Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber den sogenannten semidefiniten Fall in der Theorie der Maxima und Minima.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 18. Juni.*)

Die Entscheidung, ob eine Funktion

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

von n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ an einer Stelle:

1) $$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \ldots n,$$

welche den Gleichungen:

2) $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, 2 \ldots n$$

entspricht, ein wirkliches Maximum oder Minimum besitzt, hat nur in dem singulären Falle eine gewisse Schwierigkeit, falls die 2. Variation an der betreffenden Stelle:

3) $$\delta^2 f = \tfrac{1}{2} \overline{\underline{\sum^i \sum^\varkappa}}_1^n f_{i\varkappa}\, \delta x_i\, \delta x_\varkappa,$$

in der:

4) $$f_{i\varkappa} = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_\varkappa} \right|_{x_1 = a_1,\, x_2 = a_2 \ldots x_n = a_n},$$

semidefinit ist, d. i. falls die Gleichung

5) $$\begin{vmatrix} f_{11} - \varrho & f_{12} \cdots\cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \varrho \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} \cdots\cdots & f_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

r von null verschiedene Wurzeln gleichen Vorzeichens $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_r$ und $n - r$ Wurzeln:

6) $\varrho_{r+1} = \varrho_{r+2} = \ldots . = \varrho_{n-1} = \varrho_n = 0 \quad (0 \overline{\lessgtr} r \overline{<} n - 1)$

besitzt. Dieser singuläre Fall, in dem die Untersuchung der 2. Variation zur Entscheidung nicht mehr ausreicht, ist zum ersten Male in strenger Weise für den Fall zweier unabhängiger Variabeln von L. Scheeffer (Math. Ann. Bd. 35), für den allgemeinen Fall von n unabhängigen Variabeln von A. Mayer (Berichte der k. Sächs. Ges. d. Wiss. 1892), O. Stolz (Berichte der Wiener Akademie Bd. 99, 100, 102), v. Dantscher (Math. Ann. Bd. 51) behandelt worden. Ohne mich auf diese Arbeiten zu stützen, will ich im folgenden einen einfachen Weg angeben, um in dem genannten singulären Falle zu den nächsten Kriterien des Maximums resp. Minimums zu gelangen.

§ 1.

Wir wollen die ursprüngliche Definition des Maximums resp. Minimums zu grunde legen:

Eine Funktion von n unabhängigen Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

hat an der Stelle:

$$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

ein Maximum oder Minimum, falls eine positive, im übrigen beliebig kleine Grösse ε existiert, so, dass die Differenz

7) $\delta f \equiv f(a_1 + \delta x_1, a_2 + \delta x_2, \ldots a_n + \delta x_n) - f(a_1, a_2 \ldots a_n)$

für beliebige $\delta x_1 \, \delta x_2 \ldots \delta x_n$, die den Ungleichungen entsprechen:

8) $$- \varepsilon \overline{<} \delta x_i \overline{<} + \varepsilon, \; i = 1, 2 \ldots n$$

ein festes Zeichen hat, und zwar wird ein Maximum vorhanden sein, falls stets

$$\delta f < 0,$$

ein Minimum, falls stets

$$\delta f > 0$$

ist. Wir wollen dabei von der Funktion f stets voraussetzen, dass in den Intervallen 8) f mit allen seinen Ableitungen eindeutig und stetig und der Taylor'schen Entwickelung fähig sei, so dass:

9) $$\delta f = \delta^1 f + \delta^2 f + \delta^3 f + \delta^4 f + \ldots,$$

wenn wir mit

$$\delta^1 f, \ \delta^2 f, \ \delta^3 f, \ \delta^4 f \ldots$$

resp. die 1. 2. 3. 4.... Variation von f bezeichnen.

§ 2.

Wir betrachten den Fall, dass an einer Stelle:

$$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \ldots n,$$

welche den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

entspricht, die 2. Variation semidefinit ist, und untersuchen zunächst 2 Specialfälle:

1. Specialfall. Es ist identisch:

$$\delta^2 f \equiv 0,$$

dann ist bekanntlich für ein Maximum oder Minimum erforderderlich, dass identisch:

$$\delta^3 f \equiv 0,$$

und es wird dann sicher ein Maximum vorhanden sein, falls $\delta^4 f$ stets positiv, ein Minimum, falls $\delta^4 f$ stets negativ ist; für die 2. Singularität, dass $\delta^4 f$ zwar ein festes Zeichen hat, aber auch für nicht gleichzeitig verschwindende $\delta x_1 \, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ gleich null werden kann, ist zur Entscheidung eine weitere Untersuchung notwendig, während für den Fall, dass $\delta^4 f$ beliebig positiv oder negativ gemacht werden kann, sicher kein Maximum oder Minimum vorhanden ist.

2. Specialfall. Die 2. Variation ist von der Form:

10) $$\delta^2 f = \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{r}{}^{h} \varrho_h \, \delta x_h^2, \text{ [1] } \quad (1 \leq r \leqq n - 1),$$

so dass:

11) $$\delta f = \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{r}{}^{h} \varrho_h \, \delta x_h^2 + \delta^3 f + \delta^4 f + \dots .$$

Nennen wir ε_1 den absolut grössten Wert von

$$\delta x_1 \, \delta x_2 \dots \delta x_r,$$

ε_2 den absolut grössten Wert von

$$\delta x_{r+1}, \; \delta x_{r+2} \dots \delta x_n,$$

so werden offenbar die beiden Fälle:

I. $\varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1$

und II. $\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2$

alle möglichen Fälle umfassen.

In dem Falle I. muss δf das Zeichen der ϱ_h haben, so dass wir das Zeichen von δf nur noch für den Fall

12) $$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 < \varepsilon$$

zu untersuchen haben. Wir schreiben hierzu die Gleichung 11) in der Form:

13) $$\left\{ \begin{aligned} \delta f = {} & \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{r}{}^{h} \varrho_h \, \delta x_h^2 \\ & + \left| \delta f \right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \dots = \delta x_r = 0} \quad \text{[2]} \\ & + \sum_{1}^{r}{}^{h} \left| \delta \frac{\partial f}{\partial x_h} \right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \dots = \delta x_r = 0} \delta x_h \quad \text{[3]} \\ & + \text{Glieder 3. und höherer Ordnung, welche} \\ & \quad \delta x_1 \, \delta x_2 \dots \delta x_r \text{ von wenigstens zweiter} \\ & \quad \text{Ordnung enthalten,} \end{aligned} \right.$$

---

[1] Die ϱ_h sind hier von null verschiedene Koefficienten gleichen Vorzeichens.

[2] Wir sammeln in der 2. Zeile die Glieder nullter Ordnung in bezug auf $\delta x_1 \, \delta x_2 \dots \delta x_r$.

[3] Wir sammeln in der 3. Zeile die in bezug auf $\delta x_1 \, \delta x_2 \dots \delta x_r$ linearen Glieder.

oder:

$$
14)\quad \begin{cases} \delta f = \frac{1}{2}\sum_1^r{}^h \varrho_h \delta x_h^2 \quad (1+E) \\ \qquad + \left| \delta f \right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} \\ \qquad + \sum_1^r{}^h \left| \delta \frac{\partial f}{\partial x_h} \right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} \delta x_h \end{cases},
$$

wo wir von den in dem Ausdruck E zusammengefassten Gliedern aussagen können, dass:

$$
15)\qquad \text{abs. } E \lesseqgtr a \cdot \varepsilon_2,
$$

wenn wir unter a eine endliche Konstante verstehen.[1]) Wir können nun 14) folgendermassen schreiben:

$$
16)\quad \begin{cases} \delta f = \frac{1}{1+E}\left[\sum_1^r{}^h \frac{1}{2}\varrho_h \left(\delta x_h (1+E) + \frac{\left|\delta \frac{\partial f}{\partial x_h}\right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0}}{\varrho_h}\right)^2 \right. \\ \left. \quad + (1+E)\left|\delta f\right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} - \frac{1}{2}\sum_1^r{}^h \frac{\left|\delta \frac{\partial f}{\partial x_h}\right|^2_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0}}{\varrho_h}\right]. \end{cases}
$$

Die Gleichung 16) zeigt, dass

1. δf ein festes Zeichen und zwar das Zeichen der ϱ_h jedenfalls dann hat, wenn der Ausdruck:

$$
17)\qquad (1+E)[\delta f] - \frac{1}{2}\sum_1^r{}^h \frac{\left[\delta \frac{\partial f}{\partial x_h}\right]^2}{\varrho_h},
$$

---

[1]) Es ist nemlich:

$$
E = \frac{\text{Glieder der 4. Zeile in 13)}}{\frac{1}{2}\sum_1^r{}^h \varrho_h \delta x_h^2}
$$

$$
\text{abs. } E \lesseqgtr \varepsilon_2 \frac{\sum_1^r{}^h \delta x_h^2}{\frac{1}{2}\sum_1^r{}^h |\varrho_h| \delta x_h^2} \times \text{ endl. Const.},
$$

und der Bruch rechts hat ein endliches Maximum.

(wir wollen die Substitution

18) $$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0$$

durch Einschliessung in $[-]$ ausdrücken), das Zeichen der ϱ_h bei beliebigen $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ und genügend kleinem ε_2 besitzt; und dass

2. δf ein festes Zeichen jedenfalls dann nicht hat, falls man die $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots . \delta x_n$ so wählen kann, dass bei beliebigen $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_r$ (die nur der Bedingung 12) entsprechen) der Ausdruck 17) das entgegengesetzte Zeichen der ϱ_h erhält.

Der Ausdruck 17)[1]) kann nun — bei Berücksichtigung der Ungleichung 15) — ein festes Zeichen nur dann haben, wenn identisch:

19) $$[\delta^3 f] \equiv 0$$

ist, und der Ausdruck:

20) $$\left[\delta^4 f - \tfrac{1}{2}\sum_1^r{}^h \frac{\left(\delta^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2}{\varrho_h}\right]$$

ein festes Zeichen hat, und er wird in jedem Falle das Zeichen der ϱ_h haben, wenn die Identität 19) erfüllt ist und der Ausdruck 20) stets das Zeichen der ϱ_h hat. Wir sind somit bisher zu dem folgenden Resultat gelangt:

Es ist in unserem 2. Specialfalle für ein wirkliches Maximum oder Minimum notwendig, dass unter den Bedingungen:

21) $$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots . = \delta x_r = 0$$

die Identität:

22) $$\delta^3 f \equiv 0$$

---

[1]) Man kann denselben in der folgenden Form schreiben:

$$(1 + E)\,([\delta^3 f] + [\delta^4 f] + \ldots)$$
$$-\tfrac{1}{2}\sum_1^r{}^h \frac{1}{\varrho_h}\left[\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_h} + \delta^3 \frac{\partial f}{\partial x_h} + \ldots\right]^2.$$

stattfinde; es wird dann sicher ein Maximum resp. Minimum vorhanden sein, falls bei den Bedingungen 21) der Ausdruck:

$$23)\qquad \delta^4 f - \tfrac{1}{2}\sum_1^r{}^h \frac{1}{\varrho_h}\left(\delta^3 \frac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2$$

für beliebige $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ das Zeichen der ϱ_h hat; es wird sicher kein Maximum oder Minimum stattfinden, falls der Ausdruck 23) unter den Bedingungen 21) durch geeignete Wahl der $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ das entgegengesetzte Zeichen der ϱ_h erhalten kann; für den Fall, dass der Ausdruck 23) bei den Bedingungen 21) zwar ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann, ohne dass $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ gleichzeitig null sind, ist eine weitere Untersuchung notwendig.[1])

§ 3.

Man kann nun jede beliebige semidefinite 2. Variation

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^n{}^i \sum{}^\varkappa f_{i\varkappa}\, \delta x_i\, \delta x_\varkappa$$

durch die Jacobi'sche Transformation auf die Form:

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^r{}^h \varrho_h\, \delta y_h^2, \quad (0 \lesseqgtr r \lesseqgtr n-1)$$

bringen, also auf einen der beiden Specialfälle des vorigen Paragraphen zurückführen, indem man:

$$24)\qquad x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{in} y_n, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

setzt und die Konstanten $a_{i\varkappa}$ und ϱ_h durch die Gleichungen:

$$25)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_{11} a_{1h} + f_{21} a_{2h} + \ldots + f_{n1} a_{nh} = \varrho_h a_{1h}, \\ f_{12} a_{1h} + f_{22} a_{2h} + \ldots + f_{n2} a_{nh} = \varrho_h a_{2h}, \\ \text{— — — — — — — — — — — —} \\ f_{1n} a_{1h} + f_{2n} a_{2h} + \ldots + f_{nn} a_{nh} = \varrho_h a_{nh}, \end{array}\right. \qquad h = 1, 2 \ldots n$$

$$26)\qquad \sum_1^n{}^\varkappa a_{\varkappa h}^2 = 1$$

bestimmt.

---

[1]) Man vgl. hierzu v. Dantscher (Math. Ann. 51).

Zwischen den Variationen δx_i und δy_i bestehen dann die Relationen:

$$27)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta x_i = a_{i1}\,\delta y_1 + a_{i2}\,\delta y_2 + \ldots + a_{in}\,\delta y_n\,, \\ \delta y_i = a_{1i}\,\delta x_1 + a_{2i}\,\delta x_2 + \ldots + a_{ni}\,\delta x_n\,, \end{array}\right| \; i = 1, 2 \ldots n.$$

Wir können somit die Resultate des vorigen Paragraphen sofort auf den allgemeinen Fall übertragen:

Es ist im Falle einer semidefiniten 2. Variation für ein wirkliches Maximum oder Minimum notwendig, dass unter den Bedingungen:

$$28)\qquad \delta y_1 = \delta y_2 = \ldots . = \delta y_r = 0$$

die Identität:

$$29)\qquad \delta^3 f \equiv 0$$

stattfinde; es wird dann sicher ein Maximum resp. Minimum vorhanden sein, falls bei den Bedingungen 28) der Ausdruck:

$$30)\qquad \delta^4 f - \tfrac{1}{2} \sum_1^r{}^h \frac{1}{\varrho_h} \left(\delta^3 \frac{\partial f}{\partial y_h}\right)^2$$

für beliebige $\delta y_{r+1}\; \delta y_{r+2} \ldots \delta y_n$ das Zeichen der $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_r$ (resp. im Falle $r = 0$ ein festes Zeichen) hat; es wird sicher kein Maximum oder Minimum stattfinden, falls der Ausdruck 30) unter den Bedingungen 28) durch geeignete Wahl der $\delta y_{r+1}\; \delta y_{r+2} \ldots \delta y_n$ das entgegengesetzte Zeichen der $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_r$ erhalten kann (resp. im Falle $r = 0$ bald positiv bald negativ gemacht werden kann); für den Fall, dass der Ausdruck 30) bei den Bedingungen 28) zwar ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann, ohne dass $\delta y_{r+1}\; \delta y_{r+2} \ldots \delta y_n$ gleichzeitig null sind, ist eine weitere Untersuchung notwendig.

§ 4.

Die soeben gefundenen Kriterien setzen in der letztgenannten Form noch die Bekanntschaft mit der Jacobi'schen Transformation voraus; wir wollen uns nunmehr von dieser Voraussetzung befreien.

Zunächst sind, wie bekannt, die r Gleichungen 28) mit den n Gleichungen:

31) $$\sum_1^n{}^{\varkappa} f_{i\varkappa}\, \delta x_\varkappa = 0, \quad i = 1, 2 \,..\, n$$

äquivalent, von denen nur r von einander unabhängig sind. Es handelt sich daher lediglich noch darum, den Ausdruck 30) so umzuformen, dass er die Kenntnis der Jacobi'schen Transformation nicht erfordert.

Es ist nun:

$$\frac{\partial f}{\partial y_h} = \sum_1^n{}^{\varkappa} a_{\varkappa h} \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}, \quad h = 1, 2 \ldots n,$$

$$\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_h} = \sum_1^n{}^{\varkappa} a_{\varkappa h}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

$$\left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_h}\right)^2 = \overline{\underline{\sum{}^i \sum{}^{\varkappa}}}_1^n a_{ih}\, a_{\varkappa h}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

somit:

32) $$\sum_1^r{}^h \frac{1}{\varrho_h}\left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_h}\right)^2 = \overline{\underline{\sum{}^i \sum{}^{\varkappa}}}_1^n c_{i\varkappa}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

wo:

33) $$c_{i\varkappa} = \sum_1^r{}^h \frac{1}{\varrho_h} a_{ih}\, a_{\varkappa h}, \quad (i, \varkappa = 1, 2 \ldots n).$$

Diese $c_{i\varkappa}$ wollen wir in etwas anderer Form darstellen. Wir multiplicieren die Gleichungen 25) resp. mit $a_{1h}\, a_{2h} \ldots a_{nh}$ und addieren, dann folgt mit Rücksicht auf 26):

34) $$\overline{\underline{\sum{}^i \sum{}^{\varkappa}}}_1^n f_{i\varkappa}\, a_{ih}\, a_{\varkappa h} = \varrho_h, \quad h = 1, 2 \,..\, n.$$

Die ϱ_h sind Wurzeln der Determinantengleichung 5); denken wir uns dieselben aus jener Gleichung als Funktionen der $f_{i\varkappa}$ berechnet und differenzieren wir nach Substitution dieser Lösungen ϱ_h 34) nach $f_{i\varkappa}$, dann folgt:

35)[1] $$\left\{\begin{array}{ll|c} 2\,a_{ih}\,a_{\varkappa h} = \dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{i\varkappa}}, & i \neq \varkappa & i, \varkappa = 1, 2 \ldots n \\ a_{\varkappa h}^2 = \dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{\varkappa\varkappa}} & & h = 1, 2 \ldots r \end{array}\right.$$

Setzen wir nun die Werte 35) der $a_{i\varkappa}$ in 33) ein, so ergiebt sich:

36) $$\left\{\begin{array}{ll|c} c_{i\varkappa} = \frac{1}{2} \sum_1^r {}^h \dfrac{1}{\varrho_h} \dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{i\varkappa}}, & i \neq \varkappa & \\ c_{\varkappa\varkappa} = \sum_1^r {}^h \dfrac{1}{\varrho_h} \dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{\varkappa\varkappa}}, & & i, \varkappa = 1, 2 \ldots n, \end{array}\right.$$

oder:

37) $$\left\{\begin{array}{ll|c} c_{i\varkappa} = \dfrac{1}{2P} \dfrac{\partial P}{\partial f_{i\varkappa}}, & i \neq \varkappa & \\ c_{\varkappa\varkappa} = \dfrac{1}{P} \dfrac{\partial P}{\partial f_{\varkappa\varkappa}}, & & i, \varkappa = 1, 2 \ldots n, \end{array}\right.$$

wenn:

38) $$P = \varrho_1 \varrho_2 \cdot \cdot \varrho_r \,.$$

Es ist nun $(-1)^r P$ nichts anderes als der Koefficient a_r von ϱ^{n-r} in der nach Potenzen von ϱ geordneten Determinantengleichung 5):

39) $$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + a_2 \varrho^{n-2} + \ldots + a_r \varrho^{n-r} = 0 \,.$$

---

[1]) Wir haben zu berücksichtigen, dass ($\mu, \nu = 1, 2 \ldots n$; $h = 1, 2 \ldots r$):

$$\underline{\sum^i \sum^\varkappa}_{1}^{n} f_{i\varkappa} \frac{\partial a_{ih}}{\partial f_{\mu\nu}} a_{\varkappa h} = \sum_1^n {}^i \frac{\partial a_{ih}}{\partial f_{\mu\nu}} \sum_1^n {}^\varkappa f_{i\varkappa} a_{\varkappa h},$$

$$= \varrho_h \sum_1^n {}^i a_{ih} \frac{\partial a_{ih}}{\partial f_{\mu\nu}}, \text{ (nach 25))}$$

$$= 0, \text{ (nach 26))}$$

und analog:

$$\underline{\sum^i \sum^\varkappa}_{1}^{n} f_{i\varkappa} a_{ih} \frac{\partial a_{\varkappa h}}{\partial f_{\mu\nu}} = 0.$$

Wir können daher folgendes Endresultat aussprechen:

Ist die 2. Variation an einer Stelle

$$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \ldots n,$$

welche den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

entspricht, semidefinit, so dass in der Gleichung:

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + a_2 \varrho^{n-2} + \ldots . + a_{n-1} \varrho + a_n = 0,$$

welche die nach Potenzen von ϱ geordnete Relation:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \varrho & f_{21} & \ldots f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} - \varrho & \ldots f_{n2} \\ - & - & - \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots f_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

darstellt, die Koefficienten

$$a_{r+1}, \; a_{r+2}, \ldots a_n \quad (0 \leqq r \leqq n - 1)$$

verschwinden, während die Koefficienten:

$$(a_0 =) \, 1, \; a_1, \; a_2 \ldots a_r$$

entweder r Zeichenfolgen oder r Zeichenwechsel aufweisen, dann lauten die nächsten Kriterien für das Auftreten eines Maximums oder Minimums an der betrachteten Stelle:

Es ist für ein wirkliches Maximum oder Minimum notwendig, dass unter den Bedingungen:

A) $$\sum_1^n{}^{\varkappa} f_{i\varkappa} \, \delta x_\varkappa = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

(von diesen sind infolge der Semidefinitheit der 2. Variation nur r von einander unabhängig) die Identität:

B) $$\delta^3 f = 0$$

stattfinde; es wird dann sicher ein Maximum resp. Minimum vorhanden sein, falls bei den Bedingungen A) der Ausdruck:

$$\text{C)} \qquad \delta^4 f - \tfrac{1}{2} \overline{\sum^i \sum^\varkappa}_1^n c_{i\varkappa}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

in dem:

$$\text{D)} \qquad \begin{cases} c_{i\varkappa} = \dfrac{1}{2a_r} \dfrac{\partial a_r}{\partial f_{i\varkappa}}, \quad i \neq \varkappa & \Bigg| \; i, \varkappa = 1, 2 \, .. \, n \\ c_{\varkappa\varkappa} = \dfrac{1}{a_r} \dfrac{\partial a_r}{\partial f_{\varkappa\varkappa}} & \Bigg| \quad r = 0 \\ c_{i\varkappa} = 0, \; \big| \; i, \varkappa = 1, 2 \, .. \, n, \; r = 0, \end{cases}$$

das Zeichen von $(-a_1)$ [resp. im Falle $r = 0$ ein festes Zeichen] hat; es wird sicher kein Maximum oder Minimum stattfinden, falls der Ausdruck C) unter den Bedingungen A) durch geeignete Wahl der $\delta x_1\, \delta x_2 \, .. \, \delta x_n$ auch das Zeichen von $(+a_1)$ erhalten kann [resp. im Falle $r = 0$ bald positiv, bald negativ gemacht werden kann]; für den Fall, dass der Ausdruck C) bei den Bedingungen A) zwar ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann, ohne dass $\delta x_1\, \delta x_2 \, .. \, \delta x_n$ gleichzeitig null sind, ist eine weitere Untersuchung erforderlich.[1]) (Fall der 2. Singularität.)

[1]) Ich habe den obigen Satz zum ersten Male in einer Vorlesung über Variationsrechnung (München Winter 1896/97) ausgesprochen. Herr Prof. A. Mayer machte mich, als ich ihm den Beweis mitteilte, auf eine Lücke in demselben aufmerksam, die ich durch die obige Untersuchung ausgefüllt habe; ich hatte in meinem früheren Beweise die in dem Ausdruck E zusammengefassten Glieder in Formel 14) als für das Vorzeichen von δf belanglos fortgelassen; dass dies für die nächsten Kriterien der Fall ist, bedurfte des nunmehr hinzugefügten Beweises, und es ist zu bemerken, dass diese Glieder im Falle der 2. Singularität sehr wohl auf das Zeichen von δf von Einfluss sein können.