Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXV. Jahrgang 1905.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Von der Kurve 6. Ordnung, welche der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte ist, welche durch vier Punkte gehen.

Von **Gustav Bauer.**

(Eingelaufen 4. März.)

Um die Gleichung dieser Kurve zu bilden, verweist man gewöhnlich auf die von Moebius[1]) aus baryzentrischen Betrachtungen abgeleitete Relation

$$OA \cdot BCD - OB \cdot CDA + OC \cdot DAB - OD \cdot ABC = 0$$

(wo $ABC = \varDelta ABC$ u. s. w.), welche die Bedingung ausspricht, daß die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kegelschnitt liegen, von welchem O einer der Brennpunkte ist. Faßt man, was Moebius nicht erwähnt, die Punkte A, B, C, D als gegeben auf und O als veränderlich, so gibt diese Relation die Gleichung der Brennpunktkurve eines Büschels von Kegelschnitten mit den Basispunkten A, B, C, D.

Ausgehend von einer Bemerkung Sylvesters,[2]) daß die Brennpunktkurve sich ergeben müsse, wenn man in der Gleichung

$$\lambda \sqrt{A} + \mu \sqrt{B} + \nu \sqrt{C} + \tilde{\omega} \sqrt{D} = 0,$$

wo A, B, C, D die vier Basispunkte als unendlich kleine Kreise betrachtet darstellen, die $\lambda, \mu, \nu, \tilde{\omega}$ so bestimmt, daß die Gleichung vom 6. Grade wird, stellte Cayley[3]) die Gleichung der Kurve in der Form auf

---

[1]) J. Crelle, 1843, Bd. 20, p. 26—31. Ges. W., Bd. I, p. 581.

[2]) „Supplemental Note on the Analogues in Space to the Cartesian Ovals in plano.“ Phil. Mag. Vol. 31. Fourth Series, Mai, 1866, p. 380.

[3]) „On the locus of the foci of the conics, which pass through four given points.“ Phil. Mag. Vol. XXXII (1866). Coll. Math. Papers. Vol. VII, p. 1.

$$\sum \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} \sqrt{(x-a)+(y-a_1)^2} \right) = 0,$$

wo $a_1\, a_1$, $b_1\, b_1$ . . . die Koordinaten der Basispunkte des Büschels bezeichnen. Die Gleichung stimmt offenbar mit der aus der Relation von Moebius abgeleiteten überein. Die Gleichung ist 8. Grades, reduziert sich aber, indem die unendlich entfernte Gerade sich doppelt gezählt von der Kurve abtrennt, auf den 6. Grad. Ist die Gleichung schon an und für sich kompliziert, so verliert sich noch vollends alle Übersichtlichkeit bei dem Versuch, sie durch Entwicklung auf den 6. Grad zu reduzieren.

Die bekannten Singularitäten der Kurve sind nun aber so sehr an das Polardreieck des Kegelschnittbüschels gebunden,[1]) daß es mir angezeigt erschien, dieses Dreieck als Fundamentaldreieck zu wählen und die Gleichung der Kurve in trimetrischen Koordinaten auszurechnen. Hiebei ergab sich nun, nach Entfernung des quadratischen Faktors für die Kurve eine Gleichung 6. Grades von so überraschender Durchsichtigkeit, daß sie wohl verdient, bekannt gegeben zu werden.

1. Der Büschel sei bestimmt durch zwei Kegelschnitte

$$\left.\begin{aligned} U &= a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0 \\ V &= a_1' x_1^2 + a_2' x_2^2 + a_3' x_3^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

bezogen auf das gemeinsame Polardreieck ABC des Büschels. Unter den homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 verstehe ich hier die senkrechten Entfernungen eines Punktes von den dre Seiten des Fundamentaldreiecks, welche resp. den drei Ecken A, B, C gegenüberliegen und die Zeichen dieser Koordinaten seien so gewählt, daß für einen Punkt im Innern des Dreiecks die drei Koordinaten positiv sind.

Die Brennpunkte eines Kegelschnitts seien ferner nach Plücker definiert als die Durchschnitte der zwei Tangenten-

[1]) Vgl. auch St. Haller, „Untersuchung der Brennpunktkurve eines Kegelschnittbüschels etc.“ (Diss. d. Techn. Hochsch. 1903), wo eine große Anzahl solcher Kurven verzeichnet ist.

paare, welche von den zwei unendlich entfernten imaginären Kreispunkten der Ebene I_1, I_2 an den Kegelschnitt gezogen werden können. Es sind deren also vier, zwei reelle und zwei imaginäre.

Nun sei

$$W = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = 0 \tag{2}$$

die Gleichung irgend eines Kegelschnitts des Büschels, $P'(x')$, $P''(x'')$ zwei beliebige Punkte der Ebene, so sind die Tangentenpaare, welche von P', resp. P'' an den Kegelschnitt W gezogen werden können, durch die Gleichungen bestimmt

$$(W_1 x_1' + W_2 x_2' + W_3 x_3')^2 - W W' = 0$$
$$(W_1 x_1'' + W_2 x_2'' + W_3 x_3'')^2 - W W'' = 0,$$

wo W_1, W_2, W_3 die halben Abgeleiteten von W nach x_1, x_2, x_3 resp. bezeichnen und W', W'' die Werte von W bezeichnen, wenn man darin die Koordinaten x', resp. x'' einsetzt. Ausgerechnet reduzieren sich diese zwei Gleichungen auf folgende:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 A_2 (x_1 x_2' - x_2 x_1')^2 + A_1 A_3 (x_1 x_3' - x_3 x_1')^2 + A_2 A_3 (x_2 x_3' - x_3 x_2')^2 = 0 \\ A_1 A_2 (x_1 x_2'' - x_2 x_1'')^2 + \qquad - \qquad\qquad - \qquad\qquad = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Das System dieser zwei Gleichungen liefert die vier Durchschnittspunkte der zwei Tangentenpaare.

2. Wir nehmen jetzt für die Punkte P' P'' die unendlich entfernten Kreispunkte I_1, I_2. Die Koordinaten derselben sind, wie unschwer zu berechnen,

$$\left.\begin{array}{l} x_1' : x_2' : x_3' = 1 : -e^{+iC} : -e^{-iB} \\ x_1'' : x_2'' : x_3'' = 1 : -e^{-iC} : -e^{+iB} \end{array}\right\} \tag{4}$$

wenn man unter A, B, C die Winkel des Fundamentaldreiecks ABC an den gleichnamigen Ecken versteht. Setzt man diese Werte der x' und x'' in die Gleichungen 3) ein, so gibt die Addition und die Subtraktion derselben, nach Weghebung eines Faktors 2, die folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{l} A_1 A_2 (x_1^2 \cos 2C + x_2^2 + 2 x_1 x_2 \cos C) \\ + A_1 A_3 (x_1^2 \cos 2B + x_3^2 + 2 x_1 x_3 \cos B) \\ + A_2 A_3 (x_2^2 \cos 2B + x_3^2 \cos 2C - 2 x_2 x_3 \cos (C - B)) = 0, \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & A_1 A_2 (x_1^2 \sin 2C + 2x_1 x_2 \sin C) \\ & + A_1 A_3 (-x_1^2 \sin 2B - 2x_1 x_3 \sin B) \\ & + A_2 A_3 (-x_2^2 \sin 2B + x_3^2 \sin 2C - 2x_2 x_3 \sin(C-B)) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

welche, wenn man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} x_2 + x_1 \cos C &= X_3, & x_1 \sin C &= Y_3 \\ x_3 + x_1 \cos B &= X_2, & -x_2 \sin B &= Y_2 \\ x_2 \cos B - x_3 \cos C &= X_1, & -(x_2 \sin B + x_3 \sin C) &= Y_1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

setzt, übergehen in

$$\begin{aligned} & A_1 A_2 (X_3^2 - Y_3^2) + A_1 A_3 (X_2^2 - Y_2^2) + A_2 A_3 (X_1^2 - Y_1^2) = 0 \\ & A_1 A_2 \cdot X_3 Y_3 + A_1 A_3 \cdot X_2 Y_2 + A_2 A_3 \cdot X_1 Y_1 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Aus dem System dieser zwei Gleichungen ergibt sich

$$A_1 A_2 : A_1 A_3 : A_2 A_3 = [12] : [31] : [23], \tag{9}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} [12] &= (X_2^2 - Y_2^2) X_1 Y_1 - (X_1^2 - Y_1^2) X_2 Y_2 \\ [31] &= (X_1^2 - Y_1^2) X_3 Y_3 - (X_3^2 - Y_3^2) X_1 Y_1 \\ [23] &= (X_3^2 - Y_3^2) X_2 Y_2 - (X_2^2 - Y_2^2) X_3 Y_3 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aus 9) folgt sodann

$$A_2 : A_3 = [12] : [31], \quad A_1 : A_3 = [12] : [23], \quad A_1 : A_2 = [31] : [23]. \tag{11}$$

Es sei nun

$$W = U + \lambda V,$$

hiemit $A_1 = a_1 + \lambda a_1'$, $A_2 = a_2 + \lambda a_2'$, $A_3 = a_3 + \lambda a_3'$, so werden die Gleichungen 11)

$$\left.\begin{aligned} (a_3 + \lambda a_3') [12] - (a_2 + \lambda a_2') [31] &= 0 \\ (a_1 + \lambda a_1') [23] - (a_3 + \lambda a_3') [12] &= 0 \\ (a_2 + \lambda a_2') [31] - (a_1 + \lambda a_1') [23] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Elimination von λ aus irgend zweier dieser Gleichungen ergibt die Gleichung des Orts der Brennpunkte des Büschels

$$(a_1 a_3' - a_3 a_1')[12][23] + (a_2 a_1' - a_1 a_2')[23][31] + (a_3 a_2' - a_2 a_3')[31][12] = 0 \tag{13}$$

oder, wenn wir zur Abkürzung

$$a'_3 a_1 - a_3 a'_1 = (31),\ a'_1 a_2 - a_1 a'_2 = (12),\ a'_2 a_3 - a_2 a'_3 = (23)$$

setzen,

$$\frac{(12)}{[12]} + \frac{(23)}{[23]} + \frac{(31)}{[31]} = 0. \tag{13'}$$

3. Da die [12], ... vom 4. Grade in den Koordinaten sind, so ist die Gleichung 13) vom 8. Grad. Aber es ist leicht zu sehen, daß die Verbindungslinie der zwei Punkte P', P'', von denen die Tangentenpaare an die Kegelschnitte des Büschels ausgehen, immer, doppelt genommen, ein Teil des Orts der Schnittpunkte der Tangentenpaare ist. Es muß sich also im vorliegenden Falle die unendlich entfernte Gerade

$$\Omega = x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C = 0 \tag{14}$$

doppelt gezählt von der Kurve abheben, oder also der Faktor Ω^2 aus der Gleichung 13) abspalten lassen. Diese Abspaltung läßt sich hier leicht ausführen; es lassen sich nämlich die Ausdrücke [12], [23], [31] in je zwei Faktoren zerlegen, deren einer den Faktor Ω enthält. So ist

$$\left.\begin{aligned} [23] &= (X_2 X_3 + Y_2 Y_3)(Y_2 X_3 - Y_3 X_2) \\ [31] &= (X_3 X_1 + Y_3 Y_1)(Y_3 X_1 - Y_1 X_3) \\ [12] &= (X_1 X_2 + Y_1 Y_2)(Y_1 X_2 - Y_2 X_1) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

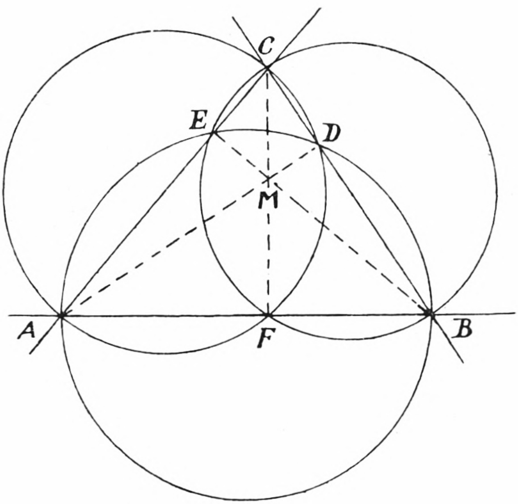
Die zweiten Faktoren reduzieren sich auf $-x_1 \Omega$, $+x_2 \Omega$, $-x_3 \Omega$; die ersten auf K_1, $-K_2$, K_3, wenn man setzt,

$$\left.\begin{aligned} x_2 x_3 + x_1 (-x_1 \cos A + x_2 \cos B + x_3 \cos C) &= K_1 \\ x_3 x_1 + x_2 (\ \ x_1 \cos A - x_2 \cos B + x_3 \cos C) &= K_2 \\ x_1 x_2 + x_3 (\ \ x_1 \cos A + x_2 \cos B - x_3 \cos C) &= K_3 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Gleichung der Brennpunktkurve des Büschels reduziert sich sodann auf folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(12)}{x_3 K_3} + \frac{(23)}{x_1 K_1} + \frac{(31)}{x_2 K_2} = 0 \\ &\text{oder} \\ &(12)\, x_1 x_2 K_1 K_2 + (23)\, x_2 x_3 K_2 K_3 + (31)\, x_3 x_1 K_3 K_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

eine Gleichung 6. Grades, bemerkenswerth wegen der einfachen geometrischen Bedeutung der Größen, die in dieselben eingehen. Denn die Konstanten (12), (23), (31) sind, wie aus den Gleichungen 1) hervorgeht, die Quadrate der Koordinaten der Durchschnittspunkte der Kegelschnitte U und V, d. h. also die Quadrate der Koordinaten der Basispunkte des Büschels. Die Größen $K_1\, K_2\, K_3$ aber stellen die über den Seiten des Fundamentaldreiecks $A\,B\,C$ als Durchmesser beschriebenen Kreise dar. Um



sich hievon zu überzeugen, bemerke man, daß die Fußpunkte $D\,E\,F$ der von den Ecken A, B, C auf die gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks $A\,B\,C$ gefüllten Senkrechten durch die Gleichungen bestimmt sind

$$x_1 = 0, \quad x_2 \cos B - x_3 \cos C = 0 \qquad D)$$
$$x_2 = 0, \quad x_1 \cos A - x_3 \cos C = 0 \qquad E)$$
$$x_3 = 0, \quad x_1 \cos A - x_2 \cos B = 0 \qquad F)$$

Es geht also z. B. die Kurve $K_3 = 0$ durch die Ecke $A\,(x_2 = 0,\ x_3 = 0)$, die Ecke $B\,(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$ und durch die zwei Punkte D, E; außerdem zeigt eine kleine Rechnung, daß sie auch durch die zwei Kreispunkte I_1, I_2 4) geht. Die Kurve ist also der über AB konstruierte Kreis.[1])

4. Die Brennpunktkurve hat, wie schon Cayley gefunden, acht Doppelpunkte.[2]) Vermöge der einfachen Zusammensetzung der Gleichung 17) lassen sich diese acht Doppelpunkte sofort aus derselben erkennen. Es sind die zwei Kreispunkte I_1, I_2, die drei Ecken des Fundamentaldreiecks A, B, C, und die drei Fußpunkte der Höhen desselben D, E, F, durch welche je zwei der Kreise K und eine Seite des Dreiecks ABC gehen. Jeder der Kreise K geht durch sechs dieser Doppelpunkte und hat mithin keinen weiteren Punkt mit der Kurve 6. Ordnung gemein.

Man bemerke, daß die Gleichung 17) nicht nur verwendbar ist, wenn die Basispunkte des Kegelschnittbüschels reell sind, sondern auch, wenn dieselben sämtlich imaginär sind, da auch in diesem Falle das Polardreieck ABC des Büschels ganz reell ist. Die Doppelpunkte der Brennpunktkurve bleiben mithin auch, außer I_1, I_2, sämtlich reell, wenn die zwei Kegel-

---

[1]) Will man die Gleichung des Kreises direkt berechnen, so kann man von einer allgemeinen Kreisgleichung in trimetrischen Koordinaten ausgehen. Um eine solche zu erhalten, bemerke man, daß, wenn $S = 0$ die Gleichung irgend eines Kreises ist, $S + (\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)\,\Omega = 0$, wo α, β, γ beliebige Konstanten sind, eine solche allgemeine Form der Kreisgleichung ist. Für S kann man allenfalls den unendlich kleinen Kreis um A beschrieben nehmen, also $S = x_2^2 + x_3^2 + 2\,x_2 x_3 \cos A$ setzen.

[2]) Cayley (a. a. O.) waren nur die fünf Doppelpunkte I_1, I_2, A, B, C bekannt. Um nachzuweisen, daß die Kurve acht Doppelpunkte habe, zeigt er zunächst, daß, wie schon Sylvester a. a. O. p. 384 bemerkt, jede Gerade, welche einen der Kreispunkte I_1, I_2 mit einem der vier Basispunkte des Büschels verbindet, Doppeltangente der Kurve ist, sodann daß noch zwei einfache Tangenten von jedem der Punkte I_1, I_2 an die Kurve gehen. Es gehen mithin von I_1 $2.4 + 2 = 10$ Tangenten an die Kurve. Daraus folgt die Klassenzahl der Kurve $= 14$. Dieselbe erfährt also, da $14 = 6.5 - 16$, eine Depression um 2.8, woraus zu folgern ist, daß die Kurve acht Doppelpunkte hat. — Daß die drei Punkte D, E, F auch Doppelpunkte der Kurve sind, hat K. Bobek auf synthetischem Wege nachgewiesen. („Die Brennpunktkurve des Kegelschnittbüschels." Monatshefte für Mathematik und Physik. Wien, III. Jahrg., 1892, p. 312.)

schnitte 1), welche den Büschel bestimmen, keinen reellen Punkt gemeinsam haben.

5. Es erübrigt noch zu zeigen, wie aus der Brennpunktkurve die Brennpunkte der einzelnen Kurven $U + \lambda V$ des Büschels zu erhalten sind. Dieß ergibt sich aber sofort aus den Gleichungen 12), aus welchen durch Elimination von λ eben die Gleichung der Brennpunktkurve hervorging. Nimmt man in diesen Gleichungen den Faktor Ω, der in den [12], [31], [23] enthalten ist, weg, so gehen dieselben über in folgende

$$\left.\begin{aligned} (a_2 + \lambda a_2') x_2 K_2 - (a_3 + \lambda a_3') x_3 K_3 &= 0 \\ (a_1 + \lambda a_1') x_1 K_1 - (a_3 + \lambda a_3') x_3 K_3 &= 0 \\ (a_2 + \lambda a_2') x_2 K_2 - (a_1 + \lambda a_1') x_1 K_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 18)$$

welche Kurven dritter Ordnung darstellen, von denen jede die vier Brennpunkte (zwei reelle und zwei imaginäre des Kegelschnitts $U + \lambda V$ aus der Kurve 6. Ordnung 17) ausschneidet. Die erste dieser Kurve hat $A\,(x_2 = 0,\ x_3 = 0)$ zum Doppelpunkt, die zweite $B\,(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$, die dritte $C\,(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ zum Doppelpunkt und jede derselben geht außerdem durch die Punkte D, E, F und die zwei Kreispunkte I_1, I_2. Von den $3 \cdot 6 = 18$ Schnittpunkten einer solchen Kurve 3. Ordnung mit der Kurve 6. Ordnung fallen also $4 + 5 \cdot 2 = 14$ auf die Doppelpunkte der letzteren. Die vier übrigen mit λ beweglichen Schnittpunkte sind eben die Brennpunkte von $U + \lambda V$.

6. Von speziellen Fällen soll hier nur der eine Fall betrachtet werden, wenn die vier Basispunkte des Büschels in einem Kreise liegen, da derselbe ein besonderes Interesse gewährt. Es hat nämlich Sylvester gefunden,[1]) daß in diesem

[1]) „Supplemental Note on the Analogues in Space to the Cartesian Ovals in plano.“ Phil. Mag. Vol. 31. Fourth Series, Mai, 1866, p. 380 Sylvester kommt hier auf eine zirkulare Kurve 3. Ordnung, von der er sagt: „Sie ist der Ort der Brennpunkte eines Systems von Kegelschnitten, deren Axen parallel sind und welche also durch vier Punkte, die in einem Kreise liegen, gehen“. . . „Diese Kurve geht nicht nur durch den Mittelpunkt des Kreises und die drei Diagonalpunkte, sondern ist

Falle der Ort der Brennpunkte des Büschels aus zwei Kurven 3. Ordnung besteht. Die für den Ort gefundene Gleichung 17) muß also in diesem Falle in zwei Gleichungen 3. Ordnung zerfallen. Und in der Tat ist die Form derselben so charakteristisch für die Kurve, daß sie uns einen geometrischen Einblick gewährt, wie dieses Zerfallen vor sich geht.

Nun ist die Gleichung des Kreises, der zu dem Büschel mit dem Polardreieck ABC gehört, wie sich leicht aus Nr. 3, Anmerkung, berechnet,

$$H = x_1^2 \sin A \cos A + x_2^2 \sin B \cos B + x_3^2 \sin C \cos C = 0 \qquad 19)$$

Der Mittelpunkt M dieses Kreises fällt mit dem Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks ABC zusammen. Seine Koordinaten erfüllen also die Gleichungen

$$x_1 \cos A = x_2 \cos B = x_3 \cos C.$$

Der Kreis ist der Orthogonalkreis der Kreise K_1, K_2, K_3 und kann reell oder imaginär sein. Sind die Basispunkte des Büschels und also auch der Kreis reell, so ist das Polardreieck ABC stumpfwinklig, der Punkt M außerhalb des Dreiecks. Jedenfalls hat man, wenn die Basispunkte des Büschels auf dem Kreise liegen, nach der Bedeutung der Größen (12), (23), (31)

$$(12) \sin C \cos C + (23) \sin A \cos A + (31) \sin B \cos B = 0.$$

Mittelst dieser Gleichung können wir eine der Größen (12) . . ., etwa (23), aus der Gleichung 17) eliminieren und erhalten

auch in jedem dieser Punkte parallel zu der Asymptote, d. h. zu der Geraden, welche einen der Winkel, in welchem sich die Diagonalen schneiden, halbiert. Sie ist also identisch zu einer der zwei konjugierten zirkularen Kurven Salmons (Higher Plane curves, p. 175), von welcher die vier betreffenden Punkte im Kreise Brennpunkte sind. Die zwei konjugierten zirkularen Kurven 3. Ordnung, von welchen vier Punkte in einem Kreise die Brennpunkte sind, bilden also zusammen den vollständigen Ort der Brennpunkte des Systems von Kegelschnitten, welche durch eben diese vier Punkte gehen." Wie Salmon gezeigt hat, bestehen diese Kurven immer aus einem Oval und einem unpaaren Zug.

$$\left.\begin{array}{l}(12)\, x_2 K_2 (x_1 K_1 \sin A \cos A - x_3 K_3 \sin C \cos C) \\ + (31)\, x_3 K_3 (x_1 K_1 \sin A \cos A - x_2 K_2 \sin B \cos B) = 0\end{array}\right\} \quad 20)$$

Um die Ausdrücke in den Klammern zu vereinfachen, bemerke man, daß die Reduktion des Kreises $K + (\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)\,\Omega$ auf die Form H die Relationen ergibt,[1])

$$\left.\begin{array}{l}K_3 \sin C = (x_1 \cos A + x_2 \cos B)\,\Omega - H \\ K_1 \sin A = (x_2 \cos B + x_3 \cos C)\,\Omega - H \\ K_2 \sin B = (x_3 \cos C + x_1 \cos A)\,\Omega - H\end{array}\right\} \quad 21)$$

Hiemit geht Gleichung 20) über in

$$\left.\begin{array}{l}(12)\, x_2 K_2 (x_1 \cos A - x_3 \cos C)\,[H - x_2 \cos B \cdot \Omega] \\ + (31)\, x_3 K_3 (x_1 \cos A - x_2 \cos B)\,[H - x_3 \cos C \cdot \Omega] = 0\end{array}\right\} \quad 22)$$

7. Der Ausdruck $H - x_3 \cos C \cdot \Omega$ stellt einen Kreis dar und da er entwickelt

$$= x_1 \sin A\,(x_1 \cos A - x_3 \cos C) + x_2 \sin B\,(x_2 \cos B - x_3 \cos C)$$

ist, so ersieht man, daß dieser Kreis durch die Ecke C des Polardreiecks, den Höhepunkt M des Dreiecks und die Fußpunkte D, E der von A und B ausgehenden Höhen geht.

Setzen wir also um abzukürzen

$$x_1 \cos A - x_3 \cos C = (x_1\, x_3)$$

u. s. f.

wobei zu bemerken, daß

$$(x_3\, x_1) = -(x_1\, x_3),$$

und

---

1) Setzt man diese Werte der K in die Kurvengleichung 17) ein und macht sodann $\Omega = 0$, so erhält man, da H^2 sich weghebt, einen dem Dreieck $A\,B\,C$ umschriebenen Kegelschnitt, dessen Asymptoten die zwei unendlich entfernten Punkte markieren, welche die Kurve außer den Doppelpunkten I_1, I_2 hat. Macht man dieselbe Operation in Gleichung 22), so geht der umschriebene Kegelschnitt durch den Höhepunkt M; er wird also eine gleichseitige Hyperbel; die zwei Asymptoten sind reell und stehen senkrecht zueinander.

$$\left.\begin{aligned} H - x_3 \cos C \cdot \Omega &= x_1 \sin A\,(x_1 x_3) + x_2 \sin B\,(x_2 x_3) = K_3' \\ H - x_1 \cos A \cdot \Omega &= x_2 \sin B\,(x_2 x_1) + x_3 \sin C\,(x_3 x_1) = K_1' \\ H - x_2 \cos B \cdot \Omega &= x_3 \sin C\,(x_3 x_2) + x_1 \sin A\,(x_1 x_2) = K_2' \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

so sind K_1', K_2', K_3' die Kreise, welche über den Strecken MA, MB, MC als Durchmesser beschrieben sind, und also durch je zwei der Höhenfußpunkte D, E, F hindurchgehen.

8. Die Kurvengleichung 22) schreibt sich jetzt

$$(12)\,(x_1 x_3)\,K_2 \cdot x_2 K_2' + (31)\,(x_1 x_2)\,K_3 \cdot x_3 K_3' = 0 \qquad 24)$$

und läßt sofort erkennen, daß nun auch der Punkt M, Mittelpunkt des Kreises, auf dem die Basispunkte des Büschels liegen, Doppelpunkt der Kurve ist. Sie enthält also nun neun Doppelpunkte, A, B, C, D, E, F, M, I_1, I_2. Da eine Kurve 6. Ordnung zehn Doppelpunkte haben kann, so ist durch Entstehen des neunten Doppelpunkts M das Zerfallen der Kurve nicht unmittelbar bedingt; aber es ist aus der Gleichung 24) leicht zu ersehen, daß in der Tat ein Zerfallen der Kurve in zwei Kurven 3. Ordnung, von denen jede durch die neun Doppelpunkte geht, eintritt. Das beruht darauf, daß die Kurvengleichung 24) aus lauter ausgearteten Kurven 3. Ordnung, durch die neun Punkte gehend, zusammengesetzt ist. (Das Oval ist in einen Kreis, der unpaare Zug in eine Gerade ausgeartet.) So sind

$$(x_2 x_3)\,K_1,\quad (x_3 x_1)\,K_2,\quad (x_1 x_2)\,K_3$$

solche ausgeartete Kurven 3. Ordnung, und ebenso auch

$$x_1 K_1',\quad x_2 K_2',\quad x_3 K_3'.$$

Die Kreise K, K' gehen durch je sechs der obigen neun Punkte hindurch, der lineare Faktor durch die drei übrigen. Bezeichnen wir diese ausgearteten Kurven der Reihe nach mit

$$\mathfrak{K}_1,\ \mathfrak{K}_2,\ \mathfrak{K}_3$$
$$\mathfrak{K}_1',\ \mathfrak{K}_2',\ \mathfrak{K}_3',$$

so erhält die Kurvengleichung 24) die Form

$$(31)\ \mathfrak{K}_3 \mathfrak{K}_3' - (12)\ \mathfrak{K}_2 \mathfrak{K}_2' = 0. \qquad 25)$$

Da nun die Kurven 3. Ordnung, welche durch die obigen neun Punkte gehen, einen Büschel bilden, so kann man die $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ durch irgend zwei derselben linear ausdrücken und dadurch die Gleichung 25) auf eine quadratische Gleichung, etwa in $\mathfrak{K}_3'$ und $\mathfrak{K}_2'$, zurückführen, deren Auflösung sodann die zwei Kurven 3. Ordnung, in welche die Kurve 6. Ordnung zerfällt, in der Form

$$\lambda\,\mathfrak{K}_2' - \mu\,\mathfrak{K}_3' = 0 \tag{26}$$

ergibt.

Zur Reduktion hat man die Relationen

$$\begin{aligned} \sin C\cdot\mathfrak{K}_3 &= -\cos A\cdot\mathfrak{K}_1'+\cos B\cdot\mathfrak{K}_2' & \quad \sin C\cdot\mathfrak{K}_3' &= \cos A\cdot\mathfrak{K}_1-\cos B\cdot\mathfrak{K}_2 \\ \sin A\cdot\mathfrak{K}_1 &= -\cos B\cdot\mathfrak{K}_2'+\cos C\cdot\mathfrak{K}_3' & \quad \sin A\cdot\mathfrak{K}_1' &= \cos B.\mathfrak{K}_2-\cos C\cdot\mathfrak{K}_3 \\ \sin B\cdot\mathfrak{K}_2 &= -\cos C\cdot\mathfrak{K}_3'+\cos A\cdot\mathfrak{K}_1' & \quad \sin B\cdot\mathfrak{K}_1' &= \cos C\cdot\mathfrak{K}_3-\cos A\cdot\mathfrak{K}_1 \\ \Sigma \sin C\cdot\mathfrak{K}_3 &= 0 & \quad \Sigma \sin C\cdot\mathfrak{K}_3' &= 0. \end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung in $\mathfrak{K}_3'$, $\mathfrak{K}_2'$ wird

$$(31)\cos A\cdot\mathfrak{K}_3'^2 + [(31)+(12)]\,\mathfrak{K}_3'\mathfrak{K}_2' + (12)\cos A\cdot\mathfrak{K}_2'^2 = 0, \tag{27}$$

woraus

$$\frac{\mathfrak{K}_3'}{\mathfrak{K}_2'} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{-[(31)+(12)] \pm \sqrt{[(31)+(12)]^2 - 4\,(12)+(31)\cos^2 A}}{2\,(31)\cos A}.$$

Dem doppelten Zeichen entsprechen die zwei Kurven 3. Ordnung, in welche die Brennpunktkurve zerfällt, wenn die vier Basispunkte des Büschels auf einem Kreise liegen. Aus dem früheren folgt (Nr. 7, Anm.), daß ihre Asymptoten zueinander senkrecht stehen.