Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVII. Jahrgang 1907.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1908.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen.

Von **Georg Landsberg** in Kiel.

(Eingelaufen 12. Januar.)

Cayley hat sich in seinen letzten Lebensjahren mit dem arithmetischen Charakter der in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen auftretenden Produktentwicklungen beschäftigt und sich bemüht das Verhalten der durch sie dargestellten Funktionen bei linearer Transformation der unabhängigen Variabelen durch Umformung in Doppelprodukte zu gewinnen.[1]) Bei dieser Untersuchung ist er indes auf Schwierigkeiten gestossen, die er nicht überwunden hat und die, kurz gesagt, darin bestehen, daß die erhaltenen Doppelsummen, resp. Doppelprodukte bedingt konvergent sind und darum eine Vertauschung der Summationsordnung nicht gestatten. Diesen Schwierigkeiten ist Herr Weber[2]) durch Heranziehung der Kroneckerschen Grenzformel[3]) gerecht geworden, aus welcher sich die gewünschten Resultate, allerdings nur unter einschränkenden Annahmen für den Bereich der Variabelen, durch geeignete Grenzübergänge gewinnen lassen. Aber in dem Briefwechsel der beiden Gelehrten tritt mehrfach der Gedanke hervor, daß es einen direkten Weg geben müsse, um die Wertänderung der betrachteten

---

[1]) Sur la fonction modulaire $\chi(\omega)$. Comptes Rendus 12. Jun. 1893. Vier Briefe über elliptische Modulfunktionen. Math. Ann., Bd. 47, S. 1—5.

[2]) Bemerkungen zu den vorstehenden Briefen. Math. Ann., Bd. 47, S. 6—19.

[3]) Kronecker, Berliner Sitzungsberichte 1863, 83, 86, 89. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, § 113.

analytischen Gebilde als Folge der Summationsänderung erkennen zu lassen. Im folgenden glaube ich eine Methode angeben zu können, welche jener Forderung genügt. Es ergibt sich, daß die beiden verschiedenen Doppelsummen, die zu verschiedenen Anordnungen der Summenbildung gehören, direkt miteinander vergleichbar sind und daß ihre Differenz ein bestimmtes Integral ist, welches in jedem einzelnen Falle leicht ausgewertet werden kann. Der Kürze der Darstellung halber führe ich die Methode nur an dem Beispiele der Diskriminante $\eta(\omega)$ durch; sie bleibt aber auch für die übrigen in jenem Briefwechsel betrachteten Modulfunktionen anwendbar, und sie bedarf nur unwesentlicher Modifikationen, wenn andere als die hier untersuchten Änderungen der Summationsordnung in ihren Wirkungen diskutiert werden sollen.

I.

In der Theorie der elliptischen Modulfunktionen werden aus den beiden unabhängigen Variabelen ω_1, ω_2 die Summen:

$$S_n = \sum \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{2n}} \tag{1}$$

gebildet, welche über alle ganzzahlige Wertepaare (m_1, m_2) mit Ausschluß des Paares $m_1 = m_2 = 0$ erstreckt sind; dieselben konvergieren aber nur dann absolut und unbedingt, wenn $n > 1$ ist. Für $n = 1$ hingegen ist der Wert der Summe von der Anordnung der Glieder abhängig; je nachdem man erst über m_1 und dann über m_2 oder in umgekehrter Reihenfolge summiert, erhält man die beiden Summen:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1}{\omega_1} &= \sum_{m_2}\sum_{m_1} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} \quad \text{und} \\ \frac{\eta_2}{\omega_2} &= \sum_{m_1}\sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei η_1 und η_2 die beiden Perioden des Integrales zweiter Gattung, aufgefaßt als Funktionen der entsprechenden Perioden ω_1 und ω_2 des Integrales der ersten Gattung, bedeuten. Die beiden Summen auf der rechten Seite der obigen Gleichungen sind aber niemals einander gleich; denn es besteht die „Legendresche Relation“:

(3) $$\omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1 = \pm 2 \pi i,$$

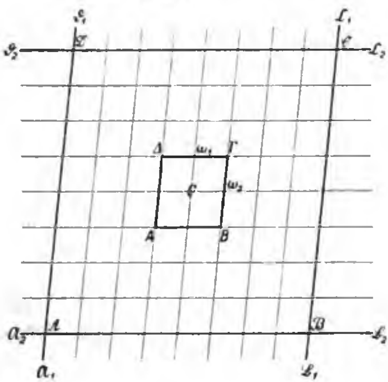
in welcher das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem das Periodenverhältnis:

(4) $$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

eine positive oder eine negative imaginäre Koordinate hat. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, diese Relation direkt aus der obigen Definition der Größen η_1 und η_2 durch Vergleichung der beiden verschiedenen Anordnungen der Summe S_1 abzuleiten.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die beiden Größen $\frac{\eta_1}{\omega_1}$ und $\frac{\eta_2}{\omega_2}$ als Grenzwerte der beiden mit endlichem λ gebildeten Summen:

(5) $$T_\lambda = \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2} \quad \text{und}$$
$$U_\lambda = \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\infty}^{m_2=+\infty} \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2}.$$



von denen die erste über sämtliche Gitterpunkte des zu den Perioden ω_1 und ω_2 gehörigen parallelogrammatischen Netzes erstreckt ist, die im Inneren oder auf dem Rande des von den beiden Parallelen $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_1$ begrenzten Streifens gelegen sind, während die zweite in derselben Beziehung zu dem Parallelstreifen $\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{D}_2$ steht. Beide Summen vergleichen wir zunächst mit einer dritten, endlichen Summe:

$$P_\lambda = \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda}\sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda}\frac{1}{(m_1\,\omega_1+m_2\,\omega_2)^2}, \tag{6}$$

deren zugehörige Gitterpunkte im Inneren oder auf dem Rande des Parallelogrammes $A\,B\,C\,D$ gelegen ist, das den beiden Parallelstreifen gemein ist. Demzufolge finden wir für die Differenz:

$$\begin{aligned} T_\lambda - P_\lambda = {} & \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda}\sum_{m_1=\lambda+1}^{m_1=+\infty}\frac{1}{(m_1\,\omega_1+m_2\,\omega_2)^2} \\ & + \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda}\sum_{m_1=-\lambda-1}^{m_1=-\infty}\frac{1}{(m_1\,\omega_1+m_2\,\omega_2)^2}, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei sich von den beiden Teilsummen auf der rechten Seite der Gleichung die erste auf den Streifen $\mathfrak{D}_1\,D\,C\,\mathfrak{C}_1$, die zweite auf den Streifen $\mathfrak{A}_1\,A\,B\,\mathfrak{B}_1$ bezieht. In derselben Weise ergibt sich für die Differenz:

$$\begin{aligned} U_\lambda - P_\lambda = {} & \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda}\sum_{m_2=\lambda+1}^{m_2=+\infty}\frac{1}{(m_1\,\omega_1+m_2\,\omega_2)^2} \\ & + \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda}\sum_{m_2=-\lambda-1}^{m_2=-\infty}\frac{1}{(m_1\,\omega_1+m_2\,\omega_2)^2}, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei die erste Teilsumme zu dem Streifen $\mathfrak{B}_2\,B\,C\,\mathfrak{C}_2$, die zweite zu dem Streifen $\mathfrak{A}_2\,A\,D\,\mathfrak{D}_2$ gehört.

Gehen wir nun zur Grenze für $\lambda = \infty$ über, so ist:

$$\lim T_\lambda = \frac{\eta_1}{\omega_1}, \quad \lim U_\lambda = \frac{\eta_2}{\omega_2}$$

und der Grenzwert von P_λ ist im Bereiche der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe eine eindeutige Funktion von ω_1, ω_2, welche mit:

$$P(\omega_1, \omega_2) = \lim_{\lambda = \infty} P_\lambda$$

bezeichnet sein möge. Von den vier Summen der Gleichungen (7) und (8) ist aber die erste:

$$\sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=\lambda+1}^{m_1=+\infty} \frac{\frac{1}{\lambda^2}}{\left(\frac{m_1}{\lambda}\omega_1 + \frac{m_2}{\lambda}\omega_2\right)^2}$$

für $\lambda = \infty$ nichts anderes als das Integral:

$$\int_{x_2=-1}^{+1} \int_{x_1=1}^{\infty} \frac{dx_2\, dx_1}{(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx_2}{\omega_1(\omega_1 + x_2\omega_2)} = \frac{1}{\omega_1\omega_2} \int_{\varDelta\Gamma} \frac{dz}{z},$$

wobei das letzte Linienintegral in geradliniger Richtung von dem Punkte $\omega_1 - \omega_2$ oder $\varDelta$ nach $\omega_1 + \omega_2$ oder Γ zu führen ist. Ebenso ergibt sich für die übrigen drei Integrale:

$$\lim_{\lambda=\infty} \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=-\lambda-1}^{m_1=-\infty} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} = \int_{-1}^{+1} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx_2\, dx_1}{(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)^2}$$
$$= \frac{1}{\omega_1\omega_2} \int_{BA} \frac{dz}{z}$$

$$\lim_{\lambda=\infty} \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=\lambda+1}^{m_2=+\infty} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} = \int_{-1}^{+1} \int_{1}^{\infty} \frac{dx_1\, dx_2}{(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)^2}$$
$$= \frac{1}{\omega_1\omega_2} \int_{B\Gamma} \frac{dz}{z}$$

$$\lim_{\lambda=\infty} \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\lambda-1}^{m_2=-\infty} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} = \int_{-1}^{+1} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx_1\, dx_2}{(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)^2}$$
$$= \frac{1}{\omega_1\omega_2} \int_{\varDelta A} \frac{dz}{z}.$$

Man erhält hiernach durch den Grenzübergang die beiden Gleichungen:

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} - P(\omega_1, \omega_2) = -\int_A^B \frac{dz}{\omega_1\omega_2 z} - \int_\Gamma^\varDelta \frac{dz}{\omega_1\omega_2 z} = \frac{2}{\omega_1\omega_2} \log \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2}$$

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} - P(\omega_1, \omega_2) = \int_B^\Gamma \frac{dz}{\omega_1\omega_2 z} + \int_\varDelta^A \frac{dz}{\omega_1\omega_2 z} = \frac{2}{\omega_1\omega_2} \log \frac{\omega_1 + \omega_2}{-\omega_1 + \omega_2},$$

wobei die Logarithmen als Hauptwerte zu nehmen sind und somit eindeutige Funktionen des Periodenverhältnisses $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ werden. Subtrahiert man schließlich die erste der obigen Gleichungen von der zweiten, so vereinigen sich die vier Integrale zu dem um das Parallelogramm $A B \Gamma \Delta$ erstreckten Integral $\frac{1}{\omega_1 \omega_2}\int \frac{dz}{z}$ und man erhält die zu beweisende Relation:

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} - \frac{\eta_1}{\omega_1} = \pm \frac{2 \pi i}{\omega_1 \omega_2},$$

in welcher das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die Umkreisung des Nullpunktes im positiven oder im negativen Sinne erfolgt, d. h. je nachdem das Periodenverhältnis ω eine positive oder negative imaginäre Koordinate besitzt.

Mit Hilfe der Legendreschen Relation folgt nunmehr leicht das Verhalten der Funktionen η_1 und η_2 bei beliebiger linearer Transformation der Perioden ω_1 und ω_2; da sich jede solche Transformation:

$$\omega_1' = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2, \quad \omega_2' = \gamma \omega_1 + \delta \omega_2 \quad (\alpha \delta - \beta \gamma = 1)$$

aus elementaren zusammensetzen läßt, für die sich die Veränderung von η_1 und η_2 unmittelbar übersehen läßt, so ergibt sich:

$$(9) \quad \eta_1' = \eta_1(\omega_1', \omega_2') = \alpha \eta_1 + \beta \eta_2, \quad \eta_2' = \eta_2(\omega_1', \omega_2') = \gamma \eta_1 + \delta \eta_2.$$

II.

Wir betrachten jetzt die von zwei Periodenverhältnissen $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ und $\frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ abhängige Summe:

$$(10) \quad \varphi\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) = \Sigma \frac{\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)(m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2)},$$

welche ebenfalls über alle ganzzahligen Wertepaare (m_1, m_2) mit Ausschluß von $m_1 = m_2 = 0$ erstreckt und deren Wert ebenfalls von der Anordnung der Glieder abhängig ist. Diese

Reihe konvergiert bei jeder Gliederanordnung, bei welcher die Reihe S_1 in (1) konvergiert und die Funktion des Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, die sie bei einer bestimmten Reihenfolge der Summation darstellt, steht in innigem Zusammenhange mit den Funktionen η_1 und η_2. Denn differenziiert man gliedweise nach ω_1 und ω_2, so erhält man, falls man in (10) erst über m_2 und dann über m_1 summiert und ω auf die positive Halbebene beschränkt:

$$(11)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_1} &= \sum_{m_1}\sum_{m_2} \frac{\omega_2}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} = \eta_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_2} &= -\sum_{m_1}\sum_{m_2} \frac{\omega_1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}\eta_2 = -\eta_1 - \frac{2\pi i}{\omega_2} \end{aligned}$$

und hieraus folgt zunächst die Konvergenz der Reihe, weil die gliedweise Integration einer gleichmäßig konvergenten Reihe gestattet ist. Weiter aber ergibt sich aus den Gleichungen (11):

$$(12)\qquad d\varphi = \eta_2\, d\omega_1 - \eta_1\, d\omega_2 - 2\pi i\, d\log\omega_2 .$$

Es bleibt also das Differential der Funktion:

$$\varphi + 2\pi i \log\omega_2$$

bei linearer Transformation der Perioden ungeändert, denn es ist infolge der Formeln (9):

$$\eta_2'\, d\omega_1' - \eta_1'\, d\omega_2' = \eta_2\, d\omega_1 - \eta_1\, d\omega_2 .$$

Bilden wir daher die Funktion:

$$(13)\quad \varphi + 2\pi i\log\frac{\omega_2}{\Omega_2} = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{\omega_1\Omega_2 - \omega_2\Omega_1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)(m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2)} + 2\pi i\log\frac{\omega_2}{\Omega_2},$$

so ändert sich diese bei jeder linearen Transformation entweder der Perioden ω_1, ω_2 oder der Perioden Ω_1, Ω_2 nur um eine additive Konstante, und wenn man beide Periodenpaare derselben linearen Transformation unterwirft, so ist die Konstante gleich Null, weil die Funktion verschwindet, falls die beiden

Periodenpaare koinzidieren. Die Funktion ist also in Beziehung auf beide eine Modulform erster Stufe bei kongruenter Veränderung der Argumente.

Man kann die Funktion in mannigfacher Weise als Differenz zweier anderer darstellen, welche nur von je einem der beiden Periodenpaare abhängen und im wesentlichen nichts anderes als die in der Theorie der Modulfunktionen auftretende Diskriminante $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ (in der Bezeichnung von Herrn Klein) oder $\eta(\omega)$ (in der Bezeichnung von Herrn Weber) sind.

Sind nämlich n_1 und n_2 zwei ganze oder gebrochene Zahlen, welche zu jedem Zahlenpaare (m_1, m_2) so hinzubestimmt werden, daß:

$$n_1 m_2 - n_2 m_1 = 1$$

ist, so ist:

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{m_1}\sum_{m_2} \frac{\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)(m_1 \Omega_1 - m_2 \Omega_2)} \\ &= \sum_{m_1}\sum_{m_2} \left(\frac{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2}{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2} - \frac{n_1 \Omega_1 + n_2 \Omega_2}{m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2} \right),\end{aligned}$$

wobei in jedem Gliede der Summe der Minuend bloß von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, der Subtrahend bloß von $\Omega = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ abhängt. Setzt man also:

$$q = e^{\pi i \omega}, \quad Q = e^{\pi i \Omega},$$

so ergibt die Ausführung der Summation über m_2:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\pi^2}{3}(\omega - \Omega) + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\operatorname{ctg} \pi m \Omega - \operatorname{ctg} \pi m \omega) \\ &= \frac{\pi^2}{3}(\omega - \Omega) + 4\pi i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{1 - q^{2m}} - \frac{1}{1 - Q^{2m}} \right) \qquad (14) \\ &= \frac{\pi^2}{3}(\omega - \Omega) - 4\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1 - q^{2n}}{1 - Q^{2n}}.\end{aligned}$$

Setzt man also mit Herrn Weber:

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}),$$

so ist:

$$\varphi = 4\pi i \log \frac{\eta(\Omega)}{\eta(\omega)}. \qquad (15)$$

In der Bezeichnung von Herrn Klein wird:

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \eta(\omega)^{24}$$

gesetzt; es ist alsdann:

$$\varphi + 2\pi i \log \frac{\omega_2}{\Omega_2} = \frac{\pi i}{6} \log \frac{\Delta(\Omega_1, \Omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}. \tag{16}$$

Im Gegensatz zu diesen hergebrachten Darstellungen der Diskriminante $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ läßt die Doppelsumme (10), von der wir hier ausgegangen sind, die Grenzstellen der Funktion in Evidenz treten und ergibt das Verhalten der Funktion bei linearer Transformation als Konsequenz einer Änderung der Summationsordnung. Die Einführung zweier Argumentenpaare ω_1, ω_2 und Ω_1, Ω_2 statt eines einzigen erweist sich hierbei als zweckmäßig zu übersichtlicher Behandlung der betrachteten analytischen Gebilde; man kann nachträglich natürlich zu Funktionen nur eines Argumentenpaares übergehen, indem man z. B. $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = i\infty$, also $Q = 0$ setzt.

III.

Das Verhalten der Funktionen $\eta(\omega)$, resp. $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ bei linearer Transformation wurde im vorigen Abschnitte aus dem Verhalten der Funktionen η_1 und η_2 durch Integration erschlossen. Man kann aber das gleiche Verfahren, welches im ersten Abschnitte auf die Untersuchung der Wertänderung der Summe S_1 bei Vertauschung der Summationsordnung angewendet wurde, auch in ganz analoger Weise auf die Summe $\varphi(\omega, \Omega)$ des vorigen Abschnittes übertragen und auf diesem zweiten Wege die letzten Resultate in direkter Weise erlangen.

Zu diesem Zwecke vergleichen wir die Summen:

$$\varphi\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)(m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2)} \tag{17}$$

und:

$$\varphi\left(-\frac{\omega_2}{\omega_1}, -\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) = \sum_{m_2} \sum_{m_1} \frac{\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)(m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2)}$$

miteinander, die durch Vertauschung der Summationsordnung auseinander hervorgehen. Bezeichnen wir das allgemeine Glied mit σ_m, so erscheinen die ursprüngliche und die transformierte Funktion als Grenzwerte der Summen:

$$T_\lambda = \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\infty}^{m_2=+\infty} \sigma_m$$

und:

$$\Theta_\lambda = \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \sigma_m$$

für $\lambda = \infty$. Wir setzen alsdann beide miteinander in Beziehung, indem wir sie mit einer dritten Summe:

$$\Pi_\lambda = \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sigma_m$$

vergleichen. Ganz analog wie im ersten Abschnitte ergibt sich alsdann:

$$T_\lambda - \Pi_\lambda = \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=\lambda+1}^{m_2=\infty} \sigma_m + \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\lambda-1}^{m_2=-\infty} \sigma_m$$

$$\Theta_\lambda - \Pi_\lambda = \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=\lambda+1}^{m_1=\infty} \sigma_m + \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=-\lambda-1}^{m_1=-\infty} \sigma_m .$$

Gehen wir nun zur Grenze für $\lambda = \infty$ über, so konvergiert die erste der vier zuletzt auftretenden Teilsummen gegen das Doppelintegral:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{1}^{\infty} \frac{(\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1)\, dx_1\, dx_2}{(x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2)(x_1 \Omega_1 + x_2 \Omega_2)},$$

welches sich durch Ausführung der Integration über x_2 als das einfache Integral:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx_1}{x_1} \left(\log \frac{x_1 \omega_1 + \omega_2}{\omega_2} - \log \frac{x_1 \Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_2} \right)$$

darstellen läßt; hierbei sind die Logarithmen in der auftretenden Klammergröße so zu wählen, daß ihre Differenz verschwindet, falls das Periodenverhältnis $\omega = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ mit $\Omega = \dfrac{\Omega_1}{\Omega_2}$

zusammenfällt. Führt man die gleiche Rechnung für die übrigen Doppelintegrale aus, so ergibt sich schließlich:

$$
(18) \qquad \sum_{m_1}\sum_{m_2} \frac{\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)(m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2)}
- \sum_{m_2}\sum_{m_1} \frac{\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)(m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2)} = J(\omega) - J(\Omega),
$$

worin $J(\omega)$ die Summe der vier Integrale:

$$
J(\omega) = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} \log(1 + x\omega) - \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} \log(1 - x\omega)
- \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} \log\left(1 - \frac{x}{\omega}\right) + \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} \log\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)
$$

und $J(\Omega)$ dieselbe Funktion von Ω bedeutet; die Logarithmen können und sollen hierbei so bestimmt sein, daß sie für $x = 0$ verschwinden.

Die noch übrigbleibende Aufgabe der Ermittelung der Funktion $J(\omega)$ erledigt sich am einfachsten durch Differentiation nach ω. Man findet so:

$$
J'(\omega) = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1 + x\omega} + \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1 - x\omega} - \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\omega(\omega - x)} - \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\omega(\omega + x)}.
$$

Das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Aggregat ist aber nichts weiter als die Summe der vier auf geradlinigem Wege erstreckten Integrale:

$$
\frac{1}{\omega} \int_{-\omega+1}^{\omega+1} \frac{dz}{z} + \frac{1}{\omega} \int_{\omega-1}^{-\omega-1} \frac{dz}{z} + \frac{1}{\omega} \int_{\omega+1}^{\omega-1} \frac{dz}{z} + \frac{1}{\omega} \int_{-\omega-1}^{-\omega+1} \frac{dz}{z},
$$

also wie ein Blick auf die obige Figur zeigt, das um das Parallelogramm $ABΓΔ$ in positivem Sinne herumgeleitete Integral:

$$
\frac{1}{\omega} \int \frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{\omega}.
$$

Folglich ist:

$$
J(\omega) = 2\pi i \log \omega + \text{const},
$$

wobei die Integrationskonstante zwar für unsere Zwecke belanglos, aber durch die Annahme $\omega = 1$ leicht bestimmbar, nämlich gleich π^2 ist.

Es ergibt sich also die Relation:

$$\varphi\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) - \varphi\left(-\frac{\omega_2}{\omega_1}, -\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) = 2\pi i \log\frac{\omega_1 \Omega_2}{\omega_2 \Omega_1}, \tag{19}$$

und diese Gleichung steht in genauer Übereinstimmung mit der Gleichung (13) des vorigen Abschnittes, welche aussagte, daß die Funktion:

$$\varphi\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) + 2\pi i \log\frac{\omega_2}{\Omega_2}$$

bei kongruenter linearer Transformation der beiden Periodenpaare ungeändert bleibt.