gebildet ist, sind die betreffenden Flächen von konstanter negativer Krümmung.

In der Gleichung 6) ist indessen der Fall $c^2 = c_1^2$, der in den sich daran schließenden Betrachtungen ausgeschlossen werden mußte, zulässig. Setzt man z. B. $c = + c_1$, so folgt

$$\Phi = \text{const} = 1, \quad F = f(u + v),$$

wo F eine willkürliche Funktion von $u + v$ ist. Man erhält dann

$$\cos \omega = \frac{1 - f^2}{1 + f^2}.$$

Integriert man unter dieser Voraussetzung die Gleichungen 1), so wird auch η oder ε eine Funktion von $u + v$ allein und man erhält das Längenelement einer willkürlichen Rotationsfläche

$$\varepsilon^2 \left\{ \cos^2 \frac{\omega}{2} (d u + d v)^2 + \sin^2 \frac{\omega}{2} (d u - d v)^2 \right\},$$

bei welcher die Diagonalkurven der Rhomben, $u - v = \text{const}$, selbst geodätische Linien (die Meridiane der Rotationsfläche) vorstellen. Der Fall $c^2 - c_1^2 \neq 0$ wird indes im nächsten Paragraph allgemein untersucht werden.

§ 4.

Über diejenigen Flächen, welche in infinitesimale Rhomben durch Kurven gleicher oder entgegengesetzt gleicher geodätischer Krümmung geteilt werden.

Setzt man den in den vorigen Untersuchungen im allgemeinen ausgeschlossenen Fall $c^2 = c_1^2$ voraus, so läßt sich die Bestimmung des Längenelementes, anstatt auf eine partielle Differentialgleichung, auf eine kubische Irrationalität und zwei einfache Quadraturen zurückführen.

Wird $c = c_1$ angenommen — für den Fall $c = - c_1$ gelten ganz dieselben Betrachtungen, nur daß an Stelle von $u+v$ $u-v$ einzusetzen ist —, so geben die Gleichungen 2ᵃ) des § 1

$$\varepsilon_u - \varphi_v = \varepsilon_v - \varphi_v$$

oder

$$\frac{\partial(\varepsilon+\varphi)}{\partial u} = \frac{\partial(\varepsilon+\varphi)}{\partial v}.$$

Demnach ist

$$\varepsilon + \varphi = F(u+v),$$

wo F eine willkürliche Funktion des Argumentes $u+v$ bedeutet. Setzt man jetzt

$$u + v = u'$$
$$u - v = v',$$

so wird die erste der Gleichungen 2^a) § 1

$$\varepsilon_u - \varphi_v = c\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2}$$

wegen

$$\varphi = F - \varepsilon$$

und

$$\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} = 2\frac{\partial}{\partial u'}$$

in

$$\frac{\partial}{\partial u'}(2\varepsilon - F) = c\,\varepsilon\sqrt{F}\sqrt{2\varepsilon - F}$$

übergehen. Setzt man endlich

$$2\varepsilon - F = w^2,$$

so daß

$$\cos\omega = \frac{F - w^2}{F + w^2}$$

wird, so erhält man als Differentialgleichung für ω

$$\frac{\partial w}{\partial u_1} = c\left(\frac{w^2 + F}{4}\right)\sqrt{F}, \tag{1}$$

d. h. eine Riccatische Differentialgleichung, bei der die Integrationskonstante eine willkürliche Funktion von $u - v = v'$ ist.

Die Gleichung 1) läßt sich lösen, wenn man die Funktion F in geeigneter Form annimmt. Setzt man nämlich

$$w = z\sqrt{F},^{1)}$$

so entsteht

$$2)\qquad \frac{\partial \frac{1}{Fz^2}}{\partial u'} = -\frac{c}{2}\,\frac{1+z^2}{z^3}.$$

Denkt man sich nun z_0 durch eine partikuläre von v' freie Lösung der Gleichung 2) bestimmt, so kennt man ein partikuläres Integral von 1) und findet so

$$3)\qquad w = U + \frac{U_1}{U_2 + V},$$

wo U, U_1, U_2 Funktionen von u' allein, V eine willkürliche Funktion von v' ist. Damit dieser Wert von w der Gleichung 1) genüge, müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad U' = c/4\,(F + U^2)\sqrt{F} \\ &\text{b)} \quad U_1' = c/4\,\sqrt{F}\,2\,U\,U_1 \\ &\text{c)} \quad -U_2' = c/4\,U_1\sqrt{F} \end{aligned}$$

bestehen. Nun liefert die Gleichung a) bei willkürlich angenommenem U eine und nur eine reelle Wurzel für $\sqrt{F}$, aus b) erhält man dann U_1 durch Quadratur, und ebenso aus c) die Funktion U_2.

Das Längenelement wird nun bezogen auf die Variabeln u_1, v_1,

$$4)\qquad ds^2 = \frac{w^2 + F}{4}\,[du_1^2\,F + dv_1^2\,w^2].$$

Wird also w als Funktion von u_1 allein angenommen, so ist die betreffende Fläche zu einer Rotationsfläche isometrisch.

Umgekehrt kann man aber auch auf jeder Rota-

[1]) Dabei wird $\cos\omega = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ aber für $z = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}$, $\cos\omega = \cos\lambda$.

tionsfläche solche Systeme von Kurven konstanter geodätischer Krümmung bestimmen, da ds^2 noch eine willkürliche Funktion enthält.

Setzt man nämlich das Längenelement in der Form

$$ds^2 = dU^2 + g\,dv_1^2 \tag{5}$$

voraus, so daß $v_1 = \text{const}$ geodätische Linien der Fläche sind, wählt man ferner

$$U = f(u_1),$$

wo f eine noch zu bestimmende Funktion von u_1, g aber eine gegebene Funktion von f ist, so kann man immer, und zwar im allgemeinen auf ∞^1 verschiedene Arten, bewirken, daß die rechten Seiten der Gleichungen 4) und 5) identisch werden. Man hat dazu nur zu setzen:

$$(w^2 + F)F = 4f'^2$$
$$(w^2 + F)w^2 = 4g.$$

Daraus folgt durch Addition und Multiplikation

$$(w^2 + F)^2 = 4(f'^2 + g)$$
$$(w^2 + F)^2 F w^2 = 16 f'^2 g.$$

Demnach wird

$$(w^2 + F)w\sqrt{F} = 4f'\sqrt{g}$$
$$w^2 + F = 2\sqrt{f'^2 + g}$$
$$w^2 = \frac{2g}{\sqrt{f'^2 + g}}.$$

Die Differentialgleichung 1), welche man auch in der Form

$$\frac{\partial w^2}{\partial u_1} = \frac{c}{2}(w^2 + F)\sqrt{F}w$$

schreiben kann, wird daher

$$\frac{\partial \dfrac{g}{\sqrt{f'^2 + g}}}{\partial u_1} = cf'\sqrt{g}.$$

Sie liefert

$$\frac{g}{\sqrt{f'^2+g}} = c\int \sqrt{g}\,df + a$$

oder

$$u_1 = \int \frac{df}{\sqrt{\frac{g^2}{c^2\left(\int \sqrt{g}\,df + a\right)^2} - g}},$$

womit f als Funktion von u_1 mit der willkürlichen wesentlichen Konstanten a bestimmt ist. Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelöst, auf einer gegebenen Rotationsfläche alle diejenigen Kurvensysteme mit der geodätischen Krümmung c zu finden, die eine rhombische Teilung bewirken, deren Diagonalkurven die Meridiane sind.

Ich erwähne zwei Beispiele allgemeinerer Natur.

Wählt man in Gleichung 1) $F = k^2$, so wird

$$\omega = k \operatorname{tg}\left(u_1 c \frac{k^2}{4} + V\right),$$

setzt man zur Abkürzung

$$u_1 c \frac{k^2}{4} + V = \sigma,$$

so wird das Längenelement ausgedrückt durch

$$ds^2 = \frac{k^4}{4\cos^2\sigma}\left(d u_1^2 + \operatorname{tg}^2\sigma\, d v_1^2\right).$$

Bestimmt man aus den Koeffizienten

$$e = \frac{k^4}{4\cos^2\sigma}, \quad g = \frac{k^4 \operatorname{tg}^2\sigma}{4\cos^2\sigma}$$

mittelst der Gaußschen Formel

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{eg}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{g_u}{\sqrt{ge}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{e_v}{\sqrt{eg}}\right]$$

das Krümmungsmaß K, so erhält man

$$K = -c^2 - \frac{V''}{\sqrt{eg}}.$$

Man erhält daher wieder eine Fläche konstanter negativer Krümmung $-c^2$, wenn V eine lineare Funktion von v_1 ist, aber der Koordinatenwinkel ω ist nicht konstant, sondern eine lineare Funktion von u_1 und v_1.[1]) Setzt man andererseits

$$F = \frac{a^2}{u_1},$$

so ist

$$w_0 = \frac{\beta}{\sqrt{u_1}}$$

eine partikuläre Lösung von 1), wenn

$$-\frac{\beta}{2} = c\,a\,(\beta^2 + a^2)$$

gewählt wird. Nun wird

$$\varepsilon = \frac{\beta^2 + a^2}{2\,u_1}$$

$$\varphi = \frac{a^2 - \beta^2}{2\,u_1};$$

man erhält daher wieder eine Fläche konstanter negativer Krümmung mit konstantem Koordinatenwinkel. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 1) führt in diesem Falle auf nicht besonders einfache Formen.

§ 5.

Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Systeme geodätischer Linien in infinitesimale Rhomben zerlegt werden.

Soll endlich eine rhombische infinitesimale Teilung der Fläche durch zwei Systeme geodätischer Kurven entstehen, so ist in den Formeln 2ª, des § 1 $c = c_1 = 0$ zu setzen. Man erhält dann

$$\varepsilon_u = \varphi_v$$

$$\varepsilon_v = \varphi_u$$

---

1) Es wird allgemein $\cos\omega = \cos 2\,\sigma$.

oder

$$\varepsilon = \psi_v, \quad \varphi = \psi_u,$$

mithin

$$\psi_{vv} - \psi_{uu} = 0$$

oder

$$\psi = F(u + v) - \Phi(u - v),$$

wo F und Φ willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind. Demgemäß wird

$$\varepsilon = F' + \Phi'$$
$$\varphi = F' - \Phi',$$

wo die Indizes bei F und Φ Differentiationen nach den Argumenten $u + v$, $u - v$ andeuten. Das Längenelement wird nunmehr durch die Formel

$$d s^2 = (F' + \Phi') [(d u + d v)^2 F' + (d u - d v)^2 \Phi']$$

ausgedrückt. Setzt man

$$(d u + d v) \sqrt{F'} = d u_1$$
$$(d u - d v) \sqrt{\Phi'} = d v_1$$
$$F' + \Phi' = U_1 + V_1,$$

wo U_1 und V_1 Funktionen von $u_1 = u + v$, $v_1 = u - v$ allein sind, so entsteht

$$1) \qquad d s^2 = (d u_1^2 + d v_1^2)(U_1 + V_1).$$

Man hat daher den folgenden Satz: Jede Fläche, welche durch zwei Scharen geodätischer Linien rhombisch geteilt wird, ist eine Fläche mit dem Liouville'schen Längenelement, d. h. eine Liouville'sche Fläche.

Umgekehrt kann man nun aber auf jeder Liouville'schen Fläche ∞^1 Systeme von Kurvenscharen der genannten Art angeben.

Bekanntlich sind durch die Gleichungen

$$\frac{d u_1}{\sqrt{U_1 + c}} \pm \frac{d v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = \text{const}$$

bei willkürlicher Konstante c bei geodätischen Linien der Fläche gegeben. Setzt man nun

$$\frac{d u_1}{\sqrt{U_1 + c}} + \frac{d v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = d u_2$$

$$\frac{d u_1}{\sqrt{U_1 + c}} - \frac{d v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = d v_2,$$

so wird

$$\frac{d u_1}{\sqrt{U_1 + c}} = \frac{d u_2 + d v_2}{2}$$

$$\frac{d v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = \frac{d u_2 + d v_2}{2}$$

und damit geht die Form $d s^2$ (1) in

$$ds^2 = \frac{U_1 + V_1}{4}\left[(du_2^2 + dv_2^2)(U_1 + V_1) + 2\,du_2 dv_2 (U_1 - V_1 + 2c)\right]$$

über, aus der hervorgeht, daß alle diese Systeme geodätischer Kurven rhombische Teilungen hervorrufen.

Zu den Liouville'schen Flächen gehören insbesondere die Flächen zweiten Grades; zu den Systemen geodätischer Linien der verlangten Art die Erzeugenden derselben. Dies läßt sich auch leicht direkt nachweisen.

Betrachtet man z. B. das Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und setzt

$$\frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta, \quad \frac{z}{c} = \zeta,$$

so ist

$$\xi = \frac{u + v}{1 + u v}$$

$$\eta = \frac{u v - 1}{1 + u v}$$

$$\zeta = \frac{u - v}{1 + u v}.$$

Es wird demgemäß für $1 + uv = s$

$$\xi_u = \frac{1 - v^2}{s^2}, \quad \xi_v = \frac{1 - u^2}{s^2}$$

$$\eta_u = \frac{2v}{s^2}, \quad \eta_v = \frac{2u}{s^2}$$

$$\zeta_u = \frac{1 + v}{s^2}, \quad \zeta_v = \frac{1 + u^2}{s^2}$$

daher sind die Koeffizienten des Längenelementes gegeben durch

$$s^4 e = a^2 + c^2 - 2v^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)v^4$$
$$s^4 g = a^2 + c^2 - 2u^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)u^4;$$

und in der Tat wird die Teilung eine rhombische, wenn man an Stelle der Variabeln u, v die durch die Gleichungen

$$du_1 = \frac{du}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2u^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)u^4}}$$
$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2v^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)v^4}}$$

einführt.

Nun hat bekanntlich das Hyperboloid[1]) die Eigenschaft, daß zu dieser Teilung ∞^1 Flächen derselben Art gehören, bei denen die Koeffizienten e, g dieselben bleiben, während der

---

[1]) Die nämliche Eigenschaft besteht übrigens noch für das Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

wo durch die Institutionen

$$\frac{2x}{a} = u + v, \quad \frac{2y}{b} = v - u, \quad \frac{2z}{c} = uv$$

die Koeffizienten e und g gleich

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 v^2}{4}, \quad \frac{a^2 + b^2 + c^2 u^2}{4}$$

werden, und sich nicht ändern, wenn man a^2 durch $a^2 - \lambda$, b^2 durch $b^2 + \lambda$ ersetzt.

Kosinus des Koordinatenwinkels variiert: sie entstehen durch die mit der Transformation in die Schar der konfokalen Flächen

$$a'^2 = a^2 + \lambda$$
$$b'^2 = b^2 + \lambda$$
$$c'^2 = c^2 - \lambda$$

äquivalente Deformation, welche die Längenabschnitte zwischen den sich kreuzenden Erzeugenden ungeändert läßt.

Dieselbe Eigenschaft aber kommt allen Liouvilleschen Flächen überhaupt in viel allgemeinerem Sinne zu: d. h. zu jeder rhombischen Teilung einer Liouvilleschen Fläche durch Systeme geodätischer Linien gehören ∞^1 andere Liouville'sche Flächen, welche dieselben Längenabschnitte der auf ihnen verlaufenden beiden Scharen geodätischer Linien, aber einen verschiedenen Koordinatenwinkel dieser Scharen besitzen. Wie man sieht, liefert dies eine „Deformation" der Liouville'schen Flächen, welche der ganz speziellen Deformation der Flächen zweiten Grades völlig analog ist, und zugleich die bekannte Deformation der letzteren als Spezialfall erscheinen läßt.

Man erhält nämlich für $\eta = \log \varepsilon$ aus den Gleichungen 2^a) des § 1, wenn man $\cos\omega = z$ setzt,

$$2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial u} - z\frac{\partial \eta}{\partial v} - z_v &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} - z\frac{\partial \eta}{\partial u} - z_u &= 0. \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingungen für z sind, wenn man aus den Gleichungen 2) die Werte von z_v und z_u wieder einträgt:

$$\eta_{uu} - \eta_v(\eta_v - z\,\eta_u) - z\,\eta_{uv} = \eta_{vv} - \eta_u(\eta_u - 2\,\eta_v) - z\,\eta_{uv}$$

oder

$$\eta_{uu} + \eta_u^2 = \eta_{vv} + \eta_v^2.$$

Ist aber diese von z ganz unabhängige Gleichung überhaupt erfüllt, so wird

$$z\varepsilon = \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}\, dv + \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\, du + \text{const}$$

aber bei ungeändert bleibendem $\varepsilon \cdot \cos \omega$ noch von einer Konstanten abhängig.

Der Satz kann übrigens auch aus der Form des Längenelementes auf den Liouvilleschen Flächen ganz direkt geschlossen werden. Für den allgemeineren Fall, wo die Kurven von konstanter geodätischer Krümmung sind, besteht ein analoger Satz nicht, da die Integrabilitätsbedingung hier die Funktion z selbst enthält.

§ 6.

Beispiele für die Bestimmung von Kurvensystemen der besprochenen Art auf Flächen konstanter Krümmung.

Als eine weitere Aufgabe bietet sich nun die Bestimmung aller Kurvensysteme der gewünschten Art dar, welche auf einer gegebenen Fläche unter gewissen Umständen möglich sind. Ich muß mich aber hier größtenteils auf die einfache Angabe einzelner einfacher Fälle beschränken, welche die Flächen konstanter Krümmung betreffen. Schon auf den Flächen von der Krümmung Null scheint es keineswegs einfach wegen der Komplikation der zu lösenden Funktionalgleichungen, alle Systeme der geforderten Art, die nicht auf bloßen Bewegungen beruhen, anzugeben.[1])

1. Setzt man

$$1)\qquad \begin{aligned} x &= r \cos u + r_1 \cos v \\ y &= r \sin u + r_1 \sin v, \end{aligned}$$

so hat man bei konstantem u den Kreis

$$(x - r \cos u)^2 + (y - r \sin u)^2 = r_1$$

[1]) Für die Liouville'schen Flächen ist dagegen die Aufgabe, alle rhombischen Teilungen durch geodätische Linien zu finden, im § 5 gelöst. Ein besonderes Interesse haben dabei wieder diejenigen Flächen, die auf mehrfache, d. h. ∞ vielfache Art sich als Liouvillesche Flächen ansehen lassen.

mit dem Radius r_1, dessen Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius r durchläuft; die Gleichungen bilden überhaupt ein doppeltes System von Translationskurven. Daß nun die Ebene durch dasselbe in Rhomben zerlegt wird, ist selbstverständlich. Transformiert man dies Kreissystem durch stereographische Projektion in geeigneter Weise auf eine Kugel, so erhält man auf den Flächen positiver konstanter Krümmung eine Doppelschar von Kreisen mit konstanter geodätischer Krümmung, welche die Fläche in Rhomben zerlegen. Dabei ist natürlich der Fall nicht ausgeschlossen, daß r und r_1 von verschiedenen Vorzeichen angenommen werden, was eine veränderte Lage der Kreise gegeneinander zur Folge hat.

2. **Das System der Kreise mit konstantem Radius a, deren Mittelpunkte einen Kreis mit dem Radius r durchlaufen:**

$$(x - r\cos u)^2 + (y - r\sin u)^2 = a^2$$
$$(x - r\cos v)^2 + (y - r\sin v)^2 = a^2,$$

liefert

$$x^2 + y^2 - 2r(x\cos u + y\sin u) = a^2 - r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2r(x\cos v + y\sin v) = a^2 - r^2$$

oder

$$x(\cos u - \cos v) + y(\sin u - \sin v) = 0.$$

Setzt man nun

$$x = \lambda\,[\sin u - \sin v] = 2\lambda \sin q \cos p$$
$$y = \lambda\,(\cos u - \cos v) = 2\lambda \sin q \sin p,$$

wobei

$$p = \frac{u+v}{2}$$
$$q = \frac{u-v}{2}$$

so wird

$$x\cos u + y\sin u = \lambda \sin(u - v)$$

$$x^2 + y^2 = 4\lambda^2 \sin^2\frac{u-v}{2}$$

oder

$$\lambda = {}^1/_2 \frac{(\cos q + \sqrt{a^2 - r^2 + \cos^2 q})}{\sin q}.$$

Demgemäß wird

$$x = \cos p\,(\cos q + S)$$
$$y = \sin p\,(\cos q + S),$$

wenn zur Abkürzung

$$S = \sqrt{a^2 - r^2 + \cos^2 q}$$

gesetzt wird.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß in der Tat die Koeffizienten e und g von ds^2 einander gleich sind. Wählt man insbesondere $a = r$, so erhält man die Doppelschar von Kreisen mit konstantem Radius durch den Koordinatenanfang, d. h. einen speziellen Fall von Nr. 1. Auch hier kann man durch stereographische Projektion zu Flächen konstanter positiver Krümmung übergehen.

3. Auch die Kreise von gleichem Radius r, welche eine gerade, etwa die x-Achse berühren, bilden eine solche Doppelschar. Setzt man nämlich

$$x = \frac{u + v}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{(v - u)^2 - r^2}{4}},$$

so ist

$$x_u = {}^1/_2, \quad x_v = {}^1/_2$$

$$y_u = -\frac{v - u}{4\sqrt{\frac{(v - u)^2 - r^2}{4}}}, \quad y_v = \frac{v - u}{4\sqrt{\frac{(v - u)^2 - r^2}{4}}},$$

so daß wieder $e = g$ wird.

4. Vermöge des Prinzips der reziproken Radien gewinnt man aus dem Spezialfalle unter Nr. 3 in der Ebene den Fall, wo die Doppelschar der Geraden, welche ein und den-

selben Kreis berühren, ein System von geodätischen Linien bildet, die wieder eine rhombische Teilung bewirken.

5. Allgemeiner aber rufen je zwei Strahlbüschel der Ebene mit beliebigen Mittelpunkten eine solche Teilung hervor.

Die Gleichungen

$$y = (x - e)\, v$$
$$x = (x + e)\, u,$$

in denen der Einfachheit halber $e = 1$ gewählt werden möge, sind die von zwei Strahlbüscheln, welche durch die Punkte $e, 0$; $-e, 0$ gehen. Aus den Gleichungen

$$x = -\frac{u + v}{u - v}$$
$$y = -\frac{2\,u\,v}{u - v}$$

ergibt sich

$$e = \frac{4\,v^2 (1 + v^2)}{(u - v)^4}$$
$$g = \frac{4\,u^2 (1 + u^2)}{(u - v)^4}.$$

Setzt man demgemäß:

$$\frac{d\,u}{u \sqrt{1 + u^2}} = d\,u_1,$$
$$\frac{d\,v}{v \sqrt{1 + v^2}} = d\,v_1,$$

so werden die Koeffizienten e, g einander gleich.

Dabei kann auch der Mittelpunkt des einen Büschels im Unendlichen liegen, ein Fall, der durch die Formeln

$$y = u\,v$$
$$x = u$$

zum Ausdruck gebracht wird.

Hier wird das Längenelement

$$ds^2 = du^2(1 + v^2) + 2\,u\,v\,du\,dv + u^2\,dv^2,$$

so daß man nur

$$\frac{du}{u} = du', \quad \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = dv'$$

zu setzen hat.

6. Endlich sei noch ein System angeführt, bei dem die eine Kurvenschar geodätisch, die andere aus Kreisen von konstantem Radius besteht.

Setzt man

$$y = v,$$
$$(x - u)^2 + y^2 = c^2,$$

d. h. betrachtet man die Parallelen zur x-Achse und die Kreise mit konstantem Radius c, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, so ist das Längenelement

$$ds^2 = du^2 - 2\frac{v\,du\,dv}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{c^2\,dv^2}{c^2 - v^2}$$

und man hat nur

$$\frac{\varepsilon\,dv}{\sqrt{c^2 - v^2}} = dv_1, \quad du = du_1$$

zu setzen, um die rhombische Teilung herbeizuführen.

§ 7.

Bestimmung aller geodätischen Kurvensysteme mit rhombischer Teilung auf den developpabeln Flächen.

Die im vorigen § 6 gegebenen Beispiele erschöpfen für die Ebene noch nicht einmal die Fälle, in denen beide Kurvenscharen aus geraden Linien bestehen. Aus dem Liouvilleschen Ausdrucke für das Krümmungsmaß folgt für $c = c_1 = 0$ sofort

$$\omega_{uv} = 0$$

oder

1) $$\omega = U + V,$$

wo U und V Funktionen von u, v allein sind.

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{e}\cos\omega) = 0$$
$$\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{e}\cos\omega) = 0$$

folgt für $\varepsilon = \sqrt{e}$:

$$\varepsilon_u \sin\omega + \omega_v + \omega_u \cos\omega = 0$$
$$\varepsilon_v \sin\omega + \omega_u + \omega_v \cos\omega = 0;$$

also die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\omega_v + \omega_u \cos\omega}{\sin\omega}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\omega_u + \omega_v \cos\omega}{\sin\omega}\right)$$

oder nach 1)

$$\sin(U+V)(V'' - U'') = (V'^2 - U'^2)\cos(U+V),$$

d. h.

2) $$\operatorname{tg}(U+V) = \frac{V'^2 - U'^2}{V'' - U''}.$$

Diese Funktionalgleichung ist nun offenbar erfüllt für $U' = c$, $V' = \pm c$; desgleichen für $v = \text{const}$,

$$\frac{U''}{U'^2} = \frac{\cos(U+c)}{\sin(U+c)}$$

oder

$$U' = c_1 \sin(U+c),$$

also

$$\frac{dU}{\sin(U+c)} = c_1\, du.$$

Um aber **alle** Systeme der verlangten Art zu finden, muß die Funktionalgleichung 2) gelöst werden. Differentiiert man nun dieselbe nach u und v, indem man zunächst $\operatorname{tg}(U+V)$ durch $f(U+V)$ ersetzt, so folgt

$$U'f' = -\frac{2\,U'\,U''}{V''-U''} + \frac{V'^2-U'^2}{(V''-U'')^2}\,U'''$$

$$V'f' = +\frac{2\,V'\,V''}{V''-U''} - \frac{V'^2-U'^2}{(V''-U'')^2}\,V'''$$

oder durch Elimination von f'

$$2\,U'\,V'\,(V''^2-U''^2) = (V'^2-U'^2)\,(U'''\,V'+V'''\,U').$$

Dividiert man diese Gleichung durch $U'\,V'$, was zulässig ist, wenn keine der Funktionen U, V eine Konstante ist, (welcher Fall soeben betrachtet wurde) so folgt

$$3)\qquad 2(V''^2-U''^2) = (V'^2-U'^2)\left(\frac{U'''}{U'}+\frac{V'''}{V'}\right).$$

Differentiiert man jetzt nach v, so folgt

$$4)\quad 4\,V''\,V''' - 2\,V'\,V''\left(\frac{U'''}{U'}+\frac{V'''}{V'}\right) - (V'^2-U'^2)\left(\frac{V'''}{V'}\right)' = 0$$

und hieraus durch Differentiation nach u

$$-2\,V'\,V''\left(\frac{U'''}{U'}\right)' + 2\,U'\,U''\left(\frac{V'''}{V'}\right)' = 0.$$

Mithin ist

$$\left(\frac{U'''}{U'}\right)'\frac{1}{U'\,U''} = \left(\frac{V'''}{V'}\right)'\frac{1}{V'\,V''} = c,$$

wo c eine willkürliche Konstante. Durch Integration erhält man

$$5)\qquad \begin{aligned} \frac{U'''}{U'} &= c/2\;U'^2 + \frac{\alpha}{2} \\ \frac{V'''}{V'} &= c/2\;V'^2 + \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Setzt man den so bestimmten Wert von $\frac{U'''}{U'}$ in 4) ein, so folgt

$$V''[4\,V''' - 2\,c\,V'^3 - (\alpha + \beta)\,V'] = 0.$$

Eine erste Lösung dieser Gleichung ist $V'' = 0$. Dann ist aber $V' = \gamma$, und der Gleichung

$$f(U + \gamma v) = \frac{\gamma^2 - U'^2}{-U''}$$

kann offenbar nur genügt werden, wenn $U' = \pm\gamma$ genommen wird, wodurch man auf den oben bereits genannten Spezialfall zurückgeführt wird.

Es muß daher

$$V''' = c/2\,V'^3 + \frac{\alpha + \beta}{4}\,V' \tag{6a}$$

und ebenso

$$U''' = c/2\,U'^3 + \frac{\alpha + \beta}{4}\,U' \tag{6b}$$

sein. Vergleicht man diese Gleichungen mit den in 5) erhaltenen Ausdrücken, so folgt

$$\alpha = \beta,$$

so daß nun

$$\frac{V'''}{V'} = \frac{c}{2}\,V'^2 + \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{U'''}{U'} = \frac{c}{2}\,U'^2 + \frac{\alpha}{2}$$

wird. Setzt man diese Werte endlich in 3) ein, so folgt

$$2\,(V''^2 - U''^2) = \left(\frac{V'^2 - U'^2}{2}\right)[(V'^2 + U'^2)\,c + 2\,\alpha]$$

und diese Gleichung zerfällt in die beiden neuen

$$
7)\qquad
\begin{aligned}
V''^2 - V'^4 \frac{c}{4} - V'^2 \frac{a}{2} &= k \\
U''^2 - U'^4 \frac{c}{4} - U'^2 a/2 &= k
\end{aligned}
$$

wo k eine neue willkürliche Konstante bedeutet. Setzt man jetzt $a = -4\beta$, so wird

$$
\frac{2\,U'\,d\,U'}{\sqrt{U'^4 \frac{c}{4} - U'^2_2 \beta + k}} = 2\,d\,u\,U'
$$

oder, wenn $c/4 = -\gamma^2$ genommen wird,

$$
\frac{\arc\sin\left(\frac{\beta}{\gamma} + U'^2 \gamma\right)}{\sqrt{k + \frac{\beta^2}{\gamma^2}}} = 2\,(U\gamma + h_1).
$$

Man hat also:

$$
\begin{aligned}
U'^2 \gamma + \frac{\beta}{\gamma} &= \sqrt{m} \sin 2\,(U\gamma + h_1) \\
V'^2 \gamma + \frac{\beta}{\gamma} &= \sqrt{m} \sin 2\,(U\gamma + h_2),
\end{aligned}
$$

wo

$$
m = k + \frac{\beta^2}{\gamma^2}
$$

gesetzt ist. Demgemäß wird

$$
\begin{aligned}
\gamma\,(U'^2 - V'^2) &= \sqrt{m}\,[\sin 2\,(U\gamma + h_1) - \sin 2\,(V\gamma + h_2)] \\
U' - U' &= \sqrt{m}\,[\cos 2\,(U\gamma + h_1) - \cos 2\,(V\gamma + h_2)].
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt

$$
\gamma\,\frac{U'^2 - V'^2}{V' - V'} = -\operatorname{cotg}\,[(U + V)\,\gamma + h_1 + h_2].
$$

Zieht man noch die Konstante γ in die Funktionen U, V hinein, und wählt $h_1 + h_2 = \pi/2$, so folgt in der Tat

$$\frac{U'^2 - V'^2}{U' - V'} = \operatorname{tg}(U + V).$$

Diese Lösung, welche U, V als elliptische Funktionen von u, v darstellt, entspricht, wie jetzt gezeigt werden soll, dem folgenden Satze:

Die Tangenten jedes Kegelschnittes bilden eine doppelte Schar von geodätischen Linien in der Ebene, durch welche dieselbe rhombisch geteilt wird.

Seien nämlich

$$\frac{x \cos u}{a} + \frac{y \sin u}{b} = 1$$

$$\frac{x \cos v}{a} + \frac{y \sin v}{b} = 1$$

zwei Tangenten eines Kegelschnittes, insbesondere der Ellipse[1])

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so wird

$$\frac{x}{a} \sin(v - u) = \sin v - \sin u$$

$$\frac{y}{b} \sin(v - u) = \cos u - \cos v.$$

Daraus ergibt sich

$$e = x_u^2 + y_u^2 = (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)\, P$$

$$g = x_v^2 + y_v^2 = (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)\, P,$$

wo

$$P = \frac{[1 - \cos(v - u)]^2}{\sin^4 (v - u)}$$

gesetzt ist. Es entsteht also in der Tat eine rhombische Teilung, wenn man

---

[1]) Für die Hyperbel sind natürlich die trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische zu ersetzen.

$$\frac{du}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} = du_1$$
$$\frac{dv}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} = dv_1$$

setzt. Auch für die Parabel $y^2 = 2px$ besteht der Satz. Denn hier hat man für den Schnittpunkt zweier Tangenten

$$x = \frac{uv}{2p}$$
$$y = \frac{v+u}{2}.$$

Demnach wird

$$x_u^2 + y_u^2 = \frac{p^2 + v^2}{4p^2}, \quad x_v^2 + y_v^2 = \frac{p^2 + u^2}{4p^2}$$

und man hat nur

$$\frac{du}{\sqrt{p^2 + u^2}} = du_1, \quad \frac{dv}{\sqrt{p^2 + v^2}} = dv_1$$

zu setzen.

Will man dagegen alle rhombischen Teilungen der Ebene finden, welche durch zwei Kreisscharen von konstanten Radien c und c_1 entstehen, so ist zu setzen

$$x - U = c \cos \Theta, \quad y - U_1 = c \sin \Theta$$
$$x - V = c_1 \cos \Theta', \quad y - V_1 = c_1 \sin \Theta',$$

wo U, U_1; V, V_1 Funktionen der Argumente u; v allein, Θ und Θ_1 aber von beiden abhängig sein können. Alsdann ist

$$x_u = -c_1 \sin \Theta' \, \Theta'_u, \quad x_v = -c \sin \Theta \, \Theta_v$$
$$y_u = +c_1 \cos \Theta' \, \Theta'_u, \quad y_v = +c \cos \Theta \, \Theta_v,$$

so daß die Bedingung der rhombischen Teilung

$$c_1^2 \Theta_u'^2 = c^2 \Theta_v^2$$

wird. Setzt man demgemäß

$$\Theta = c_1 \psi_u, \quad \Theta' = c \psi_v,$$

so sind noch die Funktionalgleichungen

$$U - V = c_1 \cos(c\,\psi_v) - c\cos(c_1\,\psi_u)$$
$$U_1 - V_1 = c_1 \sin(c_1\,\psi_v) - c\sin(c_1\,\psi_u)$$

zu befriedigen. Dieselben sind aber keiner einfachen Behandlung zugänglich und auch andere Ansätze, welche die Einführung trigonometrischer Funktionen vermeiden, führen zu weitläufigen Funktionalgleichungen, die ich bisher nicht vollständig untersucht habe.

§ 8.

Die Flächen konstanter negativer Krümmung.

Die Formeln des § 1, 2 nehmen eine besonders einfache Gestalt an, wenn $\cos\omega$ als konstant vorausgesetzt wird. Bezeichnet man die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ mit γ_1, γ_2, so wird das Längenelement der zugehörigen Fläche[1])

1) $$d s^2 = \frac{d u^2 + 2\cos\omega\, d u\, d v + d v^2}{\left[\frac{(\gamma_1 + \gamma_2\cos\omega)\,u + (\gamma_2 + \gamma_1\cos\omega)\,v}{\sin\omega}\right]^2}$$

mit dem konstanten negativen Krümmungsmaß

$$K = -\frac{\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2\cos\omega + \gamma_2^2}{\sin^2\omega}.$$

Da K ein negativer definiter Ausdruck ist, der nur dann Null wird, wenn γ_1, γ_2 gleichzeitig Null sind, so entstehen nur dann developpable Flächen, wenn beide Kurvensysteme aus geodätischen Linien gebildet werden. Zugleich zeigt sich aber, daß ein solches Kurvensystem die Fläche negativer konstanter Krümmung immer in infinitesimale Rhomben zerlegt.

Setzt man

$$\gamma_1 + \cos\omega\,\gamma_2 = a\sin\omega$$
$$\gamma_1\cos\omega + \gamma_2 = b\sin\omega$$

[1]) Vgl. P. Probst, a. a. O., p. 35.

und

$$a u + b v = u_1$$
$$\alpha u + \beta v = v_1,$$

so wird für

$$m = a \beta - b \alpha$$

$$m^2 (d u^2 + d v^2 + 2 \cos \omega \, d u \, d v) = e_1 \, d u_1^2 + 2 f_1 \, d u_1 \, d v_1 + g_1 \, d v_1^2,$$

wobei

$$e_1 = \beta^2 + \alpha^2 - 2 \cos \omega \, \alpha \beta$$
$$g_1 = b^2 + a^2 - 2 \cos \omega \, a b$$
$$f_1 = \cos \omega \, (\beta a + b \alpha) - (\beta b + a \alpha).$$

Wird nun angenommen, daß

$$\beta = \mu \, (a - b \cos \omega)$$
$$\alpha = \mu \, (a \cos \omega - b)$$

ist, so verschwindet der Faktor f_1; es folgt zugleich

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2 \alpha \beta \cos \omega = \mu^2 (a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega) \sin^2 \omega$$
$$m = \mu \, (a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega).$$

Demnach wird

$$m^2 \, d s^2 = (\mu^2 \sin^2 \omega \, d u_1^2 + d v_1^2) \frac{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}{u_1^2}.$$

Setzt man jetzt

$$\frac{1}{u_1} = e^{-u_2}, \qquad v_1 = v_2 \mu \sin \omega,$$

so wird

$$d s^2 = \frac{\sin^2 \omega \, (d u_2^2 + e^{-2 u_2} d v_2^2)}{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}.$$

Das Krümmungsmaß ist nunmehr

$$K = -\frac{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}{\sin^2 \omega}.$$

Damit ist das Längenelement auf die typische Form der Flächen konstanter negativer Krümmung gebracht, bei der die geodätischen Linien $d v_2 = 0$ sämtlich durch einen unendlich fernen Punkt der Fläche gehen.

Es ist aber

$$v_2 \sin\omega = \frac{v_1}{\mu} = u(a\cos\omega - b) + v(a - b\cos\omega).$$

Da endlich

$$a\cos\omega - b = -\sin\omega\,\gamma_2$$
$$a - \cos\omega\, b = \sin\omega\,\gamma_1,$$

so wird

$$v_2 = \gamma_1 v - \gamma_2 u.$$

Für den besonderen Fall $\gamma_1 = \pm\gamma_2$ wird daher die eine Schar der Diagonalkurven der Rhomben selbst aus geodätischen Linien gebildet.

Ist umgekehrt eine Fläche von der Krümmung -1 gegeben, also

$$ds^2 = du_2^2 + e^{-2u_2} dv_2^2$$

so setze man

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}{\sin^2\omega} = 1$$

und

$$v_2 = \frac{v_1}{\sin\omega}, \quad e^{-u_2} = \frac{1}{u_1}$$
$$u_1 = a u + b v$$
$$v_1 = \alpha u + \beta v,$$
$$\beta = a - b\cos\omega, \qquad \gamma_1 \sin\omega = \beta$$
$$\alpha = a\cos\omega - b, \qquad \gamma_2 \sin\omega = -\alpha.$$

Die Fläche von der Krümmung -1 ist alsdann auf ein rhombisch isogonales System mit den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1, γ_2 bezogen.

Ich beweise nun zunächst die Umkehrung des obigen Satzes:

Ist ein rhombisches System mit konstantem Koordinatenwinkel auf einer Fläche mit konstantem

Krümmungsmaß vorhanden, und besteht die eine Schar der Kurven aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung $\gamma_1 \neq 0$, so ist auch die andere Schar von konstanter geodätischer Krümmung γ_2 und das Krümmungsmaß der Fläche ist negativ.

Es sei demnach $e = g$ und $\cos\omega$ konstant, $f = e\cos\omega$, so ist nach § 1, 2

$$-\gamma_1 e \sin\omega = \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial u} - \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\cos\omega,$$

also wenn $e = \frac{1}{\eta^2}$ gesetzt wird

2) $$-\gamma_1 \sin\omega = \frac{\partial \eta}{\partial v}\cos\omega - \frac{\partial \eta}{\partial u}.$$

Eine partikuläre Lösung dieser Gleichung ist

3) $$\eta_0 = u\gamma_1 \sin\omega;$$

aus der Gleichung

$$0 = \cos\omega \frac{\partial(\eta - \eta_0)}{\partial v} - \frac{\partial(\eta - \eta_0)}{\partial u},$$

welche man durch Einführung von 3) in 2) erhält, folgt daher

$$\eta = \eta_0 + f(u\cos\omega + v),$$

wo f eine willkürliche Funktion des Argumentes $s = u\cos\omega + v$ ist. Demnach ist

4) $$\sqrt{e} = \frac{1}{u\gamma_1 \sin\omega + f} = \frac{1}{ua + f},$$

wenn man $a = \gamma_1 \sin\omega$ setzt.

Die geodätische Krümmung γ_2 der anderen Kurvenschar ist

$$-\gamma_2 e \sin\omega = \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial u}\cos\omega.$$

Vermöge der Gleichungen

$$\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} = -\frac{f'}{(ua + f)^2}, \quad \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial u} = -\frac{(a + f'\cos\omega)}{(ua + f)^2}$$

folgt:

$$\gamma_2 = f' \sin \omega - \gamma_1 \cos \omega.$$

Aus der Liouvilleschen Formel für das Krümmungsmaß K folgt aber, wenn man den Wert von γ_2 einsetzt,

$$K = -\gamma_1^2 - f'^2 + (ua + f) f'', \tag{5)}$$

wo die Größen f', f'' von dem Argumente z allein abhängen.

Differentiiert man nun die Gleichung 5) nach v, so folgt

$$-f'f'' + (ua + f')f''' = 0.$$

Jetzt müssen zwei Fälle unterschieden werden. Ist a, d. h. γ_1 von Null verschieden, so kann diese Gleichung nur dann bestehen, wenn f' eine Konstante ist,[1]) dann ist aber auch γ_2 eine Konstante. Ist nämlich f' nicht konstant, so ist auch f'' nicht Null, dann ist aber auch f''' von Null verschieden, da $ua + f$ nicht unendlich sein darf. Dann folgt aber

$$\left(-\frac{f'f''}{f'''} + f\right) + ua = 0.$$

Nun ist der eingeklammerte Teil entweder eine Konstante oder eine Funktion von z; beides aber führt auf einen Widerspruch. Damit ist der angegebene Satz bewiesen.

Ist dagegen $a = 0$ oder $\gamma_1 = 0$, so hat die Funktion f nur der Gleichung

$$K = -f'^2 + ff''$$

zu genügen.

Dieselbe gibt durch Differentiation nach z

$$-f'f'' + ff''' = 0.$$

Diese Gleichung ist wieder erfüllt für $f' = \text{const}$, dann ist auch $\gamma_2 = \text{const}$. Ist aber f' nicht konstant, so ist auch $f'' \neq 0$, und man hat

[1]) Natürlich kann auch $f' = 0$ sein, dann ist $\gamma_2 = -\gamma_1 \cos \omega$ und $K = -\gamma_1^2$.

$$\frac{f'''}{f''} = \frac{f'}{f},$$

und dies liefert

$$f'' = \pm c^2 f.$$

Wird das obere Vorzeichen gewählt, so wird

$$f = A e^{cz} + B e^{-cz}$$
$$K = 4 A B c^2,$$

man erhält daher Flächen von konstanter Krümmung; dieselbe kann hier positiv, negativ oder auch Null sein.

Wählt man dagegen das untere Vorzeichen, so ist

$$f = A \sin cz + B \cos cz$$
$$K = -c^2 (A^2 + B^2),$$

also K wesentlich negativ.

Eine Fläche konstanter Krümmung kann daher auch in infinitesimale Rhomben durch ein isogonales Kurvensystem zerlegt werden, deren eine Schar von geodätischen Linien gebildet ist, während die andere Schar nicht von konstanter geodätischer Krümmung ist.

Man kann übrigens aus jedem Systeme u, v, wie es in 1) zu Grunde gelegt ist, durch lineare Transformation der Variabeln u, v andere Systeme derselben Eigenschaft herleiten.

Nach Bonnet's Formel ist die geodätische Krümmung γ_φ, welche zu den Kurven $\varphi = \text{const}$ gehört, für den Fall $e = g$, $f = e \cos \omega$ ausgedrückt durch

$$-\gamma_\varphi e \sin \omega = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{e}(\varphi_u - \cos \omega \, \varphi_v)}{S} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{e}(\varphi_v - \cos \omega \, \varphi_u)}{S},$$

wobei

$$S = \sqrt{\varphi_v^2 - 2 \cos \omega \, \varphi_u \varphi_v + \varphi_u^2}$$

gesetzt ist. Setzt man nun

$$\varphi = \alpha u + \beta v = u_1$$
$$\psi = \gamma u + \delta v = v_1,$$

so werden die Kurven $u_1 = \text{const}$, $v_1 = \text{const}$ ein rhombisches System bilden, wenn

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega} = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta\cos\omega}$$

ist, und der Kosinus des Koordinatenwinkels ω_1 ist

$$\cos\omega_1 = -\frac{(\delta\beta + \alpha\gamma) + (\alpha\delta + \beta\gamma)\cos\omega}{\lambda^2}.$$

Es werden daher die geodätischen Krümmungen Γ_1 und Γ_2, welche zu den Kurven $u_1 = \text{const}$, $v_1 = \text{const}$ gehören, ausgedrückt durch

$$-\Gamma_1 e \sin\omega = \frac{\partial}{\partial u}\frac{(\alpha - \beta\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{(\beta - \alpha\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda}$$

$$-\Gamma_2 e \sin\omega = \frac{\partial}{\partial u}\frac{(\gamma - \delta\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{(\delta - \gamma\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$-\gamma_1 e \sin\omega = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\cos\omega$$

$$-\gamma_2 e \sin\omega = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u}\cos\omega$$

folgt hieraus

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma_1\alpha + \gamma_2\beta}{\lambda}, \quad \Gamma_2 = \frac{\gamma_1\gamma + \gamma_2\delta}{\lambda}.$$

Hierdurch sind auf der Fläche negativer konstanter Krümmung ∞^1 lineare, nur durch die Bedingungen

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega = \gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta\cos\omega$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

beschränkte Transformationen der Variabeln bestimmt, welche wieder isogonale Kurvensysteme von rhombischer Teilung mit den konstanten geodätischen Krümmungen Γ_1, Γ_2 bilden.

Für den Winkel ω_1 erhält man auch die Gleichung

$$\lambda^2 \sin^2\omega_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \sin^2\omega,$$

aus welcher

$$\lambda \sin \omega_1 = + \sin \omega (\alpha \delta - \beta \gamma)$$

folgt, falls diese Transformationen stetig aus der identischen

$$\begin{matrix} \alpha = 1 & \beta = 0 \\ \gamma = 0 & \delta = 1 \end{matrix}$$

hervorgehen sollen.

Auch erkennt man, daß die Invariante des Zählers von ds^2 in 1) bei dieser Transformation durch die Gleichung

$$\frac{\Gamma_1^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2 \cos \omega_1 + \Gamma_2^2}{\sin^2 \omega_1} + \frac{\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 \cos \omega + \gamma_2^2}{\sin^2 \omega}$$

ausgedrückt wird, welche die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaßes K aussagt.

Setzt man insbesondere

$$u' = u\alpha + v\beta$$
$$v' = -u\beta - v\alpha$$
$$\beta = \alpha \cos \omega,$$

so wird

$$\cos \omega_1 = \cos \omega, \quad \lambda = \alpha \sin \omega$$

und

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 \cos \omega}{\sin \omega}$$

$$\Gamma_2 = -\frac{(\gamma_1 \cos \omega + \gamma_2)}{\sin \omega},$$

so daß der Kosinus des Koordinatenwinkels ungeändert bleibt, während die geodätischen Krümmungen sich ändern.[1]) Diese Transformation entspricht daher keineswegs einer Bewegung der Fläche in sich.

Eine solche muß dagegen notwendig eintreten, wenn auch $\Gamma_1 = \gamma_1$, $\Gamma_2 = \gamma_2$ wird. In diesem Falle ergibt sich aus den beiden vorstehenden Gleichungen zwischen γ_1 und γ_2 die Relation

$$\gamma_1 (1 - \sin \omega) = -\gamma_2 \cos \omega.$$

---

[1]) Vgl. § 3.

Und in der Tat, setzt man

$$u_1 = u + v \cos \omega$$
$$v_1 = -v - u \cos \omega,$$

so wird

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv \cos \omega}{\left[\gamma_2 \frac{(1+\sin \omega)}{\cos \omega} u + \gamma_2 v\right]^2}$$

$$= \frac{du_1^2 + dv_1^2 + 2\,du_1\,dv_1 \cos \omega}{\left[\gamma_2 \frac{(1+\sin \omega)}{\cos \omega} u_1 + \gamma_2 v_1\right]^2},$$

sobald $\gamma_1 (1 - \sin \omega) = -\gamma_2 \cos \omega$ vorausgesetzt wird.

§ 10.

Allgemeine Bemerkungen über die geodätische Krümmung eines Kurvensystems.

Ich führe endlich einige Bemerkungen über geodätische Krümmungen an, welche eine nähere Ausführung zu verdienen scheinen.

Sind die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ und die Flächennormale so orientiert, wie die Achsen x, y, z eines Parallelkoordinatensystems, so ist das Integral

$$W = \int \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v}\right) du\, dv$$

bei positiver Umlaufung eines „Elementarflächenstückes" F, d. h. bei derjenigen, welche denselben Sinn hat, wie die positive Umlaufung eines den positiven Zuwachsen du, dv entsprechenden Elementarparallelogrammes der Koordinatenbestimmung, gleich

$$W = -\int (P\,dv - Q\,du).$$

Es sei nun nach Bonnet's Formel das Integral der geodätischen Krümmung γ_φ der Kurven $\varphi = \text{const}$, erstreckt über die Fläche F, es mag etwa als totale geodätische Krümmung der Kurven φ für dieses Gebiet bezeichnet werden —, gegeben durch

$$-\int \gamma_\varphi \, dF = \int\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g\varphi_u - f\varphi_v}{S}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e\varphi_v - f\varphi_u}{S}\right)\right] du\, dv,$$

wobei

$$S = \sqrt{g\varphi_u^2 - 2f\varphi_u\varphi_v + e\varphi_v^2}$$

gesetzt ist.

Man erhält also

$$1) \qquad -\int \gamma_\varphi \, dF = -\int \frac{(g\varphi_u - f\varphi_v)\,dv - (e\varphi_v - f\varphi_u)\,du}{S},$$

wo rechts das Integral über die Berandung von F in positivem Umlauf zu erstrecken ist. Ist nun F hinreichend klein, so werden die Kurven $\varphi = c$ nahezu in derselben Richtung verlaufen; wir verstehen dann unter der positiven Richtung von $\varphi = \text{const}$ diejenige, für die dv positiv ist. Dann ist für einen Punkt des Randes

$$\frac{\varphi_v}{\varphi_u} = -\frac{\partial u}{\partial v}$$

Enthält φ überhaupt die Variable u, so kann man immer voraussetzen, daß φ_u positiv ist. Unter dieser Voraussetzung ist aber der Integrand auf der rechten Seite von 1) mit Berücksichtigung des Vorzeichens, da nur positive Größen aus dem Wurzelzeichen S entfernt werden, gleich $ds \cos(\varphi, ds)$, so daß

$$2^a) \qquad -\int \gamma_\varphi \, dF = -\int \cos(\varphi, ds)\, ds \text{ [1]}$$

wird. Ist dagegen $\varphi_v \neq 0$, so erhält man, falls jetzt als positive Richtung der Kurven $\varphi = \text{const}$ diejenige angesehen wird, wo du positiv ist, ebenso

$$2^b) \qquad -\int \gamma_\varphi \, dF = +\int \cos(\varphi, ds)\, ds.$$

[1] Der Satz selbst ist keineswegs neu, vgl. z. B. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces III, p. 142; doch scheint daselbst keine völlig ausreichende Vorzeichenbestimmung gegeben zu sein.

Ich mache von den beiden Formeln eine Anwendung auf diejenigen Flächen, welche ein isogonales Kurvensystem $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ mit den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1, γ_2 enthalten.

Für das aus den Kurven $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ gebildete Viereck $ABCD$ mit dem Inhalte J, welches in positivem Sinne durchlaufen wird, ergibt sich für $\varphi = u$ nach 2^a^)

$$-\gamma_1 J = -(AB - CD) + (BC - AD)\cos\omega.$$

Dagegen nach 2^b^) für $\varphi = v$

$$-\gamma_2 J = (AB - CD)\cos\omega + (BC - AD).$$

Endlich hat man nach Liouville's Formel für das Krümmungsmaß

$$+\int K\,dJ = \gamma_1 \int \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\,du\,dv + \gamma_2 \int \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\,du\,dv$$
$$= \gamma_1 (CD - AB) + \gamma_2 (BC - AD).$$

Hieraus folgt nun

$$J(\gamma_1 + \gamma_2 \cos\omega) = (AB - CD)\sin^2\omega$$
$$J(\gamma_1 \cos\omega + \gamma_2) = (BC - AD)\sin^2\omega,$$

also

$$\frac{1}{J}\int K\,dJ = -\frac{(\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2\cos\omega + \gamma_2^2)}{\sin^2\omega}.$$

Aus dieser Formel aber kann man unmittelbar auf die Konstanz von K schließen, wenn man J gegen Null konvergieren läßt.

Ist andererseits ein Gebiet F eingeschlossen von zwei orthogonalen Trajektorien einer Reihe von Kurven $\varphi = \text{const}$, so daß ein Viereck $ABCD$ entsteht, in dem $ABCD$ zwei gegenüberliegende Trajektorien, BC und AD zwei Kurven $\varphi = \text{const}$ sind, so ist die totale geodätische Krümmung der Kurven $\varphi = \text{const}$ für F

$$-\int \gamma_\varphi\, dF = BC - AD.$$

Insbesondere ist für $\gamma_\varphi = \text{const} = \gamma$

$$-\gamma J = BC - AD$$

also die Differenz der Bogenlängen der Kurven φ, welche das Gebiet begrenzen, dem Inhalte J desselben proportional. In dem besonderen Falle, wo $\gamma = 0$, ergibt sich der bekannte Satz von der Äquidistanz der orthogonalen Trajektorien einer Serie geodätischer Linien.

Diese Betrachtungen können auch in etwas erweitertem Sinne benutzt werden. Ein Beispiel dafür bildet das Stück einer Zone einer Rotationsfläche, die von irgend zwei Parallelkreisen und zwei durch Rotation ineinander übergehenden Kurven begrenzt wird. Hier haben die Parallelkreise, falls das Längenelement der Fläche gegeben ist durch

$$ds^2 = (1 + f'^2)\,du^2 + u^2\,dv^2,$$

die geodätische Krümmung

$$-\gamma_1 = \frac{1}{u\sqrt{1 + f'^2}};$$

die totale geodätische Krümmung ist daher gleich

$$2\pi(u_1 - u_0),$$

d. h. gleich der Differenz der beiden Parallelkreisbögen, welche das Zonenstück begrenzen.

Eine Serie von Kurven, deren geodätische Krümmung überall von ein und demselben Zeichen ist, kann niemals von einer oder mehreren geschlossenen orthogonalen Trajektorien völlig begrenzt werden, vorausgesetzt, daß eine Zerlegung des Gebietes in Elementarflächen möglich ist, für welche die Formeln 2^a) resp. 2^b) immer in derselben Weise anwendbar bleiben. Für geodätische Linien ist dies dagegen sehr wohl möglich, wie z. B. ringförmige, aus den Umfängen Gaußscher Kreise gebildete Teile der Fläche zeigen.

Umgekehrt ist es nicht möglich, auf einer Fläche etwa ein ringförmiges Gebiet abzugrenzen, das von geodätischen Linien begrenzt ist, derartig, daß auch der Innenraum stetig von solchen geschlossenen Linien erfüllt ist — den einzigen Fall ausgenommen, wo die Umfänge der beiden Begrenzungslinien, wie z. B. bei einer Zylinderfläche, gleich groß sind. Dagegen ist dies, wie das Beispiel der Parallelkreise einer Rotationsfläche zeigt, für Kurven, deren geodätische Krümmung von einerlei Vorzeichen ist, sehr wohl möglich.