

Sitzungsberichte

der

mathematisch - physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band X. Jahrgang 1880.

München.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1880.

In Commission bei G. Franz.

Sitzungsberichte

der
königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Sitzung am 3. Januar 1880.

Mathematisch-physikalische Classe.

Herr v. Bauernfeind hielt einen Vortrag über:

Die Beziehungen zwischen Temperatur,
Druck und Dichtigkeit in verschiedenen
Höhen der Atmosphäre.

Der k. k. österreichische Hauptmann Herr Wilhelm Schlemüller zu Prag behandelt in einer vor Kurzem bei H. Dominicus dortselbst erschienenen und

„Der Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck in einer ruhenden nicht bestrahlten Atmosphäre“

betitelten kleinen Schrift das vorstehend bezeichnete Thema „auf Grund der dynamischen Gastheorie“ und gelangt hiedurch fürs Erste zu einer Beziehung zwischen Höhen- und Temperaturunterschied, womit er dann weiter die Fragen über die Aenderung der Temperatur und des Drucks zwischen zwei Punkten löst, die Höhe der Atmosphäre und deren Temperatur an der oberen Begrenzung berechnet, und schliesslich eine neue Barometerformel aufstellt.

Mit Ausnahme dieser Formel kommt Herr Schlemüller genau zu denselben Ergebnissen auf welche mich meine im Jahre 1857 unter Beihilfe von 10 Studirenden des hiesigen K. Polytechnicums älterer Ordnung am Hohen Miesing an-

gestellten Messungen und namentlich meine hieran geknüpften ausführlichen Studien über die Physik der Atmosphäre geführt haben, und welche seit dem Jahre 1862 dem wissenschaftlichen Publikum aus meiner von der hiesigen literarisch-artistischen Anstalt der J. G. Cotta'schen Buchhandlung verlegten Schrift:

„Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Temperaturänderungen der Atmosphäre“

bekannt sind. Nur Herr Schlemüller nimmt weder von meinen Beobachtungen noch von meinen Untersuchungen Notiz, obwohl die einen wie die anderen in der Literatur grosse Anerkennung und Verbreitung fanden wegen des von mir gelieferten Nachweises dass und warum man mit dem Barometer am Morgen und Abend zu kleine, am Mittag zu grosse und nur zu gewissen Vor- und Nachmittagsstunden richtige Höhen findet, und obgleich ich auf sie meine in den Jahren 1864 (Bd 62, Nr 1478 bis 1480) und 1866 (Bd 67, Nr 1587 bis 1590) in den „Astronomischen Nachrichten“ erschienene Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung gründete, welche die Bessel'schen mittleren astronomischen Refractionen bis zu 90° Zenithdistanz genau darstellte und die am Kaukasus zuerst beobachtete Thatsache von der Abnahme des Coefficienten der terrestrischen Refraction mit der Höhe des Beobachtungsorts vollständig erklärte, was bis heute keine andere Strahlenbrechungstheorie zu leisten vermochte, weil sie alle auf ungenauen Voraussetzungen über die Aenderungen der Dichtigkeit der Atmosphäre mit der Höhe beruhen.

Da mir das völlige Stillschweigen des Herrn Hauptmanns Schlemüller über meine auch in den vier letzten Auflagen meiner „Elemente der Vermessungskunde“ genannten und von andern Schriftstellern vielfach citirten Abhandlungen über barometrische Höhenmessung und Strahlen-

brechung auffiel, so wandte ich mich am 9. December 1879 schriftlich an ihn mit der Bitte mir offen zu sagen, ob ihm meine Arbeiten in Bezug auf die vorliegenden Fragen in der That unbekannt waren, oder welchen Grund er hatte dieselben mit Stillschweigen zu übergehen. Ich erhielt darauf unterm 28. Decbr nachstehende Antwort, die ich vollständig mittheile, da von dem Verfasser ein Auszug nicht gestattet ist. Nur die einzelnen Absätze habe ich mir zu beziffern erlaubt, um mich in meinen folgenden Bemerkungen leichter auf sie beziehen zu können.

Herr Hauptmann Schlemüller schreibt nämlich:

„Die kleine Abhandlung, in welcher ich den Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck abgeleitet zu haben glaube, stützt sich nebst den nur den Fachmännern zugänglichen Verstandesgründen auch auf die so vollkommene Uebereinstimmung der theoretisch erhaltenen Resultate mit den praktischen Beobachtungen.“ (1)

„Es kann mir nur sehr schmeichelhaft sein dass ein so vorzüglicher Beobachter der einschlägigen Verhältnisse der Atmosphäre wie Sie zu denselben Folgerungen gekommen ist wie ich, und sie durch die Praxis bestätigt gefunden hat.“ (2)

„Ich bin einer solchen Anerkennung nicht gewohnt, da meine Abhandlung sowohl von der Akademie der Wissenschaften zu Wien, sowie von einer Reihe der bedeutendsten naturwissenschaftlichen Zeitschriften, als nicht zur Veröffentlichung geeignet, zurückgewiesen wurde.“ (3)

„Der Schwerpunkt meiner Abhandlung liegt jedoch nicht in der Ableitung der barometrischen Formeln, welche Jedermann erhalten musste, der an das Gesetz glaubte, die Temperaturabnahme sei proportional dem Höhenunterschiede; sondern darin dass ich mit Hilfe der dynamischen Gastheorie bewiesen habe dass diese Abnahme dem Höhenunterschiede proportional sein muss.“ (4)

„Hiezu war es nöthig die gegenwärtig allgemein gültige Ableitung eines Grundsatzes der dynamischen Gastheorie als falsch zu erkennen und (Seite 5 meiner Schrift, Zeile 26 u. ff.) den richtigen Satz aufzustellen.“ (5)

„Darin, glaube ich, liegt das Verdienst meiner Abhandlung; alles Weitere sind Consequenzen der mehrerwähnten Proportionalität, und stehe ich nicht an, Jedem der den Nachweis liefert, die Priorität in diesen Consequenzen eines früher geglaubten Satzes zuzustehen, wie Seite 9, Anmkg 1 meiner Schrift zeigt.“ (6)

„In erster Linie Officier, kann ich meinen wissenschaftlichen Arbeiten nur wenig Zeit und Mittel zuwenden; diess mag auch entschuldigen dass ich Ihr mir aus vielfachen Citaten bekanntes Werk nicht studirt habe; nach dessen Studium werde ich in einer eventuellen Neuauflage der Abhandlung auf Ihre Priorität bezüglich der Ableitung von

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{h}{H}\right)^c \quad (7)$$

hinweisen.“

Dieser Brief des Herrn Hauptmanns veranlasst mich auf die Entwicklung meiner Relationen über die physikalische Constitution der Atmosphäre etwas näher einzugehen, weil es sonst den Anschein haben könnte als wäre ich im Stande gewesen dieselben ohne jede vorausgegangene theoretische Erörterung einfach nur zu beobachten. Meine Entwicklung bezieht sich aber nach Seite 95 der „Beobachtungen und Untersuchungen“ in erster Linie auch auf „die Temperaturabnahme nach der Höhe“ (vergl. Satz 4), und lautet im Auszuge folgendermassen:

„Verstehen wir unter k einen die Abhängigkeit der Differentialgrössen des Drucks p und der Dichtigkeit ρ der Atmosphäre bezeichnenden Coefficienten, dessen Werth aus Versuchen bestimmt werden muss, so kann man wegen der

nach Höhe und Breite sich ändernden Temperatur der Atmosphäre das Mariottesche Gesetz nicht mehr einfach durch die Proportion $dp : p = dq : \varrho$ sondern nur durch die Gleichung darstellen:

$$\frac{dp}{p} = k \frac{dq}{\varrho} \quad (37)$$

aus welcher sich durch Integration zunächst ergibt

$$\text{Log } p = k \text{Log } \varrho + C$$

und wenn p' und ϱ' Elasticität und Dichte der Atmosphäre eines anderen Punkts der Atmosphäre bezeichnen:

$$\text{Log } p' = k \text{Log } \varrho' + C$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt durch Abziehen die Gleichheit der nachstehenden Verhältnisse zwischen Druck und Dichtigkeit:

$$\frac{p'}{p} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho} \right)^k \quad (38)$$

Bezeichnet Θ die absolute Temperatur ($272,8 + t^\circ \text{C}$) der Atmosphäre an der Stelle wo die Elasticität p und die Dichtigkeit ϱ stattfindet, und ist $d\Theta$ die Temperaturerhöhung welche bei constantem Druck eine Dichtigkeitsänderung $d\varrho$ bewirkt, so muss bei veränderlichem Drucke

$$\frac{d\Theta}{\Theta} = k_0 \frac{d\varrho}{\varrho} \quad (39)$$

gesetzt werden, wobei k_0 wieder einen durch Erfahrung zu bestimmenden Coefficienten bezeichnet. Diese Gleichung gibt durch Integration, wenn Θ' die absolute Temperatur der Atmosphäre an der Stelle ist wo die Elasticität p und die Dichtigkeit ϱ stattfinden:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho} \right)^{k_0} \quad (40)$$

und da zwischen den durch p , ϱ , Θ und p' , ϱ' , Θ' ausgedrückten Zuständen einer Luftmasse die Beziehung besteht:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{p' \varrho}{p \varrho'} \quad (41)$$

so folgt durch Einsetzung des Werths von $p' : p$ aus (38) in (40) die Relation zwischen Temperatur, Dichtigkeit und Druck:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{k-1} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (42)$$

wobei sich also zeigt dass $k_0 = k - 1$ ist“.

„Die Gleichungen (38) und (40) stimmen mit den von Poisson (in den Annales de Chimie et de Physique, Tome XXIII, pag. 339 und in Gilberts Annalen Jahrgang 1824, Seite 272) aufgestellten Formeln überein, obgleich ihre Entwicklungen und die Bedeutungen der Constanten k verschieden sind. Ich füge nun diesen zwei Gleichungen eine dritte bei welche Poisson nicht hat und die sich speciell auf die Abnahme der Temperatur mit der Höhe der Atmosphäre bezieht.“

„Heisst nämlich die Höhe der Atmosphäre in einem beliebigen Punkte der Erdoberfläche h , und findet in diesem Punkte die absolute Temperatur Θ statt, so wird, wenn h um dh wächst, auch die Temperatur um $d\Theta$ zunehmen; da aber diese Aenderungen vielleicht ungleichförmig sind, so kann man zunächst nur

$$\frac{d\Theta}{\Theta} = k_1 \frac{dh}{h} \quad (43)$$

setzen und hiebei unter k_1 einen Erfahrungscoefficienten verstehen, der später aus Beobachtungen zu bestimmen ist.“

„Aus dieser Gleichung findet man, wenn Θ' und h' einem zweiten Punkte der Vertikalen entsprechen, durch Integration

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \left(\frac{h'}{h}\right)^{k_1} \quad (44)$$

wonach sich also die Temperatur Θ' für einen Punkt der um z höher liegt als der Ausgangspunkt, aus der Gleichung berechnen lässt:

$$\Theta' = \Theta \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{k_1} \quad (45)$$

Mit Rücksicht auf diese Gl (44) haben wir nunmehr folgende Beziehungen zwischen Temperatur, Dichtigkeit, Druck und Höhe der Atmosphäre:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{k-1} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^{k_1} \quad (46)$$

und es kommt jetzt nur mehr darauf an die Exponenten k und k_1 und die Atmosphärenhöhe h aus einer hinreichenden Zahl guter Beobachtungen zu bestimmen.“

Diese Bestimmung erfolgte nach Seite 97—109 meines Buchs auf Grund von 100 Beobachtungen über die Temperaturabnahme mit der Höhe, welche in folgenden Schriften veröffentlicht sind:

1. Die thermo- und barometrischen Messungen welche Gay-Lussac auf seiner am 16. Septbr. 1804 von Paris aus unternommenen Luftreise (bis zu 7018 m über Meer) gemacht und in den *Annales de Chimie*, T. 52, p. 75 etc. mitgeteilt hat.
2. Die thermo- und barometrischen Beobachtungen welche John Welsh auf vier im Jahre 1852 bis zu einer höchsten Höhe von 22640 engl. Fuss ausgeführten Luftschifffahrten gemacht hat. (Vergl. die Berichte der Royal Society zu London und Petermanns Geogr. Mitteilungen 1855, S. 333 u. ff.).
3. In der nur die höheren und höchsten (5880 m) Berge berücksichtigenden Auswahl der von Ramond, Humboldt,

Saussure u. A. angestellten barometrischen Höhenmessungen, welche sich in Ramond's „Mémoires sur la formule barométrique de la mécanique céleste“, Paris 1811, verzeichnet finden.

4. Die thermo- und barometrischen Beobachtungen welche in Genf und auf dem Grossen St. Bernhard in zehn Jahren (1841—1850) gemacht und von Plantamour in seinem „Résumé des observations thermométriques et barométriques“ etc., Genf 1851, mitgeteilt wurden.
5. Die meteorologischen Beobachtungen auf vier Stationen in Göttingen, Clausthal und Brocken, welche C. Prediger in seiner Schrift über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen, Clausthal 1860, veröffentlicht hat.
6. Die Nivellemente nebst den thermo- und barometrischen Messungen welche ich mit zehn Gehilfen in der Zeit vom 13. bis 28. August 1857 am Grossen Miesing ausgeführt habe und deren Ergebnisse in meinen „Beobachtungen und Untersuchungen“ angeführt sind.

Von den in der Tafel XLIV der letztgenannten Schrift zusammengestellten 100 Beobachtungen sind entnommen:

- 4 der Luftschiffahrt von Gay-Lussac (Abhdlg Nr 1),
- 12 der Luftschiffahrt von John Welsh (Abhdlg Nr 2),
- 33 den in der Abhdlg Nr 3 aufgeführten Messungen von Ramond, Humboldt, Saussure,
- 17 den Beobachtungen von Plantamour u. A. in dessen unter Nr 4 aufgeführten Résumé etc.,
- 16 den meteorologischen Beobachtungen von C. Prediger u. A. im Harz, (Abhdlg Nr 5),
- 18 den Beobachtungen von Bauernfeind und Gehilfen, (Abhdlg Nr 6 „Beobachtungen“ etc.).

Hieraus geht hervor dass ich meine eigenen Messungen nicht über Gebühr berücksichtigt habe. Aus diesen hundert Beobachtungen wurden folgende Werthe berechnet:

$$\text{Seite 105: } k' = \frac{k}{k-1} = 5,977 \text{ und } k = 1,2160$$

$$\text{Seite 109: } h = 51382 \text{ Meter und } k' = 1,0227$$

und ich war wohl wegen der noch immer geringen Zahl und Genauigkeit der benützten Beobachtungen berechtigt, in meinen Formeln $k = 1,2$ und $k_1 = 1$ zu setzen, wodurch diese auf Seite 110 der „Beobachtungen und Untersuchungen“ die Gestalt annahmen:

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{h'}{h} \quad (59a)$$

Genau dieselben Beziehungen findet nun Herr Hauptmann Schlemüller „auf Grund der dynamischen Gastheorie“ welche auf der schon von Daniel Bernoulli (1738) ausgesprochenen, in unserer Zeit aber von Krönig (1856, Poggen dorffs Annalen, Bd 99) und von Clausius (1856, Ebendasselbst, Bd 100) weiter ausgeführten Ansicht beruht dass die Gas-molekeln den ihnen angewiesenen umschlossenen Raum in fortschreitender Bewegung durchheilen bis sie entweder an ein anderes Molekel oder an den Umschluss des gedachten Raumes anstossen, worauf sie wie vollkommen elastische Kugeln ohne Geschwindigkeitsverlust zurückkehren.

Hienach ist der stetige Druck eines Gases auf seine Begrenzung als die Wirkung unzähliger Stösse aufzufassen welche die ankommenden Molekeln ausüben. Auf Grund dieser und der weiteren zuerst von Joule ausgesprochenen Anschauung dass es erlaubt sei bei der unendlichen Mannigfaltigkeit der Bewegungsrichtungen dafür die grösste Regelmässigkeit zu setzen, entwickelte Clausius (a. a. O.) für die mittlere Geschwindigkeit u womit sich die Molekeln verschiedener Gase bei gegebener Temperatur bewegen, die Formel

$$u = \sqrt{3 g P v} \quad (\alpha)$$

worin P den Druck des Gases (in Kilogramm) auf die Flächeneinheit (den Quadratmeter), v das Volumen eines Kilogramms Gas (in Cubikmeter) und g die Beschleunigung der Schwere bedeutet.

Statt dieser Formel stellt Hr Schlemüller die andere auf:

$$V = 2 \sqrt{3 g P_0 V_0 (1 + \alpha x)} \quad (\beta)$$

in welcher V mit u gleichbedeutend ist, P_0 den Normaldruck des Gases auf die Flächeneinheit, V_0 das Volumen eines Kilogramms Gas bei 0° , x die Temperatur des Gases in Centigrad, g die Beschleunigung der Schwere und α den Ausdehnungscoefficienten der Gase 0,003665 bezeichnet. Da somit $P_0 V_0 (1 + \alpha x)$ in der letzten Formel die gleiche Bedeutung hat wie $P v$ in der ersten, so setzt also Herr Schlemüller die Moleculargeschwindigkeit V doppelt so gross als Clausius, Joule u. A., nämlich $V = 2 u$, und hierauf bezieht sich der mit (5) bezeichnete Satz in dessen Briefe vom 18. December 1879.

Nach der Discussion der Formel (β) auf Seite 6 leitet Herr Schlemüller auf Seite 9 und 10 seiner Schrift das Gesetz der Temperaturabnahme wie folgt ab. Beginnt ein Molekel an der Erdoberfläche seinen Lauf, so wird es bei der vorausgesetzten Mannigfaltigkeit der Bewegungsrichtungen vielfach mit anderen Molekeln zusammenstossen; da aber alle vollkommen elastisch sind, so wechseln je zwei zusammenstossende Geschwindigkeit und Richtung aus, d. h. das erstere (untere) Molekel kehrt nach unten, das zweite (obere) nach oben zurück, so zwar dass das eine den Weg des anderen fortsetzt. Es ist desshalb erlaubt anzunehmen dass jedes Molekel gerade oder schief bis an die Grenze der Atmosphäre aufsteige. Hiebei verliert es nach mechanischen Gesetzen beständig an Geschwindigkeit in Folge der gegen den Erdmittelpunkt wirkenden Beschleunigung der Schwere. In der Geschwindigkeitshöhe wird die Ge-

schwindigkeit Null und das Teilchen beginnt seine Bewegung abwärts, wobei es in den Punkten seiner Bahn dieselben Geschwindigkeiten erlangt wie beim Aufsteigen.

Bedeutet nun V die ebenbezeichnete Moleculargeschwindigkeit in der Entfernung R vom Erdmittelpunkte, V_1 jene in dem Abstände $R + h$, und wird vorläufig die Beschleunigung der Schwere in R und $R + h$ als gleich angenommen, so muss die Gleichung statt finden:

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = h$$

Setzt man hierin für V und V_1 die der Formel (β) entsprechenden Werte und heisst die Temperatur an der Erdoberfläche $= \tau$ und in der Höhe $h = \tau_1$ so folgt

$$\tau - \tau_1 = \frac{h}{6 \alpha P_0 V_0} = ch \quad (\gamma)$$

wobei c für den reciproken Wert von $6 \alpha P_0 V_0$ geschrieben ist. Diese Gleichung besagt dass (ohne Rücksicht auf die Aenderung der Beschleunigung der Erdschwere) der Temperaturunterschied in zwei übereinanderliegenden Punkten der Atmosphäre deren Höhenunterschied proportional ist, und es führt diese Gleichung in Verbindung mit der

$$H = \frac{V^2}{2g} = 6\alpha P_0 V_0 T$$

und der Gleichheit von $\tau - \tau_1$ und $T - T_1$ sofort zu dem Gesetze

$$\frac{T_1}{T} = \frac{H_1}{H} \quad (\delta)$$

wenn T und T_1 die absoluten Temperaturen ($273 + \tau$) und ($273 + \tau_1$) an der Erdoberfläche und in der Höhe h , H die Höhe der Atmosphäre und H_1 den Höhenunterschied $H - h$ bezeichnet. Dieses Gesetz (δ) entspricht aber ganz

genau der in meinen Beobachtungen und Untersuchungen (Seite 110) aufgestellten Relation (59):

$$\frac{\Theta^1}{\Theta} = \frac{h^1}{h}$$

da $\Theta = T$, $\Theta^1 = T_1$, $h = H$ und $h_1 = H - h = H_1$ ist.

Die Ableitung der Formeln (γ) oder (δ) ist nach Aussage des mit (4) bezeichneten Satzes in vorstehendem Briefe das Hauptverdienst des Herrn Hauptmanns Schlemüller, weil er das was ich mit Anderen (darunter Lagrange, Laplace, Gauss, Bessel) bloss geglaubt haben soll, bewiesen hat: als ob in naturwissenschaftlichen Fragen, und namentlich wenn es sich um Naturgesetze oder deren genäherte Ausdrücke handelt, die systematisch verwerteten Beobachtungen nicht mindestens denselben Wert hätten als auf Hypothesen beruhende theoretische Ableitungen!

In dem ersten Abschnitte seiner Schrift (Seite 8) behauptet Herr Hauptmann Schlemüller auch dass man es bisher nicht verstanden habe den Höhenunterschied, für welchen die Temperatur um 1°C abnimmt, aus einer rationalen Formel zu entwickeln. Er zieht ferner aus seiner Formel (γ), indem er für P_0 den Normaldruck der Luft auf 1 □Meter (10328 Kilogr.) und für V_0 das Volumen trockener Luft (0,7732 Cbk.-Meter) setzt welches 1 Kilogramm wiegt, den fraglichen Höhenunterschied

$$h = 6 \alpha P_0 V_0 = 175,61^m$$

vergleicht dieses Resultat der Rechnung mit dem von ihm aus drei auf Beobachtungen gestützten Angaben (von Reich, Boussingault, Schlagintweit) gezogenen Mittel von 175^m und leitet aus der Uebereinstimmung beider Werthe ebenfalls einen Beweis für die Richtigkeit seiner Theorie her. Ohne mich hierüber in eine weitere Erörterung einzulassen, bemerke ich nur dass ich in Nr 64 Seite 117 meiner „Beobachtungen und Untersuchungen“ die Formel aufgestellt habe

$$z = 173,5 (1 + 0,069 \cos 2\psi)$$

wonach der Höhenunterschied z für 1°C bei 45° Breite gerade $173,5^m$ beträgt und für höhere Breiten etwas kleiner, für niedere etwas grösser wird; ein Ergebniss welches von der Folgerung des Herrn Schlemüller im Grunde nur durch den Factor $(1 + 0,069 \cos 2\psi)$ abweicht, welcher dort der Einheit gleich ist.

Zum zweiten Abschnitte der in Rede stehenden Schlemüllerschen Schrift, welcher von der Höhe der Atmosphäre handelt und diese gleich

$$H = 6 \alpha P_0 V_0 T = h T = 175,61 T$$

findet, will ich nur bemerken: erstens dass meine Formel (58) auf Seite 110 der Beobachtungen und Untersuchungen

$$H = \frac{z \cdot \Theta}{\Theta - \Theta^1} = 173,5 \Theta = 173,5 T$$

und für $T = 272,8 + 9,5$ (wobei $9,4^\circ\text{C}$ die Mitteltemperatur bei 45° Breite bedeutet) $H = 48980^m$, also einen von dem Schlemüller'schen kaum verschiedenen Werth liefert, und zweitens dass auch nach meinen Aufstellungen die Temperatur an der Grenze der Atmosphäre -273°C beträgt, entsprechend der Bedingung dass dort die Elasticität der Luft oder der Ausdruck $1 + at = 0$ sein muss.

Im dritten Abschnitte seiner Schrift behandelt Herr S. den Zusammenhang zwischen Höhenunterschied und Druck, und gelangt hiebei zu zwei Formeln für die barometrische Höhenmessung: die erste mit (z) bezeichnete (Seite 16) nimmt auf die Abnahme der Schwerebeschleunigung mit wachsender Höhe keine Rücksicht, die andere (μ) auf Seite 17 führt die angedeutete Veränderung in der Beschleunigung ein. Es liegt jedoch nicht in meiner Absicht mich hier auf eine nähere Discussion dieser Formeln einzulassen, obwohl es Herr S. nach dem Absatz (4) seines Briefs zu erwarten

scheint; mein dermaliges Interesse gilt bloss der in Absatz (7) des eben genannten Briefs erwähnten Relation

$$\left(\frac{p}{p_u}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{H-h}{H} = 1 - \frac{h}{H} \quad (\lambda)$$

welche vollständig mit meiner Formel 59 a (Seite 110 meiner Beobachtungen)

$$\left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{h'}{h} = \frac{h-z}{h} = 1 - \frac{z}{h} \quad (59^a)$$

übereinstimmt, da p in $(\lambda) = p'$ in (59^a) , p_u in $(\lambda) = p$ in (59^a) , H in $(\lambda) = h$ in (59^a) und h in $(\lambda) = z$ in (59^a) ist.

Im vierten Abschnitte (Seite 19 seiner Schrift) stellt Herr S. den Zusammenhang zwischen Temperatur und Druck durch die Gleichung dar

$$\frac{p_o}{p_u} = \left(\frac{1 + \alpha t_o}{1 + \alpha t_u}\right)^6 = \left(\frac{T_o}{T_u}\right)^6$$

welche besagt dass die Drücke in zwei verschiedenen hohen Punkten der Atmosphäre sich wie die sechsten Potenzen der absoluten Temperaturen verhalten. Genau dasselbe drückt aber meine schon oft angeführte Relation (59^a) aus welche in Bezug auf Temperatur und Druck lautet:

$$\frac{p'}{p} = \left(\frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t}\right)^6 = \left(\frac{\Theta'}{\Theta}\right)^6$$

und worin mit Rücksicht auf die vorausgehende Formel $p' = p_o$, $p = p_u$, $\Theta' = T_o$, $\Theta = T_u$ ist.

Ueber die Dichtigkeit der Luft in verschiedenen Höhen erstrecken sich die Betrachtungen des Herrn Haupt Schle Müller nicht; die Ausdrücke für die Dichtigkeit der Luft an zwei ungleich hoch gelegenen Punkten, die wir unten D_u und oben D_o nennen wollen, sind aber nur eine einfache mathematische Folge aus den bereits mitgetheilten Schle

müllerschen Gleichungen und bekannten physicalischen Gesetzen. Hienach ist nämlich

$$\frac{D_o}{D_u} = \frac{p_o (1 + \alpha t_u)}{p_u (1 + \alpha t_o)} = \left(\frac{T_o}{T_u} \right)^5$$

während meine Formel 59^a in Bezug auf Dichtigkeit und Temperatur die Gleichung enthält:

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{p' (1 + \alpha t)}{p (1 + \alpha t')} = \left(\frac{\Theta'}{\Theta} \right)^5$$

welche mit der vorstehenden aus den Entwicklungen des Herrn S. mit logischer Strenge folgenden vollständig übereinstimmt, da in der letzten Formel ϱ , ϱ' , Θ , Θ' genau dieselbe Bedeutung haben wie D_u , D_o , T_u , T_o in der ersten.

Fassen wir alle hier behandelten Fälle zusammen, so findet Herr Hauptmann Schlemüller auf Grund der dynamischen Gastheorie 1879 genau dieselben Relationen

$$\frac{T_o}{T_u} = \left(\frac{p_o}{p_u} \right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{D_o}{D_u} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{H'}{H}$$

welche ich schon 1862, also 17 Jahre früher, unter folgender Bezeichnung veröffentlicht habe:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \left(\frac{p'}{p} \right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{h'}{h}$$

Meine Aufstellungen beruhen zwar, wie schon erwähnt, auch auf theoretischen Entwicklungen, aber diese betreten nicht das Gebiet der Hypothesen, in dem sich die Grundformel des Herrn Hauptmann Schlemüller, nämlich die von ihm „richtig gestellte“ Moleculargeschwindigkeit V zur Zeit noch befindet. Ich musste die Constanten meiner Relationen aus zahlreichen und guten Beobachtungen ableiten, weil ich sie nicht aus einer hypothetischen Geschwindigkeitsformel ableiten wollte. Ich habe somit genau das Verfahren eingehalten welches man in den exacten Wissenschaften zu befolgen pflegt, wenn man das Gesetzmässige in vielfach beobachteten Erscheinungen aufsucht. Ueberdies sind meine

Relationen auch noch weiter an der Erfahrung geprüft worden, indem erstens die von mir aus der Relation

$$\frac{q'}{q} = \left(\frac{h'}{h}\right)^5 = \left(1 - \frac{x}{h}\right)^5 = (1 - y)^5$$

berechneten mittleren astronomischen Refractionen genau mit den von Bessel festgestellten beobachteten Werten derselben übereinstimmen (Astron. Nachrichten 1864, Bd 62, S. 235), und zweitens befolgt die von der Russischen Vermessungskammer am Kaukasus beobachtete Abnahme des Coefficienten der Strahlenberechnung genau das von mir bewiesene Gesetz, dass sich unter sonst gleichen Umständen die zwei ungleich hoch gelegenen Beobachtungsorten zukommenden Refractionscoefficienten nahezu wie die vierten Potenzen der über diesen Orten verbleibenden Atmosphärenhöhen verhalten (Astron. Nachrichten 1866, Bd 61, S. 88). Trotz aller dieser Uebereinstimmungen kam es mir aber doch nie in den Sinn meine „Aufstellungen über die physicalische Constitution der Atmosphäre“ für den genauen Ausdruck der in dieser wirksamen Naturgesetze auszugeben; ich hielt sie stets nur für der Wahrheit möglichst nahe kommende Ausdrücke, die aber allerdings in gewissen Fällen, wo die Abhängigkeit des Zustands der Atmosphäre von der Höhe des Orts nicht in aller Strenge bekannt zu sein braucht, wie z. B. bei der atmosphärischen Strahlenbrechung die Dichtigkeitsänderung, ein Naturgesetz vollständig vertreten können. Aus dieser Beschränkung meiner Aufstellungen und aus der Art ihres Beweises erklärt es sich wohl auch, warum dieselben Eingang in der wissenschaftlichen Welt und nirgends Widerspruch gefunden haben, was nach der eigenen Aussage des Herrn Hauptmann Schlemüller (in Absatz 4 seines Briefs) mit dessen Bearbeitung des gleichen Gegenstands auf Grund der dynamischen Gastheorie, obgleich die meisten Schlussergebnisse mit den meinigen übereinstimmen, nicht der Fall ist.
