Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXV. Jahrgang 1905.

München

Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften

1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Note über die Konvergenz von Kettenbrüchen mit positiven Gliedern.

Von **Oskar Perron.**

(Eingelaufen 1. Juli.)

Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}}$$

die Zahlen a_ν, b_ν sämtlich reell und positiv sind, so gilt das fundamentale von Seidel und Stern auf verschiedenen Wegen bewiesene Konvergenzkriterium:

Der Kettenbruch divergiert dann und nur dann, wenn die beiden Reihen

$$\sum_\nu \frac{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2\nu}}{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2\nu-1}} \cdot \frac{b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}} \quad \text{und} \quad \sum_\nu \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2\nu-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2\nu}} \cdot b_{2\nu}$$

konvergieren.[1])

Aus diesem allgemeinen Theorem lassen sich leicht mannigfache weitere Sätze herleiten, die wenigstens eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches liefern.[2]) Alle diese Untersuchungen gehören aber eigentlich der Reihenlehre an. Im folgenden will ich nun durch höchst einfache Betrachtungen unabhängig von der Reihenlehre eine unendliche

---

[1]) Vgl. Enzykl. d. math. Wissensch. Bd. I, pag. 127, 128.

[2]) Pringsheim, Münchner Berichte 1899.

Folge von sukzessive schärferen Konvergenzkriterien aufstellen, deren Herleitung aus dem obigen Satz auch nur schwer gelingen dürfte. Diese versagen zwar in vielen Fällen, wo die von Pringsheim l. c. gegebenen Kriterien die Konvergenz erkennen lassen, sie geben aber auch umgekehrt vielfach eine Entscheidung, wenn die Pringsheimschen Sätze im Stich lassen. Größeres Interesse dürfte das eingeschlagene Verfahren jedoch aus dem Grund beanspruchen, weil sich mittels desselben, wie ich demnächst zeigen werde, mutatis mutandis auch die Konvergenz der allgemeineren Jacobischen Kettenbruchalgorithmen streng beweisen läßt, was bislang nicht gelungen.

§ 1.

Bezeichnet man den ν^{ten} Näherungsbruch mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, so bestehen die Formeln

$$(1) \quad \begin{aligned} A_1 &= a_1, \; A_2 = a_1 b_2, \qquad & A_\nu &= a_\nu A_{\nu-2} + b_\nu A_{\nu-1}, \\ B_1 &= b_1, \; B_2 = b_1 b_2 + a_2, \qquad & B_\nu &= a_\nu B_{\nu-2} + b_\nu B_{\nu-1}; \end{aligned}$$

$$(2) \quad A_\nu B_{\nu-1} - B_\nu A_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \ldots . a_\nu,$$

aus denen man in bekannter Weise schließt, daß die beiden Grenzwerte

$$(3) \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} = K, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = k$$

existieren, und die Ungleichungen gelten

$$(4) \quad \frac{A_1}{B_1} > \frac{A_3}{B_3} > \cdots > K \geq k > \cdots > \frac{A_4}{B_4} > \frac{A_2}{B_2}.$$

Konvergenz oder Divergenz findet dann statt, je nachdem $K = k$ oder $K > k$ ist.

Aus den Rekursionsformeln (1) folgt nun ohne weiteres, wenn zur Abkürzung

$$\frac{b_\nu B_{\nu-1}}{B_\nu} = \lambda_\nu, \text{ also } \frac{a_\nu B_{\nu-2}}{B_\nu} = 1 - \lambda_\nu$$

gesetzt wird (λ_ν und $1 - \lambda_\nu$ sind notwendig positiv):

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = (1 - \lambda_\nu) \frac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}} + \lambda_\nu \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}},$$

oder indem man gerade und ungerade Werte von ν gesondert betrachtet

$$(5^a) \qquad \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = (1 - \lambda_{2\nu}) \frac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}} + \lambda_{2\nu} \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$$

$$(5^b) \qquad \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} = (1 - \lambda_{2\nu+1}) \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} + \lambda_{2\nu+1} \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}.$$

Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl, so kann nach (3) und (4) ν so groß gewählt werden, daß $\frac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}} > k - \varepsilon$ wird, außerdem ist auch $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} > K$, $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} < k$. Hienach folgt aus (5ᵃ)

$$k > (1 - \lambda_{2\nu})(k - \varepsilon) + \lambda_{2\nu} K,$$

und durch eine analoge Überlegung aus (5ᵇ)

$$K < (1 - \lambda_{2\nu+1})(K + \varepsilon) + \lambda_{2\nu+1} k.$$

Sowohl für gerade wie für ungerade ν ergibt sich hieraus übereinstimmend

$$\lambda_\nu (K - k) < \varepsilon (1 - \lambda_\nu),$$

also

$$\lim_{\nu=\infty} (K - k) \frac{\lambda_\nu}{1 - \lambda_\nu} = 0.$$

Wenn demnach der Kettenbruch divergiert, also $K - k$ von 0 verschieden ist, so muß $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{\lambda_\nu}{1 - \lambda_\nu} = 0$ sein, und wir erhalten somit das Kriterium:

Der Kettenbruch konvergiert sicher, wenn

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{b_\nu B_{\nu-1}}{a_\nu B_{\nu-2}} > 0.$$

Da nach (1) $\frac{B_{\nu-1}}{B_{\nu-2}} > b_{\nu-1}$ sein muß, so folgt die Konvergenz erst recht, falls

$$\varlimsup_{\nu=\infty} \frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu} > 0.$$

§ 2.

Bekanntlich ist es für die Konvergenz des Kettenbruches schon hinreichend, wenn die Reihe $\sum \frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu}$ divergiert; nach Pringsheim l. c. genügt sogar die Divergenz von $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu}}$. Der eben entwickelte Satz ist hieraus ohne weiteres zu entnehmen und von geringerer Tragweite; er ist aber auch nur das Anfangsglied der unendlichen Folge, die wir entwickeln wollen. Um die weiteren zu erhalten, dehnen wir das Verfahren in folgender Weise aus:

Vermehrt man in A_ν, B_ν die Indizes sämtlicher a, b um eine Zahl $\varkappa$, so soll der entstehende Ausdruck mit $A_{\nu,\varkappa}$ bezw. $B_{\nu,\varkappa}$ bezeichnet werden, so daß $\frac{A_{\nu,\varkappa}}{B_{\nu,\varkappa}}$ der ν^{te} Näherungsbruch des Kettenbruches

$$\cfrac{a_{\varkappa+1}}{b_{\varkappa+1} + \cfrac{a_{\varkappa+2}}{b_{\varkappa+2} + \cdots}}$$

ist. Man findet dann leicht, etwa durch vollständige Induktion in Bezug auf $\varkappa$, die Relationen

$$(6)\qquad \begin{aligned} A_{\nu+\varkappa} &= A_{\varkappa-1,\nu+1}\, A_\nu + B_{\varkappa-1,\nu+1}\, A_{\nu+1} \\ B_{\nu+\varkappa} &= A_{\varkappa-1,\nu+1}\, B_\nu + B_{\varkappa-1,\nu+1}\, B_{\nu+1}, \end{aligned}$$

und wenn man analog zu (3) die Grenzwerte

$$(7)\qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu+1,\varkappa}}{B_{2\nu+1,\varkappa}}\; K_\varkappa,\quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu,\varkappa}}{B_{2\nu,\varkappa}} = k_\varkappa$$

einführt, so ist auch

$$(8)\qquad \frac{A_{1,\varkappa}}{B_{1,\varkappa}} > \frac{A_{3,\varkappa}}{B_{3,\varkappa}} > \cdots > K_\varkappa \geqq k_\varkappa > \cdots > \frac{A_{4,\varkappa}}{B_{4,\varkappa}} > \frac{A_{2,\varkappa}}{B_{2,\varkappa}}.$$

Aus den Gleichungen (6) folgt, wenn abkürzungsweise

$$\frac{B_{\varkappa-1,\,\nu+1}\,B_{\nu+1}}{B_{\nu+\varkappa}} = \lambda_{\nu,\,\varkappa}, \text{ also } \frac{A_{\varkappa-1,\,\nu+1}\,B_\nu}{B_{\nu+\varkappa}} = 1 - \lambda_{\nu,\,\varkappa}$$

gesetzt wird,

$$(9)\qquad \frac{A_{\nu+\varkappa}}{B_{\nu+\varkappa}} = (1-\lambda_{\nu,\,\varkappa})\frac{A_\nu}{B_\nu} + \lambda_{\nu,\,\varkappa}\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}}.$$

Zunächst sei $\varkappa$ eine gerade Zahl; indem man demgemäß $2\varkappa$ an Stelle von $\varkappa$ schreibt, folgt aus (9)

$$(9^{\mathrm{a}})\qquad \frac{A_{2\nu+2\varkappa}}{B_{2\nu+2\varkappa}} = (1-\lambda_{2\nu,\,2\varkappa})\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} + \lambda_{2\nu,\,2\varkappa}\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}},$$

$$(9^{\mathrm{b}})\qquad \frac{A_{2\nu+1+2\varkappa}}{B_{2\nu+1+2\varkappa}} = (1-\lambda_{2\nu+1,\,2\varkappa})\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} + \lambda_{2\nu+1,\,2\varkappa}\frac{A_{2\nu+2}}{B_{2\nu+2}}.$$

Auf diese Gleichungen sind nun dieselben Betrachtungen anwendbar, wie auf (5^{a}) und (5^{b}); doch lehrt die folgende Überlegung noch etwas mehr. Läßt man in (9^{a}) $\varkappa$ ins Unendliche wachsen, so folgt

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}\right)\cdot \lim_{\varkappa=\infty}\lambda_{2\nu,\,2\varkappa} + \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} \\ &= \left(\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}\right)\cdot \lim_{\varkappa=\infty}(1-\lambda_{2\nu,\,2\varkappa}) + \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}, \end{aligned}$$

und hieraus auch

$$\frac{k - \dfrac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}}{\dfrac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - k}$$

$$= \lim_{\varkappa=\infty}\frac{\lambda_{2\nu,\,2\varkappa}}{1-\lambda_{2\nu,\,2\varkappa}} = \lim_{\varkappa=\infty}\frac{B_{2\varkappa-1,\,2\nu+1}}{A_{2\varkappa-1,\,2\nu+1}}\,\frac{B_{2\nu+1}}{B_{2\nu}} = \frac{1}{K_{2\nu+1}}\cdot\frac{B_{2\nu+1}}{B_{2\nu}}.$$

Ebenso folgt aus (9^{b})

$$\frac{\dfrac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - K}{K - \dfrac{A_{2\nu+2}}{B_{2\nu+2}}} = \frac{1}{K_{2\nu+2}} \frac{B_{2\nu+2}}{B_{2\nu+1}}.$$

Wenn der Kettenbruch divergiert, so konvergieren die linken Seiten mit wachsendem ν gegen 0, also konvergiert auch $\frac{1}{K_\nu}\frac{B_\nu}{B_{\nu-1}}$ sowohl für gerade als für ungerade ν gegen 0. Daraus entspringt der Satz:

Der Kettenbruch konvergiert, wenn die Ungleichung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{1}{K_\nu} \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} > 0$$

statthat. In dieser Form dürfte der Satz kaum auf einen Kettenbruch anwendbar sein; allein vermöge der Ungleichungen (8) entspringt daraus die weitere Folgerung:

Der Kettenbruch konvergiert, wenn für irgend einen Wert von λ

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{B_{2\lambda-1,\nu}}{A_{2\lambda-1,\nu}} \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} > 0.$$

Und wegen $\frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} > b_\nu$ a fortiori:

Der Kettenbruch konvergiert, wenn für irgend einen Wert von λ

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{B_{2\lambda-1,\nu}}{A_{2\lambda-1,\nu}} b_\nu > 0.$$

Aus (8) ersieht man weiter: Wenn eine dieser Bedingungen für einen gewissen Wert von λ erfüllt ist, so ist sie auch für jedes größere λ erfüllt, aber nicht umgekehrt. Für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ erhält man also eine unendliche Folge immer schärferer Kriterien.

Für $\lambda = 1$ ergibt sich der Satz des vorigen Paragraphen; für $\lambda = 2$ folgt die für Konvergenz hinreichende Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}+\frac{a_{\nu+2}\,b_\nu b_{\nu+3}}{a_{\nu+1}(a_{\nu+3}+b_{\nu+2}\,b_{\nu+3})}\right)>0.$$

Danach ist z. B. der Kettenbruch, bei dem

$$\begin{aligned} a_{2\nu} &= 1, & a_{2\nu-1} &= g^{2\nu-1} \\ b_{2\nu} &= g^{-\nu}, & b_{2\nu-1} &= g^{-\nu}, \end{aligned} \quad (g>1)$$

konvergent, während die Reihe

$$\sum\frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu} \quad \text{und auch} \quad \sum\sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu}}$$

konvergiert, also eine Entscheidung nicht gestattet.

§ 3.

Eine zweite Folge von unendlich vielen Konvergenzkriterien erhält man durch eine analoge Behandlung der Gleichung (9) für ungerade Werte von $\varkappa$. Schreibt man demgemäß $2\varkappa+1$ an Stelle von $\varkappa$, so folgt

$$\text{(10}^{\text{a}}\text{)} \quad \frac{A_{2\nu+2\varkappa+1}}{B_{2\nu+2\varkappa+1}}=(1-\lambda_{2\nu,2\varkappa+1})\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}+\lambda_{2\nu,2\varkappa+1}\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}},$$

$$\text{(10}^{\text{b}}\text{)} \quad \frac{A_{2\nu+2\varkappa+2}}{B_{2\nu+2\varkappa+2}}=(1-\lambda_{2\nu+1,2\varkappa+1})\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}+\lambda_{2\nu+1,2\varkappa+1}\frac{A_{2\nu+2}}{B_{2\nu+2}}.$$

Geht man zur Grenze $\varkappa=\infty$ über, so folgt ähnlich wie oben

$$\frac{\dfrac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}-K}{K-\dfrac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}}=k_{2\nu+1}\frac{B_{2\nu}}{B_{2\nu+1}}; \quad \frac{k-\dfrac{A_{2\nu+2}}{B_{2\nu+2}}}{\dfrac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}-k}=k_{2\nu+2}\frac{B_{2\nu+1}}{B_{2\nu+2}},$$

und da bei Divergenz des Kettenbruches die linken Seiten mit wachsendem ν beide gegen 0 konvergieren, so erhält man den Satz:

Der Kettenbruch konvergiert für

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, k_\nu \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu}>0.$$

Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (8) erhält man hieraus das brauchbarere Kriterium:

Der Kettenbruch konvergiert, wenn die Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{A_{2\lambda,\nu}}{B_{2\lambda,\nu}} \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} > 0$$

für irgend einen Wert von λ erfüllt ist.

Für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ ist dies wieder eine unendliche Folge sukzessive schärferer Kriterien. Um sie für die Anwendung noch etwas bequemer zu gestalten, beachte man

$$\frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} = b_\nu + a_\nu \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} < b_\nu + \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}} = \frac{b_\nu b_{\nu-1} + a_\nu}{b_{\nu-1}}.$$

Mit Rücksicht darauf folgt aus obigem:

Der Kettenbruch konvergiert, wenn die Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{A_{2\lambda,\nu}}{B_{2\lambda,\nu}} \frac{b_{\nu-1}}{a_\nu + b_\nu b_{\nu-1}} > 0$$

für irgend einen Wert von λ erfüllt ist.

Beispielsweise ergibt sich für $\lambda = 1$ die Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{a_{\nu+1} b_{\nu-1} b_{\nu+2}}{(a_{\nu+2} + b_{\nu+1} b_{\nu+2})(a_\nu + b_\nu b_{\nu-1})} > 0.$$