Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Theorie der Kreisverwandtschaften in der Ebene.

Von **Eduard von Weber.**

(*Eingelaufen 9. November.*)

Obwohl die Lehre von den ebenen Kreisverwandtschaften schon durch Möbius zu einem gewissen Abschluss gebracht wurde und auch in der Folge stets zu den meist umworbenen Gebieten der neuern Geometrie gehört hat, so bietet sich doch bei tieferem Eindringen in diese Theorie eine erstaunliche Fülle unerledigter Probleme. In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, die vorhandenen Lücken besonders nach zwei Richtungen hin auszufüllen.

Einer genaueren Untersuchung bedürftig erscheint vor allem die Frage, welche Gestalt die Theorie der Kreisverwandtschaften unter Heranziehung complexer Werte für beide unabhängige Variable annimmt. Bei der nahen Beziehung der Kreisverwandtschaften zu gewissen imaginären Gebilden (den beiden isotropen Geradenbündeln) wird in der That die principielle Berücksichtigung der complexen Punkte der Ebene besonders wichtig. Ihre volle Bedeutung erlangt diese Fragestellung freilich erst dann, wenn auch complexe Kreisverwandtschaften in Untersuchung gezogen werden; da wir uns aber fürs erste auf das Studium der reellen Kreisverwandtschaften beschränken wollen und jene allgemeineren Transformationen blos gelegentlich streifen, so möge das Folgende nur als eine Vorarbeit in der genannten Richtung betrachtet werden.

Eine zweite Art der Fragestellung, die übrigens mit der vorher genannten aufs Engste zusammenhängt, bietet sich dar, wenn man die von C. Segre[1]) und H. Wiener[2]) entwickelte Theorie der binären Projektivitäten vermöge eines bekannten von Möbius[3]) herrührenden Uebertragungsprincips kreisgeometrisch zu deuten sucht. In beiden Theorien stehen die Begriffe „Vertauschbarkeit" und „Orthogonalität" zweier Kreisverwandtschaften im Vordergrund des Interesses, und das Entsprechen der Sätze ist daher vielfach ein wörtliches. Da es aber zwei getrennte Kategorien von Kreisverwandtschaften der Ebene gibt und jene beiden Begriffe einen ganz verschiedenen geometrischen Inhalt haben, je nachdem die betreffenden Verwandtschaften derselben Klasse angehören oder nicht, so liefert unsere Uebertragung einen grossen Reichtum an Beziehungen, die bei der Beschränkung auf das binäre Wertgebiet nicht hervortreten können.

Auch bei dieser Gruppe von Sätzen müssen wir uns auf die Darlegung einiger Hauptgesichtspunkte beschränken.

I. Elementares über Kreisverwandtschaften.

In diesem Paragraph stellen wir zunächst die wichtigsten Sätze über Kreisverwandtschaften zusammen und knüpfen daran einige Folgerungen (Nr. 12 ff.), die zum Teil über Bekanntes hinausgehen dürften.

1. Wenn von einer ebenen KV[4]) drei Paare entsprechender Punkte $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$ gegeben sind, so findet man nach Möbius[5]) in folgender Weise zu einem beliebigen Punkt A_4 den entsprechenden A_4': Man setze in der Ebene einen positiven Drehsinn fest; dann ist der $\sphericalangle (K, K')$ zwischen zwei gerichteten

1) Journ. f. Math. 100 p. 317—330 (1887); vgl. auch Memorie della R. Acc. delle scienze di Torino, serie 2ª vol. 38 (1888) p. 2—24.

2) Leipz. Ber. 43 (1891) p. 646, Einschub I; ferner: „Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden". Hab.-Schrift, Darmstadt 1885.

3) Leipz. Ber. 4 (1852) p. 41—54 = Journ. f. Math. 52 (1856) = Werke II p. 189—204.

4) d. h. Kreisverwandtschaft.

5) Werke II p. 209 f.

Kurven K, K', die sich in einem Punkte P schneiden, eindeutig bestimmt als derjenige Winkel, um den man die gerichtete Tangente von K im Punkte P um diesen Punkt in der angenommenen positiven Richtung zu drehen hat, bis sie mit der gerichteten Tangente von K' im Punkte P zusammenfällt. Bezeichnet jetzt das Symbol PQR den durch die Punkte P, Q, R gehenden Kreis, genommen in der Richtung, die von P über Q nach R führt, so sind durch die Gleichungen

$$\sphericalangle(A_1A_2A_3,\ A_1A_2A_4) = \sphericalangle(A_1'A_2'A_3',\ A_1'A_2'A_4')$$
$$\sphericalangle(A_1A_2A_3,\ A_1A_3A_4) = \sphericalangle(A_1'A_2'A_3',\ A_1'A_3'A_4')$$

die Kreise $A_1'A_2'A_4'$, $A_1'A_3'A_4'$ und infolge dessen auch A_4' als Schnittpunkt derselben eindeutig bestimmt. Man erhält auf diesem Wege eine sog. direkte KV; eine indirekte KV ergibt sich, wenn man in den obigen Gleichungen die rechten Seiten mit -1 multiplicirt. Eine KV ist also eindeutig bestimmt durch 3 Paare entsprechender Punkte und die Angabe, ob sie direkt oder indirekt sein soll.

2. Ihren einfachsten analytischen Ausdruck finden die direkten bezw. indirekten KV bezw. durch die Formeln

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}; \tag{1}$$

$$z' = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \tag{2}$$

worin $z, z', \bar{z}$ bezw. für $x+iy$, $x'+iy'$, $x-iy$ geschrieben wurde, ferner x, y und x', y' rechtwinklige cartesische Coordinaten der reellen Punkte der Ebene, endlich $abcd$ irgend welche complexe Constanten bedeuten, deren Determinante $ad-bc$ nicht null ist. Die complexe Zahl z bezeichnen wir als das Affix des reellen Punktes x, y.

Versteht man unter dem Doppelverhältnis von 4 Punkten $A_1A_2A_3A_4$, deren Affixe bezw. $z_1z_2z_3z_4$ sind, die Grösse

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4},$$

so ergibt sich aus den obigen Transformationsformeln sogleich die fundamentale Eigenschaft, dass das Doppelverhältnis von 4 Punkten bei beliebiger KV invariant bleibt, bei beliebiger indirekter KV in seinen conjugirten Wert übergeht.

3. Das Doppelverhältnis von 4 Punkten $ABCD$ ist dann und nur dann reell, wenn sie cyclisch (d. h. auf einem Kreise) liegen; es ist dann und nur dann von der Form $e^{i\beta}$ (β reell), wenn sie orthocyclisch liegen, d. h. wenn durch A, B ein Kreis geht, der C von D harmonisch trennt;[1]) dann geht auch durch C und D ein Kreis, der A von B harmonisch trennt.

Liegen 4 Punkte sowohl cyclisch als orthocyclisch, ohne dass zwei derselben zusammenfallen, d. h. ist ihr Doppelverhältnis gleich -1, so heissen sie harmonisch. Man erhält zu 3 Punkten A, B, C den vierten harmonischen D als zweiten Schnittpunkt des Kreises ABC mit dem durch C gehenden Kreis des Büschels, das A und B zu Grenzpunkten hat, also mittels linearer Construktionen.[2])

4. Aus Nr. 1 ergibt sich die euklidische Construktion einer durch 3 Paare definirten KV; eine kreisgeometrische, die nur lineare Operationen verlangt, folgt unmittelbar aus dem von H. Wiener[3]) herrührenden Satze, dass man für eine binäre Projektivität, von der 3 Paare gegeben sind, zu jedem Punkt den entsprechenden lediglich durch wiederholte Construktion vierter harmonischer Punkte finden kann. Diese Methode überträgt sich ohne weiteres auf jede direkte KV in der Ebene; hat man solcherweise für die KV, die durch die Paare

(3) $$A_1 A_1', \quad A_2 A_2', \quad A_3 A_3'$$

---

1) Dies soll heissen, dass C und D hinsichtlich des Kreises invers sind.

2) Die linearen Construktionen der Kreisgeometrie sind 1) durch 3 Punkte einen Kreis zu legen; 2) von 2 Kreisen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, den zweiten Schnittpunkt zu bestimmen. Die quadratische Construktion ist die Lösung der Aufgabe, von 2 punktweise bekannten Kreisen die Schnittpunkte zu finden. Vgl. E. Study, Math. Ann. 49 p. 528.

3) Leipz. Ber. 43 (1891) p. 672.

definirt ist, zu A_4 den entsprechenden Punkt A_4' linear construirt, so entspricht der zu A_4' hinsichtlich des Kreises $A_1' A_2' A_3'$ inverse Punkt[1]) dem Punkte A_4 in der indirekten KV, die durch dieselben 3 Punktepaare (3) bestimmt wird.[2])

5. Wenn für eine KV, die durch (1) definirt ist, die Determinante $ad - bc = 0$ ist, und mit P und Q die Punkte mit den Affixen $\frac{a}{c}$ bezw. $\frac{-d}{c}$ bezeichnet werden, so ist jedes Punktepaar, das P als zweiten oder Q als ersten Punkt enthält, ein Paar entsprechender Punkte der Verwandtschaft. Diese heisst dann „singulär", die Punkte P, Q (die auch coincidiren können) ihre „singulären Punkte". Analoges gilt für die Formel (2); ein Unterschied zwischen direkter und indirekter KV findet bei verschwindender Determinante nicht mehr statt.

Singuläre Verwandtschaften bleiben im Folgenden, wo nichts anderes bemerkt wird, stets von der Betrachtung ausgeschlossen.

6. Jede direkte KV besitzt zwei verschiedene oder zusammenfallende reelle Fixpunkte, deren Affixe $z_1\, z_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0 \tag{4}$$

sind. Entsprechen sich in einer direkten KV irgend zwei Punkte involutorisch, so ist die Verwandtschaft selbst involutorisch; dazu ist die Bedingung $a + d = 0$ notwendig und hinreichend. Eine derartige KV werde eine „Möbiusinvolution"[3]) genannt; sie ist durch ihre Fixpunkte $M_1\, M_2$ eindeutig bestimmt und zwar derart, dass jedem Punkt A der zu ihm hinsichtlich $M_1\, M_2$ harmonische Punkt A' entspricht. Eine Möbiusinvolution ist ferner auch durch 2 Paare entsprechender

---

[1]) Die Construktion der Inversion an einem punktweise bekannten Kreis ist nach E. Study (Math. Ann. 49 p. 530) ebenfalls linear ausführbar.

[2]) Nach Nr. 26 ist diese indirekte zu jener direkten KV harmonisch.

[3]) A. F. Moebius, Leipz. Ber. 5 (1853) p. 176—190 = Werke II p. 219—236.

Punkte AA', BB' definirt; man findet dann zu jedem Punkte C folgendermassen[1]) den entsprechenden C': Ist D zu C hinsichtlich AA' harmonisch, ferner E zu C hinsichtlich BB', F zu D hinsichtlich BB', G zu E hinsichtlich AA' harmonisch, so ist C' zu C hinsichtlich F und G harmonisch. Einfacher ist folgende Construktion: Schneiden sich die Kreise ABC und $A'B'C$ zum zweitenmale in C_1, so schneiden sich die Kreise $AB'C_1$ und $BA'C_1$ zum zweitenmale in C'.

7. Diejenige Möbiusinvolution, die mit einer gegebenen direkten KV $\mathfrak{P}$ die Fixpunkte $M_1 M_2$ gemein hat, nennen wir die „Fixpunktsinvolution“ von $\mathfrak{P}$; sind A', A_0 die Punkte, die einem gegebenen Punkte A in $\mathfrak{P}$ bezw. in der inversen Transformation $\mathfrak{P}^{-1}$ entsprechen, und ist B zu A hinsichtlich A', A_0 harmonisch, so ist AB ein Paar der Fixpunktsinvolution.[2]) Diese Involution ist also linear construirbar, auch wenn die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ nicht bekannt sind.

8. Sind AA' zwei entsprechende Punkte der direkten KV $\mathfrak{P}$ mit den Fixpunkten $M_1 M_2$, so ist das Doppelverhältnis $(A A' M_1 M_2)$ constant, wie auch das Paar AA' gewählt sein mag; diese complexe Constante heisst die „Invariante“ von $\mathfrak{P}$. Sind $z_1 z_2$ die Affixe von $M_1 M_2$, so kann die Gleichung (1) in der Form:

$$\frac{z'-z_1}{z'-z_2} = \varkappa \frac{z-z_1}{z-z_2} \tag{5}$$ [3])

geschrieben werden, worin $1/\varkappa$ die Invariante von $\mathfrak{P}$ bedeutet; dabei hat $\varkappa$ den Wert:

$$\varkappa = \frac{1}{4}\left(a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}\right)^2, \tag{6}$$

wenn, wie in der Folge immer, $ad - bc = 1$ angenommen wird. Die Invariante einer Möbiusinvolution ist gleich -1. Genügen die direkten Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}$ der Beziehung:

---

[1]) H. Wiener, Leipz. Ber. 43 (1891) p. 670.

[2]) H. Schroeter, Journ. f. Math. 77 p. 120 f. (1874); H. Wiener a. a. O.

[3]) Vgl. auch Klein-Fricke, Vorl. über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd. I p. 163 ff. Leipzig 1890.

$$\mathfrak{P}' \mathfrak{P} \mathfrak{P}'^{-1} = \mathfrak{Q}.\,[1])$$

so sagen wir, „$\mathfrak{P}$ ist durch die direkte KV $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{Q}$ äquivalent" oder „$\mathfrak{P}'$ transformirt $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Q}$"; dann geht jedes Paar AA' von $\mathfrak{P}$ durch die Transformation $\mathfrak{P}'$ in ein Paar BB' entsprechender Punkte von $\mathfrak{Q}$ über, was wir mit H. Wiener so ausdrücken:

$$AA' \{\mathfrak{P}'\} BB'.$$

Aus der Thatsache, dass eine Transformation $\mathfrak{P}'$, die $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Q}$ transformirt, auch die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ in die von $\mathfrak{Q}$ überführt, schliesst man jetzt sofort: Damit zwei direkte KV durch eine direkte (bezw. indirekte) KV äquivalent seien, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Invarianten gleich oder reciprok (bezw. conjugirt oder conjugirt-reciprok) seien.

Erst in Nr. 34 werden wir für den Fall, dass diese Bedingung erfüllt ist, alle Transformationen bestimmen, die diese Ueberführung leisten.

9. Eine indirekte $KV(2)$ ist dann und nur dann involutorisch, wenn sie eine Inversion an einem reellen[2]) Kreis darstellt, d. h. wenn ihre Coefficienten der Bedingung

$$\frac{a}{c} = \frac{-\bar{d}}{\bar{c}}; \quad \frac{b}{c} \text{ reell}$$

genügen. Der betr. reelle Kreis ist dann durch die Gleichung

$$cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b = 0 \tag{7}$$

dargestellt.

Da eine gerade (bezw. ungerade) Zahl indirekter KV nacheinander ausgeübt stets eine direkte (bezw. indirekte) KV liefert, so ist das Produkt zweier Inversionen J_1 und J_2 eine

---

[1]) Unter dem Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ ist die Transformation zu verstehen, die erhalten wird, wenn man zuerst $\mathfrak{P}'$, dann $\mathfrak{P}$ ausführt.

[2]) Nach F. Klein nennen wir einen Kreis reell oder complex, je nachdem die Coefficienten seiner cartesischen Gleichung alle reell sind oder nicht; im ersten Fall heisst der Kreis „einteilig" oder „nullteilig", je nachdem er reelle Punkte enthält oder nicht.

direkte KV $\mathfrak{P}$, und zwar eine sog. „zweispiegelige" Verwandtschaft.[1]) Schneiden sich die beiden reellen Direktrixkreise der Inversionen $J_1 J_2$ (wir nennen sie kurz die Kreise $J_1 J_2$) in 2 reellen Punkten $M_1 M_2$, so sind diese die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$, und diese KV wird als „elliptische Transformation"[2]) bezeichnet; im entgegengesetzten Fall gibt es 2 reelle Punkte $M_1 M_2$, die hinsichtlich J_1 und J_2 gleichzeitig invers sind; diese sind die Fixpunkte der Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}$, die man jetzt eine „hyperbolische Transformation" nennt.

Die Kreise des Büschels (J_1, J_2) sind die **Niveaukreise**[3]) von $\mathfrak{P}$, d. h. sie gehen vermöge $\mathfrak{P}$ ineinander über; die Kreise des dazu adjungirten[4]) Büschels nennt man die **Bahnkreise**, da sie (und nur sie, falls $\mathfrak{P}$ keine Involution ist) vermöge $\mathfrak{P}$ einzeln invariant bleiben. Umgekehrt ist jede direkte KV, die einen einteiligen Kreis K festlässt, eine zweispiegelige KV die K als Bahnkreis besitzt.

10. Da jedes Paar einer hyperbolischen KV zu den Fixpunkten cyclisch, jedes Paar einer elliptischen KV zu den Fixpunkten orthocyclisch liegt, also die Zahl $\varkappa$ (Nr. 8) im ersten Fall reell ist, im zweiten den absoluten Betrag 1 besitzt, so schliesst man leicht: die Transformation (1) ist, wenn $ad - bc = 1$ angenommen wird, dann und nur dann elliptisch, wenn $a + d$ reell, $(a + d)^2 < 4$ ist; sie ist dann und nur dann hyperbolisch, wenn entweder $a + d$ reell, $(a + d)^2 > 4$ oder wenn $a + d$ rein imaginär ist. Eine direkte KV mit zusammenfallenden Fixpunkten ist durch die Bedingung $(a + d)^2 = 4$ charakterisirt; eine solche ist daher stets zweispiegelig; ihre Bahn- und Niveaukreise bilden je ein Berührungsbüschel.

---

[1]) Unter einer Spiegelung verstehen wir hier stets nur eine Inversion, nicht auch eine Möbiusinvolution, im Gegensatz zu der Bezeichnungsweise des Herrn Wiener, wonach jede direkte KV, als Produkt zweier Involutionen (Nr. 36), zweispiegelig heisst.

[2]) Klein-Fricke a. a. O.

[3]) Klein-Fricke a. a. O.

[4]) so sagen wir statt „conjugirt", da wir dieses Wort zu häufig in anderem Sinn gebrauchen müssen.

11. Aus der Thatsache, dass das Produkt dreier Inversionen dann und nur dann eine Inversion liefert, wenn die 3 Direktricen, oder wie wir kurz sagen wollen, die 3 Inversionen demselben Büschel angehören,[1]) schliesst man leicht, dass in der Gleichung

$$\mathfrak{P} = J_1 J_2 \text{ oder } J_1 \mathfrak{P} = J_2, \quad \mathfrak{P} J_2 = J_1$$

jeder der Faktoren J_1, J_2 innerhalb des Büschels (J_1, J_2) beliebig gewählt werden kann, worauf dann der andere eindeutig bestimmt ist; mit anderen Worten: Ergibt eine zweispiegelige KV mit einer Inversion J links oder rechts multiplicirt eine Inversion, so gehört J dem Büschel der Niveaukreise an und umgekehrt.

12. Damit die Inversionen J_1 und J_2 vertauschbar seien, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Direktricen sich rechtwinklig schneiden; ihr Produkt liefert in diesem Falle (und nur in diesem) eine Möbiusinvolution $\mathfrak{J}$; eine solche kann sowohl als elliptische wie als hyperbolische KV aufgefasst werden. Jeder Kreis, der die Fixpunkte derselben enthält oder harmonisch trennt, bleibt bei $\mathfrak{J}$ invariant, so dass der Unterschied zwischen Bahn- und Niveaukreisen verschwindet; wir wollen beide Kreissysteme als Bahnkreise von $\mathfrak{J}$ bezeichnen.

Es möge hier beiläufig die Aufgabe erledigt werden, alle Möbiusinvolutionen $\mathfrak{J}$ zu bestimmen, die 2 gegebene einteilige Kreise K, K' ineinander überführen. Sind $M_1 M_2$ die Fixpunkte einer solchen Transformation $\mathfrak{J}$ und $\varkappa$ der durch $M_1 M_2$ gehende zu K orthogonale einteilige Kreis, so steht $\varkappa$ auch auf K' senkrecht, da ja $\mathfrak{J}$ den Kreis K in K', den Kreis $\varkappa$ in sich überführt. Bezeichnet man also mit $\{\varkappa\}$ die Inversion an dem Kreise $\varkappa$, so ist $\mathfrak{J}$ gleich dem Produkte $\{\varkappa\}\{\lambda\}$, wo λ den in $M_1 M_2$ auf $\varkappa$ senkrecht stehenden einteiligen Kreis bezeichnet. Da nun die Inversion $\{\varkappa\}$ die Kreise K, K' invariant lässt, so muss $\{\lambda\}$ den Kreis K in K' transformiren, d. h. λ ist ein einteiliger Potenzkreis der beiden gegebenen. Die

[1]) H. Wiener, Leipz. Ber. 43 p. 669 (1891).

Möbiusinvolutionen, die die gegebenen Kreise K, K' ineinander überführen, haben also die Form $\{\varkappa\}\ \{\lambda\}$, wo $\varkappa$ einen beliebigen einteiligen Kreis des zu dem Büschel (K, K') adjungirten Büschels, λ einen einteiligen Potenzkreis von K und K' bedeutet. Gibt es zwei solche Potenzkreise λ, λ', d. h. schneiden sich K und K' reell, so gibt es auch 2 getrennte Scharen von Möbiusinvolutionen der verlangten Beschaffenheit; ihre Fixpunktepaare liegen bezw. auf λ und λ' harmonisch zu den Schnittpunkten von K und K'. Gibt es nur einen einteiligen Potenzkreis λ, so gibt es auch nur eine Schar von Möbiusinvolutionen, deren Fixpunkte auf λ harmonisch zu den Grenzpunkten des Büschels (K, K') gelegen sind.

13. Die Fixpunkte einer Möbiusinvolution $\mathfrak{J}$, die durch 2 Paare entsprechender Punkte AA', BB' definirt ist, werden folgendermassen construirt:

Man lege durch A und A' einen beliebigen Kreis K, und construire nach Nr. 6 den ihm entsprechenden Kreis K', sowie die beiden Potenzkreise p, p' von K und K', was ausser linearen nur eine quadratische Construktion[1]) erfordert; dann sind nach der vor. Nr. p, p' Bahnkreise von $\mathfrak{J}$. Legt man jetzt durch B und B' den zu p orthogonalen Kreis q', ferner den zu p' orthogonalen Kreis q, so schneiden sich entweder p und q oder p' und q' in 2 reellen Punkten, den gesuchten Fixpunkten; die Construktion erfordert sonach 2 quadratische Operationen.

14. Um die Fixpunkte einer beliebigen direkten KV zu bestimmen, construiren wir zuerst ihre Fixpunktsinvolution (Nr. 7), dann deren Fixpunkte nach dem soeben geschilderten Verfahren. Bei einer zweispiegeligen nichtinvolutorischen KV $\mathfrak{P}$ erfordert die Bestimmung der Fixpunkte $M_1 M_2$ ausser linearen Construktionen nur eine quadratische; denn wählt man die Punkte AB beliebig, und ermittelt $A'A''$ $B'B''$ nach der Vorschrift:

$$A\,\{\mathfrak{P}\}\,A'\,\{\mathfrak{P}\}\,A''; \quad B\,\{\mathfrak{P}\}\,B'\,\{\mathfrak{P}\}\,B'',$$

---

[1]) E. Study, Math. Ann. 49 p. 532.

so schneiden sich entweder die Kreise $A A' A''$ und $B B' B''$ in $M_1 M_2$, oder das durch sie bestimmte Büschel hat $M_1 M_2$ zu Grenzpunkten.

Kennt man von der direkten $KV\ \mathfrak{P}$ den einen Fixpunkt M_1, so ist der zweite als vierter harmonischer Punkt zu M_1 hinsichtlich eines beliebigen Paars der Fixpunktsinvolution linear construirbar.

15. Wird eine indirekte Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$, die keine Inversion ist, durch die Formel (2) dargestellt, worin wieder $a d - b c = 1$ gesetzt ist, so hat die direkte $KV \mathfrak{Q}^2$ die Form:[1])

$$z' = \frac{(a \bar{a} + b \bar{c}) z + (a \bar{b} + b \bar{d})}{(c \bar{a} + d \bar{c}) z + (c \bar{b} + d \bar{d})},$$

ist also nach Nr. 10, da ihre Determinante auch gleich 1 wird, zweispiegelig. Ihre Fixpunkte bleiben entweder bei $\mathfrak{Q}$ ebenfalls fest oder sie vertauschen sich gegenseitig; im ersten Fall bezeichnen wir sie als Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}$ selbst als „hyperbolisch"; im zweiten Fall als „Gegenpunkte" von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}$ selbst als „elliptisch"; ist $\mathfrak{Q}^2$ parabolisch, so nennen wir auch $\mathfrak{Q}$ eine parabolische Verwandtschaft.

Ist die indirekte $KV\ \mathfrak{Q}$ hyperbolisch, und bedeuten $M_1 M_2$ ihre Fixpunkte, ferner J die Inversion mit dem Centrum M_1, die den Punkt M_2 mit dem auf der Geraden $M_1 M_2$ zu wählenden Coordinatenanfangspunkt O vertauscht, so hat die indirekte $KV\ J \mathfrak{Q} J$ augenscheinlich die Form $z' = a \bar{z}$, wo a eine complexe Constante bedeutet, lässt also, wie man sofort durch Rechnung bestätigt, zwei senkrechte durch O gehende Gerade und sonst keine reellen Kreise oder Geraden invariant. Ist ferner $\mathfrak{Q}$ elliptisch, und bedeuten $M_1 M_2$ ihre Gegenpunkte, ferner J dieselbe Inversion wie vorhin, so hat die Kreisverwandtschaft $J \mathfrak{Q} J$ die Form $z' = a / \bar{z}$, lässt also einen einteiligen Kreis mit dem Centrum O und den zu ihm concentrischen und orthogonalen nullteiligen Kreis, ausserdem aber keine reellen Kreise oder Geraden stehen; daraus folgt:

---

[1]) Klein-Fricke a. a. O. p. 198 f.

Jede hyperbolische indirekte Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ besitzt zwei und nur zwei orthogonale einteilige Fixkreise, die sich in den Fixpunkten von $\mathfrak{Q}$ schneiden; jede elliptische indirekte $KV\mathfrak{Q}$ einen einteiligen und einen dazu orthogonalen nullteiligen Fixkreis, und die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$ sind die Grenzpunkte des durch diese 2 Kreise definirten Büschels. Die Kreise des letzteren werden durch $\mathfrak{Q}$ involutorisch vertauscht, so zwar, dass die Fixkreise die Potenzkreise eines jeden Paars entsprechender Kreise des Büschels sind; auch die Kreise des adjungirten Büschels werden durch $\mathfrak{Q}$ unter sich transformirt, doch so, dass ausser den im hyperbolischen Falle vorhandenen reellen Nullkreisen kein reeller Kreis des Büschels stehen bleibt. Auch ersieht man jetzt sofort, dass $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch oder elliptisch ist, je nachdem dies für die zweispiegelige Verwandtschaft $\mathfrak{Q}^2$ zutrifft, je nachdem also das Quadrat der reellen Zahl

$$a\bar{a} + d\bar{d} + b\bar{c} + c\bar{b}$$

grösser oder kleiner als 4 ist.[1]) Für eine parabolische KV ist der eine Fixkreis einteilig, der andere ein auf ihm liegender Punktkreis.

Die Ermittelung der Fix- bezw. Gegenpunkte einer durch 3 Paare gegebenen indirekten KV verlangt nach dem Vorigen ausser linearen Construktionen nur eine quadratische, dasselbe gilt für die Aufsuchung der Fixkreise, die mit den Potenzkreisen irgend zweier in $\mathfrak{Q}$ sich entsprechenden Bahnkreise von $\mathfrak{Q}^2$ identisch sind. Nur wenn $\mathfrak{Q}^2$ eine Möbiusinvolution ist, werden für die Ermittelung der Gegenpunkte zwei quadratische Construktionen nötig.

16. Ist $\mathfrak{Q}$ eine gegebene indirekte KV, und die Inversion J so gewählt, dass die direkte KV:

$$\mathfrak{P} = J\mathfrak{Q}$$

zweispiegelig wird, so muss es in dem Bahnkreisbüschel von $\mathfrak{P}$ einen reellen Kreis geben, der zu dem Kreis J orthogonal ist,

[1]) Klein-Fricke a. a. O.

also sowohl vermöge J als $\mathfrak{P}$, mithin auch durch $\mathfrak{Q}$ in sich übergeführt wird, d. h. der Kreis J muss zu einem der Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ orthogonal sein. Umgekehrt, ist dies der Fall, so lässt $J\mathfrak{Q}$ jenen Fixkreis invariant, ist also zweispiegelig; daraus folgt: Jede indirekte KV kann auf ∞^3 Arten als Produkt dreier Inversionen

$$\mathfrak{Q} = J J_1 J_2$$

dargestellt werden; J ist dabei ein beliebiger unter den ∞^3 reellen Kreisen, die zu dem einen oder anderen der beiden Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ orthogonal sind. Hat man J gewählt, so ist das Büschel (J_1, J_2) bestimmt und J_1 kann innerhalb desselben noch auf ∞^1 Arten angenommen werden, worauf J_2 eindeutig festgelegt ist.

Offenbar kann man jeden der 3 obigen Faktoren unter geeigneter Modification der übrigen an eine beliebige Stelle bringen; daraus folgt die Gleichberechtigung derselben, sowie die Thatsache, dass mit $J\mathfrak{Q}$ zugleich $\mathfrak{Q}J$ zweispiegelig ist, was übrigens auch unmittelbar aus der Beziehung

$$\mathfrak{Q}J = \mathfrak{Q}(J\mathfrak{Q})\mathfrak{Q}^{-1}$$

hervorgeht. Ist der Kreis J zu beiden Fixkreisen von $\mathfrak{Q}$ orthogonal, dann und nur dann ist $J\mathfrak{Q}$ und ebenso $\mathfrak{Q}J$ eine Möbiusinvolution, und $\mathfrak{Q}$ lässt sich also auf je ∞^1 Arten in jeder der Formen $J\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}J$ schreiben. Beiläufig folgt auch noch, dass jede direkte KV als Produkt von 4 Inversionen darstellbar ist, von denen e i n e ganz beliebig angenommen werden kann, ferner dass, wenn $\mathfrak{P}$ eine zweispiegelige KV, J die Inversion an einem ihrer Bahnkreise bedeutet, das Produkt $J\mathfrak{P}$ eine indirekte KV liefert, die jenen Bahnkreis und den dazu orthogonalen des Bahnkreisbüschels zu Fixkreisen hat.

Bedeutet J die Inversion an einem der Fixkreise von $\mathfrak{Q}$, so gilt die Beziehung $\mathfrak{Q}J = J\mathfrak{Q}$, d. h. J ist mit $\mathfrak{Q}$ vertauschbar; auch besitzen nur die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ diese Eigenschaft.

17. Jede hyperbolische indirekte KV Ω kann in der Form

$$\varkappa \frac{z'-\zeta_1}{z'-\zeta_2} = \frac{\bar{z}-\bar{\zeta}_1}{\bar{z}-\bar{\zeta}_2},$$

jede elliptische in der Gestalt

$$\varkappa \frac{z'-\zeta_1}{z'-\zeta_2} = \frac{\bar{z}-\bar{\zeta}_2}{\bar{z}-\bar{\zeta}_1}$$

geschrieben werden, wo $\varkappa$ eine complexe Constante und $\zeta_1\,\zeta_2$ das einemal die Fix-, das andremal die Gegenpunkte bedeuten. Daraus folgt leicht:

Sind $M_1\,M_2$ die Fixpunkte, $A\,A'$ ein beliebiges Paar entsprechender Punkte einer indirekten hyperbolischen KV, so hat das Doppelverhältnis $(M_1\,M_2\,A\,A')$ den constanten absoluten Betrag $|\varkappa|$. Sind $M_1\,M_2$ die Gegenpunkte, $A\,A'$ ein beliebiges Paar einer indirekten elliptischen KV, so hat jenes Doppelverhältnis eine constante Amplitude.[1])

Im hyperbolischen Falle ist die Zahl $|\varkappa|$ das Doppelverhältnis der binären Projektivität, welche die KV auf dem einen ihrer einteiligen Fixkreise definirt; auf dem anderen ist dies Doppelverhältnis dann $= -|\varkappa|$. Im elliptischen Falle ist ampl. $\varkappa$ das Doppelverhältnis, welches irgend zwei entsprechende auf dem einteiligen Fixkreis liegende Punkte mit den Gegenpunkten bilden.

Da eine indirekte KV durch Angabe eines Fixkreises und der darauf herrschenden Projektivität eindeutig bestimmt ist, so schliesst man, dass die Zahl $|\varkappa|$ (bezw. ampl. $\varkappa$) die einzige Invariante einer hyperbolischen (bezw. elliptischen) indirekten KV gegenüber beliebigen Kreisverwandtschaften ist, d. h. zwei indirekte KV sind dann und nur dann durch eine KV ineinander transformirbar, wenn ihre Invarianten übereinstimmen oder reziproke Werte haben.

---

[1]) Es ist ampl. $z = \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}$, wenn $z = \varrho\, e^{i\varphi}$.

18. Sind $ABCD$ vier gegebene Punkte, so ist der Ort aller Punkte D' derart, dass

$$|(ABCD)| = |(ABCD')|$$

der durch D gehende Kreis, der A von B harmonisch trennt; hieraus und aus dem oben Gesagten, sowie aus Nr. 8 folgert man leicht:

Sind AA', BB', M_1 gegebene Punkte, ferner N_1 der zweite Fixpunkt derjenigen direkten KV, die M_1 zum ersten Fixpunkt hat und A in A', B in B' verwandelt, und legt man durch N_1 die beiden Kreise, die A von A' und B von B' harmonisch trennen, so ist der zweite Schnittpunkt M_2 dieser Kreise der zweite Fixpunkt derjenigen indirekten hyperbolischen KV, die den ersten Fixpunkt M_1 und die Paare AA', BB' besitzt.

Da, wie wir später sehen werden, M_1 und N_1 sich in derjenigen Möbiusinvolution entsprechen, die A mit B' und B mit A' vertauscht, so folgt aus dem eben Gesagten eine einfache lineare Construktion des zweiten Fixpunkts einer indirekten KV, von der der eine Fixpunkt und 2 Paare gegeben sind. Aus der Bemerkung ferner, dass die genannten Punkte $M_1\, M_2$ auch die Gegenpunkte einer indirekten KV sind, die A in B' und B in A' überführt, fliesst eine einfache Construktion der indirekten KV, die zwei gegebene Paare entsprechender Punkte und einen vorgeschriebenen Gegenpunkt besitzt.

II. Punktfelder und complexe Kreise.

19. Die beiden Büschel von Minimalgeraden der Ebene sind definirt durch die Gleichungen

$$x + iy = \text{const. bezw. } x - iy = \text{const.}$$

Jede Minimalgerade enthält einen und nur einen reellen Punkt. Ist nun ein beliebiger complexer Punkt der Ebene gegeben, und bedeuten A, B die reellen Punkte der durch ihn gehenden Minimalgeraden des ersten bezw. zweiten Systems, so nennen wir mit É. Laguerre[1]) die Punkte AB die „reellen Repräsentanten" jenes complexen Punktes und bezeichnen den

[1]) Bull. Soc. Mat. 1 p. 241—248 (1873) und an vielen andern Orten.

letzteren mit $[AB]$; offenbar ist $[BA]$ der zu $[AB]$ conjugirt imaginäre Punkt, $[AA]$ der reelle Punkt A. Die Repräsentanten eines complexen Punktes mit den cartesischen Coordinaten ξ, η haben darnach in der complexen Zahlenebene die Affixe $\xi + i\eta$ und $\overline{\xi - i\eta}$;[1]) umgekehrt repräsentiren zwei reelle Punkte mit den Affixen z_1 und z_2 den complexen Punkt mit den cartesischen Coordinaten

$$\frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_2), \quad \frac{-i}{2}(z_1 - \bar{z}_2).$$

20. Die allgemeinste direkte complexe Kreisverwandtschaft wird definirt durch die Formeln:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \tilde{z}' = \frac{\alpha\tilde{z} + \beta}{\gamma\tilde{z} + \delta}, \tag{1}$$

die allgemeinste indirekte complexe KV durch die Gleichungen

$$z' = \frac{a\tilde{z} + b}{c\tilde{z} + d}, \quad \tilde{z}' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{2}$$

worin $z, z'\, \tilde{z}, \tilde{z}'$ bezw. die Bedeutung

$$x + iy, \quad x' + iy', \quad x - iy, \quad x' - iy'$$

haben und die x, y, x', y' nunmehr auch beliebige complexe Werte annehmen sollen; eine direkte (indirekte) KV verwandelt also jede Minimalgerade in eine Minimalgerade desselben (des andern) Systems.

Setzt man in (1) bezw. (2) für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werte $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, so erhält man die allgemeinste direkte bezw. indirekte reelle KV in einer Form, die sich auch auf die complexen Punkte der Ebene erstreckt; man erkennt jetzt unmittelbar folgendes: Transformirt eine reelle KV den reellen Punkt A in A', B in B', so verwandelt sie den complexen Punkt $[AB]$ in $[A'B']$ oder $[B'A']$, je nachdem sie direkt oder indirekt ist.

Den complexen Punkt $[A'B']$, der vermöge einer complexen KV dem Punkt $[AB]$ entspricht, findet man folgender-

[1]) $\bar{a}$ bedeutet den conj. imaginären Wert zu a.

massen: Ist die KV direkt, und bedeuten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ die direkten reellen Verwandtschaften, die bezw. durch die beiden Formeln (1) definirt werden, wenn man $\tilde{z}$, $\tilde{z}'$ durch $\bar{z}$, $\bar{z}'$ ersetzt, so gilt die Beziehung

$$A\,\{\mathfrak{P}\}\,A'; \; B\,\{\mathfrak{P}'\}\,B'.$$

Ist die KV dagegen indirekt, und bezeichnen jetzt $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ die beiden indirekten reellen KV (2), so hat man:

$$B\,\{\mathfrak{P}\}\,A', \; A\,\{\mathfrak{P}'\}\,B'.$$

21. Ist eine indirekte reelle Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \tag{3}$$

vorgelegt, so betrachten wir jedes Paar entsprechender Punkte derselben als die Repräsentanten eines complexen Punktes x, y; der Ort dieser ∞^2 complexen Punkte[1]) ergibt sich durch Elimination von z, z' aus der Gleichung (3) und den folgenden:

$$x + iy = z, \; x - iy = z'$$

in der Form:

$$\bar{c}\,(x^2 + y^2) + \bar{d}\,(x - iy) - \bar{a}\,(x + iy) - \bar{b} = 0, \tag{4}$$

ist also ein complexer Kreis,[2]) den wir einfach den „Kreis $\mathfrak{Q}$“ nennen wollen; er ist dann und nur dann reell, wenn $\mathfrak{Q}$ eine Inversion bedeutet; sein conjugirt complexer ist der Kreis $\mathfrak{Q}^{-1}$. Natürlich entspricht auch jedem complexen Kreis eine ganz bestimmte indirekte reelle KV.

22. Wollen wir für die direkten reellen KV eine analoge Interpretation gewinnen, so sind wir zur Heranziehung eines neuen geometrischen Begriffs[3]) genötigt. Die ∞^2 complexen

---

[1]) Die Bezeichnung ∞^ν bezieht sich im Folgenden stets auf die Anzahl ν der wesentlichen reellen Parameter eines Gebildes; es gibt also ∞^4 complexe Punkte der Ebene, ∞^6 reelle, ∞^{12} complexe KV etc.

[2]) Vgl. auch É. Laguerre a. a. O. p. 247.

[3]) Analoge Begriffsbildungen für die Zwecke der projektiven Geometrie finden sich schon bei C. Juel, Diss. Kopenhagen 1885, Acta Math. 14 p. 1—30, und C. Segre, Atti Acc. Torino t. 25 p. 276, 430; t. 26 p. 35, 592 (1889—91).

Punkte nämlich, die durch die Paare einer direkten reellen KV repräsentirt werden, genügen der Gleichung:

$$\overline{x - iy} = \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d}. \tag{5}$$

Sowie man nun die ∞^2 complexen Punkte, die durch eine Gleichung der Form

$$f(x, y) = 0 \text{ oder } \varphi(x + iy,\ x - iy) = 0$$

definirt werden, als eine „Curve" bezeichnet, ebenso nennen wir den Inbegriff aller complexen Punkte x, y, die einer Relation der Form

$$\varphi(x + iy,\ \overline{x - iy}) = 0$$

genügen, ein „Punktfeld", insbesondere ein circulares, wenn diese Gleichung die Form (5) hat; doch wollen wir der Kürze halber das Wort Punktfeld stets in diesem speziellen Sinne gebrauchen.

Jeder direkten reellen KV entspricht so ein ganz bestimmtes Punktfeld, und umgekehrt; der identischen Transformation insbesondere ist das Feld der reellen Punkte

$$\overline{x - iy} = x + iy$$

zugeordnet. Da das reelle Punktfeld genau ∞^6 Kreisverwandtschaften gestattet, nämlich alle reellen, so können die Punktfelder der Ebene, wie man leicht erkennt, auch definirt werden als der Inbegriff der ∞^6 Lagen, die das reelle Punktfeld bei beliebiger complexer KV annimmt.

Das Doppelverhältnis von 4 reellen Punkten der Ebene ist gleich demjenigen der 4 von ihnen auslaufenden Minimalstrahlen des ersten Systems, und gleich dem conjugirten Wert des Doppelverhältnisses der 4 durch sie gehenden Minimalgeraden des zweiten Systems. Demnach lässt sich die Eigenart der Punktfelder und complexen Kreise auch so aussprechen: Bezieht man die beiden Büschel von Minimalgeraden projektiv aufeinander, d. h. so, dass je 4 Strahlen des ersten Büschels dasselbe Doppelverhältnis haben wie die entsprechenden des zweiten, so schneiden sich entsprechende Strahlen, wie bekannt, in den Punkten eines complexen Kreises; bezieht man aber die zwei Büschel „conjugirt-projektiv", nämlich so, dass die Doppelverhältnisse entsprechender Quodrupel conjugirte Werte haben, so ist das Erzeugnis ein Punktfeld. Bemerken wir noch, dass das Doppelverhältnis von 4 Punkten $[A_i B_i]$ eines complexen Kreises gleich dem Doppelverhältnis der 4 reellen Punkte $A_1 A_2 A_3 A_4$ oder gleich dem conjugirten Wert des Doppelverhältnisses $(B_1 B_2 B_3 B_4)$ zu setzen ist.

Ein Punktfeld oder ein complexer Kreis artet dann und nur dann in ein Paar von Minimalgeraden aus, wenn die zugehörige KV singulär ist; die singulären Punkte der letzteren sind die reellen Punkte jener beiden Minimalgeraden.

23. Unter der „Inversion an dem complexen Kreis $\mathfrak{Q}$" verstehen wir diejenige involutorische indirekte KV, die alle Punkte des Kreises $\mathfrak{Q}$ einzeln fest lässt; sie hat die Form

$$z' = \frac{-\bar{d}\tilde{z} + \bar{b}}{\bar{c}\tilde{z} - \bar{a}}; \quad \tilde{z}' = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}},$$

wenn $\mathfrak{Q}$ selbst durch (3) definirt ist. Der dem Punkt $[AB]$ hinsichtlich des Kreises $\mathfrak{Q}$ inverse Punkt $[A'B']$ wird also nach der Vorschrift

$$A\{\mathfrak{Q}\}B'; \quad A'\{\mathfrak{Q}\}B$$

gefunden; einem reellen Punkte A entspricht demnach derjenige complexe, dessen Repräsentanten dem A rückwärts bezw. vorwärts entsprechen, mit andern Worten: das reelle Punktfeld verwandelt sich durch Spiegelung an dem complexen Kreise $\mathfrak{Q}$ in das Punktfeld $\mathfrak{Q}^2$. Ist $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch, so bleiben bei der Inversion an $\mathfrak{Q}$ zwei reelle Punkte fest, nämlich die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$; ist $\mathfrak{Q}$ elliptisch, so gibt es zwei reelle Punkte, die sich vermöge jener Inversion entsprechen: die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$.

Sind die Punkte M, N' durch die Angaben

$$\infty\{\mathfrak{Q}\}N', \quad M\{\mathfrak{Q}\}\infty$$

definirt, so ist der Punkt $[MN']$ der inverse zu dem Punkte ∞, d. h. also das Centrum des Kreises $\mathfrak{Q}$, und man bestätigt leicht,[1]) dass sein Abstand von allen Punkten des Kreises constant ist.

Von der „Spiegelung an einem Punktfeld“, die der Inversion an einem complexen Kreise analog ist, soll in § IV die Rede sein.

24. Sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei Punktfelder oder zwei complexe Kreise, also die Kreisverwandtschaften

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}^{-1}; \; \mathfrak{R}' = \mathfrak{Q}^{-1}\,\mathfrak{P}$$

beide direkt, bezeichnen wir ferner mit AB bezw. $A'B'$ die Fixpunkte von $\mathfrak{R}$ bezw. $\mathfrak{R}'$, so hat man

$$(6) \qquad AB\,\{\mathfrak{P}\}\,A'B'; \;\; AB\,\{\mathfrak{Q}\}\,A'B',$$

und es sind AA' und BB' die einzigen Paare entsprechender Punkte, die den beiden gegebenen Verwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ gemeinsam sind, also $[AA']$ und $[BB']$ die Schnittpunkte der gegebenen Punktfelder bezw. Kreise. Sind ferner $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ zwei Punktfelder, so entspricht dem Punkte $[AB]$ bezw. $[BA]$ sowohl in $\mathfrak{P}$ als auch in $\mathfrak{Q}$ der Punkt $[A'B']$ bezw. $[B'A']$ und es sind dies die einzigen complexen Punkte, die durch $\mathfrak{P}$ auf gleiche Art transformirt werden wie durch $\mathfrak{Q}$. Bedeuten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ complexe Kreise, so gilt analoges, nur dass jetzt $[AB]$ sowohl durch $\mathfrak{P}$ als durch $\mathfrak{Q}$ in $[B'A']$ und ebenso $[BA]$ in $[A'B']$ übergeführt wird.

Ist $\mathfrak{R}$ und infolgedessen auch $\mathfrak{R}'$ parabolisch, also A mit B und A' mit B' identisch, so sagen wir, die Punktfelder bezw. Kreise $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ berühren sich im Punkte $[AA']$.

25. Es bedeute jetzt $\mathfrak{P}$ ein Punktfeld, $\mathfrak{Q}$ einen complexen Kreis; dann sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ indirekte KV, und zwar beide hyperbolisch oder beide elliptisch; von dem Fall, dass sie Inversionen darstellen, wollen wir vorläufig absehen.

Sind die Verwandtschaften $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ hyperbolisch, so gilt für ihre Fixpunkte AB bezw. $A'B'$ wieder die Beziehung (6), also schneidet das Punktfeld $\mathfrak{P}$ den Kreis $\mathfrak{Q}$ in zwei Punkten

[1]) É. Laguerre a. a. O. p. 247.

$[AA']$ und $[BB']$, d. h. AA', BB' sind die gemeinsamen Paare von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Dagegen gibt es jetzt kein Paar complexer Punkte, die sich sowohl in $\mathfrak{P}$ als in $\mathfrak{Q}$ entsprächen.

Sind $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ elliptisch, und AB, $A'B'$ ihre Gegenpunkte, so sind AA' und BB' Paare von $\mathfrak{P}$, AB' und BA' Paare von $\mathfrak{Q}$ und es gibt keine andern vier Punkte dieser Eigenschaft. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ haben jetzt kein reelles Punktepaar gemeinsam, und das Punktfeld schneidet den Kreis überhaupt nicht. Dagegen existiren nunmehr zwei complexe Punkte $[AB]$, $[BA]$, die von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in derselben Weise, nämlich in $[A'B']$ bezw. $[B'A']$ transformirt werden.

Für den Fall, dass $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ parabolisch, also A mit A' und B mit B' identisch sind, sagen wir wiederum: das Punktfeld $\mathfrak{P}$ berührt den Kreis $\mathfrak{Q}$ im Punkte $[AA']$.

Versteht man im Vorigen unter $\mathfrak{P}$ das reelle Punktfeld, so entspringt die schon aus Nr. 15 bekannte Thatsache: Der Kreis $\mathfrak{Q}$ enthält, jenachdem $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch oder elliptisch ist, zwei reelle Punkte (die Fixpunkte) oder zwei conjugirt imaginäre Punkte, die durch die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$ repräsentirt werden.

26. Besitzt die eine der Transformationen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ der Nr. 24 und infolgedessen auch die andere die Periode zwei, so nennen wir die Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ und ebenso die zugeordneten Punktfelder resp. Kreise „orthogonal" oder „harmonisch[1]"; z. B. werden die Möbiusinvolutionen und die Inversionen aus der Gesamtheit der reellen KV dadurch ausgeschieden, dass sie zu dem reellen Punktfeld harmonisch liegen sollen. Die harmonische Beziehung soll uns in § IV ausführlich beschäftigen; hier betrachten wir nur den Fall, dass $\mathfrak{P}$ ein Punktfeld, $\mathfrak{Q}$ einen Kreis, also $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ Inversionen bedeuten. Sind die Kreise der letzteren, die wir mit K, K' bezeichnen, beide einteilig, und ABC.. Punkte der Peripherie von K, ferner $A'B'C'$.. die ihnen vermöge $\mathfrak{P}$ entsprechenden Punkte, so liegen die letzteren auf K' und es sind AA', BB'.. auch Paare von $\mathfrak{Q}$. Die Peripherien von K und K' werden also

[1]) Nach H. Wiener, Lpz. Ber. 42 (1890) p. 262.

durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in derselben Weise projektiv bezogen; diese KV haben sonach ∞^1 Paare reeller entsprechender Punkte gemein, mit andern Worten: das Punktfeld $\mathfrak{P}$ schneidet den Kreis $\mathfrak{Q}$ in ∞^1 complexen Punkten. Die von letzteren gebildete Mannigfaltigkeit bezeichnet man passend als eine „Kreisspur"; eine solche entsteht aus den ∞^1 reellen Punkten eines einteiligen Kreises durch beliebige complexe KV.

Sind die Kreise der Inversionen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ nullteilig, so hat das Punktfeld $\mathfrak{P}$ mit dem Kreis $\mathfrak{Q}$ keinen Punkt gemein.

Bedeuten A, B zugeordnete Punkte der Inversion $\mathfrak{R}$, ferner $A'B'$ die ihnen in $\mathfrak{P}$ entsprechenden Punkte, so hat man

$$AB\,\{\mathfrak{Q}\}\,B'A',$$

und $A'B'$ ist ein Paar der Inversion $\mathfrak{R}'$, also wird der complexe Punkt $[AB]$ sowohl durch $\mathfrak{P}$ als durch $\mathfrak{Q}$ in den Punkt $[A'B']$ übergeführt. Die reellen Kreise K, K' sind demnach so aufeinander bezogen, dass nicht nur ihre etwaigen reellen, sondern auch ihre ∞^2 complexen Punkte sich vermöge $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in derselben Weise entsprechen, und man erhält auf diese Weise offenbar auch alle Paare entsprechender complexer Punkte, die den Verwandtschaften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gemeinsam sind. Sind die Kreise K, K' identisch, so bleibt K vermöge $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ invariant, $\mathfrak{P}$ ist also zweispiegelig, K ein Bahnkreis von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{R}$.

III. Vertauschbarkeit und Inversibilität der Kreisverwandtschaften.

27. Die reellen Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ heissen vertauschbar, wenn sie der Gleichung

(1) $$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q} \text{ oder } \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}\mathfrak{P}$$

genügen; wir sagen ferner, $\mathfrak{Q}$ ist durch $\mathfrak{P}$ „inversibel" oder „$\mathfrak{P}$ invertirt $\mathfrak{Q}$", wenn die Beziehung

(2) $$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q}^{-1}$$

gilt. Ist $\mathfrak{P}$ eine direkte KV, so führt sie das Punktfeld (bezw. den Kreis) $\mathfrak{Q}$ unter der ersten Annahme in sich, unter der zweiten in das conjugirte Gebilde über; ist dagegen $\mathfrak{P}$ indirekt, so findet das Umgekehrte statt. Ein Punktfeld (oder Kreis) $\mathfrak{Q}$ gestattet also dann und nur dann die indirekte Transformation $\mathfrak{P}$, wenn $\mathfrak{Q}$ durch $\mathfrak{P}$ inversibel ist.

Im vorigen Paragraphen haben wir die Wirkung reeller Kreisverwandtschaften auf complexe Punkte untersucht; hier soll ihre Wirkung auf complexe Kreise und Punktfelder studirt werden, d. h. wir bestimmen erstens alle Kreisverwandtschaften, die ein gegebenes Punktfeld oder einen complexen Kreis invariant lassen, bezw. in das conjugirte Gebilde überführen, zweitens alle Punktfelder und complexen Kreise, die bei einer gegebenen KV invariant bleiben oder in das conjugirte Gebilde übergehen. Dazu brauchen wir nur alle Fälle aufzuzählen, in der die Relation (1) oder (2) stattfindet.

28. Soll $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sein, so muss $\mathfrak{P}$ jedes Paar entsprechender Punkte von $\mathfrak{Q}$ wieder in ein solches Paar überführen. Ist nun $\mathfrak{P}$ eine direkte KV, $\mathfrak{Q}$ eine indirekte hyperbolische KV, so muss $\mathfrak{P}$ die Fixkreise π, π' und ebenso die Fixpunkte $M_1 M_2$ von $\mathfrak{Q}$ entweder vertauschen oder festlassen. Bedeutet jetzt AA' ein auf π liegendes Paar von $\mathfrak{Q}$ und hat man $AA' \{\mathfrak{P}\} BB'$, so liegen, wenn $\mathfrak{P}$ die Fixkreise $\pi\pi'$ vertauscht, die Punkte BB' auf dem Kreise π'. Blieben nun die Punkte $M_1 M_2$ bei $\mathfrak{P}$ fest, so wären die reellen Doppelverhältnisse

$$(3) \qquad (AA' M_1 M_2), \ (BB' M_1 M_2)$$

nach Nr. 17 sowohl gleich als entgegengesetzt, was nicht möglich ist. Würden andererseits M_1 und M_2 durch $\mathfrak{P}$ vertauscht, so wären jene Doppelverhältnisse sowohl reciprok als entgegengesetzt, was ebenfalls nicht stattfinden kann. Also muss $\mathfrak{P}$ die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$, aber auch die Fixpunkte $M_1 M_2$ stehen lassen; denn andernfalls wären die Doppelverhältnisse (3) gleich und reciprok, also harmonisch, d. h. $\mathfrak{Q}$ wäre eine Inversion. Umgekehrt, lässt $\mathfrak{P}$ die Fixkreise und Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ in Ruhe, so führt sie $\mathfrak{Q}$ in sich über.

Ist $\mathfrak{Q}$ eine indirekte elliptische KV, so weiss man von vorneherein, dass $\mathfrak{P}$ den einteiligen Fixkreis π von $\mathfrak{Q}$ festlassen muss, und erkennt ähnlich wie oben, dass auch die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$ bei $\mathfrak{P}$ festbleiben, da $\mathfrak{Q}$ andernfalls eine Inversion wäre. Also findet man schliesslich: Die direkten KV, die eine allgemeine indirekte Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ in sich überführen, bilden eine eingliedrige Gruppe[1]) zweispiegeliger Verwandtschaften, deren Bahnkreisbüschel die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ enthält.

29. Sollen die indirekten Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sein, so muss $\mathfrak{P}'$, falls $\mathfrak{Q}$ zwei einteilige Fixkreise π, π', also reelle Fixpunkte $M_1 M_2$ besitzt, diese Kreise vertauschen oder festlassen. Ersteres ist aber ausgeschlossen; denn sind $A A'$ wieder entsprechende auf π gelegene Punkte von $\mathfrak{Q}$ und hätte man

$$A A' M_1 M_2 \{\mathfrak{P}'\} B B' M_1 M_2 \text{ oder } A A' M_1 M_2 \{\mathfrak{P}'\} B B' M_2 M_1,$$

so dass B und B' auf π' liegen, so gäbe es auch eine direkte KV, die dasselbe leisten, also $\mathfrak{Q}$ ebenfalls in sich überführen würde, was nach der vorigen Nr. nicht möglich ist. Darnach hat $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{Q}$ die Fixkreise gemein, entsteht also aus einer Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}$ der oben definirten eingliedrigen Gruppe durch Multiplikation mit der Inversion J bezw. J', die π bezw. π' zur Direktrix hat. Da aber das Produkt JJ' oder $J'J$ selbst jener eingliedrigen Gruppe angehört, ferner J und J' mit allen Transformationen derselben vertauschbar sind, so lassen sich die indirekten KV, die $\mathfrak{Q}$ in sich überführen, auf jede der 4 Arten

$$(4) \qquad J\mathfrak{P},\ J'\mathfrak{P},\ \mathfrak{P}J,\ \mathfrak{P}J'$$

schreiben, worin $\mathfrak{P}$ die ∞^1 Transformationen jener eingliedrigen Gruppe durchläuft, und ganz dasselbe gilt offenbar auch für den Fall, dass π' nullteilig, also $\mathfrak{Q}$ elliptisch ist. Natürlich ist $\mathfrak{Q}$ selbst in der Schaar (4) enthalten.

J und J' sind offenbar die einzigen Inversionen, die $\mathfrak{Q}$ in sich überführen; man kann daher die Fixkreise einer indirekten

---

[1]) Vgl. hierüber Klein-Fricke a. a. O.

$KV\ \mathfrak{Q}$ auch als die Potenzkreise der complexen Kreise $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^{-1}$ bezeichnen.

30. Die Annahme, dass $\mathfrak{Q}$ eine Inversion bedeutet, erledigt sich sehr einfach; es genügt, das Resultat auszusprechen: Die direkten KV, die mit der Inversion $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sind, bilden eine dreigliedrige Gruppe, bestehend aus allen elliptischen Transformationen, deren Fixpunkte hinsichtlich $\mathfrak{Q}$ invers sind; ist $\mathfrak{Q}$ einteilig, so gibt es noch eine zweite dreigliedrige Gruppe dieser Art, bestehend aus den hyperbolischen Transformationen, deren Fixpunkte auf dem Kreis $\mathfrak{Q}$ liegen. Die indirekten mit $\mathfrak{Q}$ vertauschbaren Transformationen entstehen aus den genannten durch vorherige oder nachherige Multiplikation mit $\mathfrak{Q}$.

31. Da die Vertauschbarkeit zweier KV eine reciproke Beziehung ist, so haben wir durch die Entwickelungen der Nr. 28 gleichzeitig die Aufgabe erledigt, alle indirekten Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, die mit einer direkten $KV\ \mathfrak{Q}$ vertauschbar sind: Gilt die Relation (1) und bedeutet $\mathfrak{Q}$ eine direkte, $\mathfrak{P}$ eine indirekte KV, so ist 1) entweder $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch, $\mathfrak{P}$ eine hyperbolische indirekte KV, die mit $\mathfrak{Q}$ die Fixpunkte gemein hat, oder eine Inversion, deren einteilige Direktrix die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ enthält, oder 2) $\mathfrak{Q}$ ist eine elliptische direkte, $\mathfrak{P}$ eine elliptische indirekte KV, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ zu Gegenpunkten hat, im Speziellen eine Inversion, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ vertauscht.

Eine Möbiusinvolution ist darnach mit allen indirekten KV vertauschbar, die ihre Fixpunkte zu Gegenpunkten oder zu Fixpunkten haben.

32. Auch der noch übrige Fall zweier vertauschbarer direkter KV erledigt sich aufs leichteste:[1] Zwei direkte KV sind dann und nur dann vertauschbar, wenn sie entweder die Fixpunkte gemein haben, oder wenn sie Möbiusinvolutionen sind, von denen jede die Fixpunkte der andern vertauscht.[2]

---

[1] C. Segre, Journ. f. Math. 100 p. 317—330.

[2] Zwei solche Involutionen sind nach Nr. 36 harmonisch; ihre Fixpunkte liegen ebenfalls harmonisch.

Die Theorie der vertauschbaren KV ist damit vollständig erledigt.

33. Etwas umständlicher ist die Diskussion der Gleichung (2); wir begnügen uns das Resultat mitzuteilen. Damit die Relation

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q}^{-1} \tag{2}$$

stattfinde, ist notwendig und hinreichend, dass einer der folgenden Fälle realisirt sei:

1) $\mathfrak{Q}$ ist eine direkte KV, $\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ vertauscht.

2) $\mathfrak{Q}$ ist eine direkte elliptische KV, $\mathfrak{P}$ eine indirekte KV, die mit $\mathfrak{Q}$ die Fixpunkte gemein hat, z. B. eine Inversion, deren Direktrix die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ enthält.

3) $\mathfrak{Q}$ ist eine direkte hyperbolische KV, $\mathfrak{P}$ eine indirekte KV, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ zu Gegenpunkten hat, z. B. eine Inversion, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ vertauscht.

4) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Fixpunkten $M_1 M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution, deren Fixpunkte harmonisch zu $M_1 M_2$ auf dem einen oder andern Fixkreis von $\mathfrak{Q}$ liegen.

5) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Fixpunkten $M_1 M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Inversion, die M_1 und M_2 vertauscht.

6) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Gegenpunkten $M_1 M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution, deren Fixpunkte harmonisch zu $M_1 M_2$ auf dem einteiligen Fixkreis von $\mathfrak{Q}$ liegen.

7) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Gegenpunkten $M_1 M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Inversion an einem durch $M_1 M_2$ gehenden einteiligen Kreise.

Der Fall, dass $\mathfrak{Q}$ eine Inversion oder Möbiusinvolution bedeutet, ist bei dieser Aufzählung nicht berücksichtigt, da unter dieser Annahme die Gleichung (2) mit (1) identisch wird.

34. Die vollständige Beantwortung der beiden in Nr. 27 aufgeworfenen Fragen ergibt sich aus den Nrn. 28—33 durch leichte Veränderung des Wortlauts; wir wollen in dieser Richtung nur noch folgende Thatsachen hervorheben, die sich übrigens leicht auch unmittelbar verificiren lassen: Bei einer

allgemeinen direkten KV bleiben überhaupt keine reellen oder complexen Kreise invariant, bei einer hyperbolischen bezw. elliptischen direkten $KV\ \mathfrak{P}$ nur diejenigen ∞^2 Kreise, die die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ zu Fix- bezw. Gegenpunkten haben, bei einer indirekten KV, die keine Inversion ist, nur deren reelle Fixkreise, endlich bei einer Inversion $\mathfrak{P}$ alle Kreise, deren Fixpunkte auf dem Kreise $\mathfrak{P}$, oder deren Gegenpunkte hinsichtlich $\mathfrak{P}$ invers liegen.

Durch die Entwickelungen dieses Paragraphen ist gleichzeitig die Aufgabe gelöst, alle Transformationen zu finden, die zwei äquivalente Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ ineinander überführen; ist nämlich $\mathfrak{Q}$ eine bestimmte KV, die dies leistet, so erhält man die allgemeinste in der Form $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}'$, wo $\mathfrak{R}$ bezw. $\mathfrak{R}'$ die allgemeinste KV bedeutet, die $\mathfrak{P}$ bezw. $\mathfrak{P}'$ invariant lässt.

IV. Harmonische und associirte Kreisverwandtschaften; Büschel und Halbbüschel von Punktfeldern und complexen Kreisen.

35. In Nr. 26 nannten wir zwei gleichartige Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonisch, wenn $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ und infolgedessen auch $\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution ist. Sind $a\,b\,c\,d$ bezw. $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ die Coefficienten der zu $\mathfrak{P}$ bezw. $\mathfrak{Q}$ gehörigen linearen Transformationen der complexen Variabeln z, so lautet die Bedingung für die harmonische Lage

$$(1) \qquad a\delta - b\gamma - c\beta + d\alpha = 0;$$

sie zerlegt sich in 2 reelle Gleichungen, es gibt also zu einer gegebenen KV ∞^4 mit ihr gleichartige harmonische Kreisverwandtschaften.

Ist dagegen $\mathfrak{P}$ eine direkte, $\mathfrak{Q}$ eine indirekte KV, so muss das Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ eine Inversion sein, wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonisch liegen sollen; die Bedingungen hiefür lauten:

$$\frac{-\bar{\delta}\bar{a}+\bar{\beta}\bar{c}}{\bar{\gamma}\bar{a}-\bar{a}\bar{c}}+\frac{\gamma b-a d}{\gamma a-a c}=0;$$

$$\frac{\bar{\beta}\bar{d}-\bar{\delta}\bar{b}}{\bar{\gamma}\bar{a}-\bar{a}\bar{c}}=\frac{\beta d-\delta b}{\gamma a-a c},$$

was mit 3 reellen Gleichungen äquivalent ist; es gibt also zu einer gegebenen KV ∞^3 ungleichartige harmonische KV.

Da die Bedingung (1), auf 2 complexe Kreise angewandt, deren Orthogonalität ausspricht, so bezeichnen wir allgemein 2 harmonische KV als orthogonal und die Gesamtheit der ∞^4 zu einer KV harmonischen gleichartigen KV als ein Netz.

Sind die Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ harmonisch und bedeutet AA' ein Paar von $\mathfrak{P}$, während die Punkte BB' durch die Angabe

(2) $$A\{\mathfrak{Q}\}B',\quad B\{\mathfrak{Q}\}A'$$

bestimmt sind, so bilden auch B und B' ein Paar von $\mathfrak{P}$. Umgekehrt, sind die KV $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichartig und existiren in $\mathfrak{P}$ zwei verschiedene Paare AA', BB' derart, dass AB' und BA' Paare von $\mathfrak{Q}$ sind, so liegen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonisch, da ja $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ die Punkte A, B vertauscht.

Bedeutet S_1 den ersten, S_2 den zweiten singulären Punkt einer singulären KV $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$, wie man leicht erkennt, dann und nur dann harmonisch, wenn S_1, S_2 ein Paar entsprechender Punkte von $\mathfrak{Q}$ bedeuten.

36. Zwei Möbiusinvolutionen sind dann und nur dann harmonisch, wenn ihre Fixpunkte harmonisch liegen, zwei Inversionen, wenn die zugehörigen Kreise sich rechtwinklig schneiden; eine Möbiusinvolution und eine Inversion, wenn letztere die Fixpunkte der ersteren entweder vertauscht oder festlässt. In allen diesen Fällen sind die betreffenden KV natürlich auch vertauschbar, und jede ist durch die andere inversibel.

Soll die Möbiusinvolution $\mathfrak{J}$ zu der KV $\mathfrak{Q}$ harmonisch sein, so hat man:

$$\mathfrak{J}\mathfrak{Q}\mathfrak{J}=\mathfrak{Q}^{-1};$$

nach Nr. 33 folgt also: Eine Möbiusinvolution ist dann und nur dann zu einer direkten KV harmonisch, wenn sie deren Fixpunkte vertauscht; jede direkte KV kann also auf ∞^2 Arten als Produkt zweier Möbiusinvolutionen dargestellt werden.[1])

Jede indirekte KV bestimmt ∞^1 zu ihr harmonische Möbiusinvolutionen; sie wurden in Nr. 33 unter 4) und 6) angegeben.

Zu einer direkten hyperbolischen (bezw. elliptischen) KV mit den Fixpunkten (bezw. Gegenpunkten) $M_1 M_2$, die keine Involution ist, gibt es ∞^1 harmonische Inversionen, deren Kreise das Büschel mit den Grenzpunkten (bezw. Grundpunkten) $M_1 M_2$ bilden; zu einer Möbiusinvolution gibt es zwei Schaaren von ∞^1 harmonischen Inversionen.

Eine indirekte KV $\mathfrak{Q}$, die keine Inversion ist, besitzt ∞^1 zu ihr harmonische Inversionen, deren Kreise das zu den Fixkreisen von $\mathfrak{Q}$ orthogonale reelle Büschel bilden. Sind A, A' ein Paar von $\mathfrak{Q}$, $M_1 M_2$ die Fixpunkte, so liegt der Punkt B', in den A durch eine jener ∞^1 Inversionen übergeht, auf dem Kreis $M_1 M_2 A$, ebenso der Punkt B, in den A' durch dieselbe Inversion transformirt wird, auf dem Kreise $M_1 M_2 A'$; daraus folgt: Schneidet ein beliebiger durch AA' gelegter Kreis den Kreis $M_1 M_2 A$ in B', den Kreis $M_1 M_2 A'$ in B, so ist BB' ein neues Paar von $\mathfrak{Q}$. Hieraus ergibt sich eine einfache Construktion der Punkte, die einem gegebenen Punkte A in $\mathfrak{Q}$ vor- und rückwärts entsprechen, und zwar gilt das Vorige auch in dem Fall, dass die Punkte $M_1 M_2$ conjugirt imaginär, $\mathfrak{Q}$ also elliptisch ist.

37. Es möge hier auf diejenigen Kreisverwandtschaften, die zu ihrer inversen harmonisch sind, also eine Gleichung der Form $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{J}$ erfüllen, und allgemeiner auf die Lösung der Gleichung $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{R}$, wo $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene (natürlich direkte) KV bedeutet, mit ein paar Worten eingegangen werden. Soll die KV $\mathfrak{Q}$ direkt sein, so hat sie mit $\mathfrak{R}$ die Fixpunkte gemein, und ihre Invariante hat einen der Werte

---

[1]) Vgl. Segre a. a. O.

$\pm\sqrt{\varkappa}$, wo $\varkappa$ diejenige von $\mathfrak{R}$ bedeutet; es gibt also 2 verschiedene KV, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$, der genannten Beschaffenheit, die vertauschbar und harmonisch sind, so zwar, dass $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}^{-1}$ mit der Fixpunktsinvolution von $\mathfrak{P}$ identisch ist. Soll insbesondere $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{J}$ sein, so haben $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ bezw. die Invarianten $e^{i\frac{\pi}{2}}$ und $e^{i\frac{3\pi}{2}}$, sind also elliptische Transformationen der Periode 4. Bedeutet andererseits $\mathfrak{Q}$ eine indirekte KV, so muss $\mathfrak{R}$ zweispiegelig sein. Ist $\mathfrak{R}$ zunächst hyperbolisch und seine (reelle) Invariante $\varkappa > 0$, so existirt eine Schaar von ∞^1 indirekten hyperbolischen KV obiger Eigenschaft; und zwar kann man für die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ zwei beliebige orthogonale Kreise des Bahnkreisbüschels von $\mathfrak{P}$ wählen, während die Invariante von $\mathfrak{Q}$ den Wert $|\sqrt{\varkappa}|$ besitzt. Ist zweitens $\mathfrak{R}$ elliptisch, so gibt es stets zwei verschiedene Schaaren von je ∞^1 elliptischen indirekten KV, die die Gleichung $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{R}$ erfüllen, und zwar kann der einteilige Fixkreis von $\mathfrak{Q}$ innerhalb des Bahnkreisbüschels von $\mathfrak{R}$ beliebig gewählt werden, während die Invariante von $\mathfrak{Q}$ den Wert $\pm e^{\frac{i\lambda}{2}}$ hat, wo $e^{i\lambda}$ diejenige von $\mathfrak{R}$ bedeutet, und zwar ist jede KV der ersten Schaar zu jeder der zweiten harmonisch. Insbesondere gibt es also auch 2 verschiedene Schaaren von Lösungen der Gleichung $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{J}$.

38. Nach Nr. 35 haben alle Kreisverwandtschaften, die dem durch $\mathfrak{Q}$ bestimmten Netze angehören und ein gegebenes Paar AA' enthalten, auch das Paar BB' gemein, das durch die Formeln (2) definirt wird. Die Punkttransformation, welche jeden complexen Punkt $[AA']$ in $[BB']$ verwandelt, ist natürlich involutorisch und lässt alle Paare von $\mathfrak{Q}$ in Ruhe; für den Fall, dass $\mathfrak{Q}$ eine indirekte KV $\mathfrak{Q}$ bedeutet, ist sie mit der Inversion an dem Kreise $\mathfrak{Q}$ identisch. Wenn nun $\mathfrak{Q}$ eine direkte KV vorstellt, wollen wir jenen Uebergang als die „Spiegelung (oder Inversion) an dem Punktfeld $\mathfrak{Q}$“ bezeichnen.

Bedeuten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei indirekte reelle KV und stehen die reellen Punkte $AA'BB'$ in der Beziehung

$$A\,\{\mathfrak{Q}\}\,B,\quad A'\,\{\mathfrak{P}\}\,B',$$

so nennen wir den Uebergang von dem Punkte $[AA']$ zu $[BB']$ eine „uneigentliche direkte KV"; sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ zwei direkte reelle KV, und hat man

$$A\,\{\mathfrak{Q}\}\,B', \quad A'\,\{\mathfrak{P}\}\,B,$$

so heisst die Transformation, vermöge deren der Punkt $[AA']$ in $[BB']$ übergeht, eine „uneigentliche indirekte KV"; ersetzt man $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{Q}^{-1}$, so erhält man als Spezialfall die Spiegelung an dem Punktfeld $\mathfrak{Q}$. Die Spiegelung an dem reellen Punktfeld ist also nichts anderes als der Uebergang von einem complexen Punkt zu seinem conjugirt imaginären.

Eine uneigentliche direkte (bezw. indirekte) KV entsteht demnach, wenn man jedes der beiden Büschel von Minimalgeraden conjugirt-projektiv auf sich (bezw. auf das andere) bezieht und dem complexen Schnittpunkt zweier Minimalgeraden den Schnittpunkt der bezw. entsprechenden Minimalgeraden zuweist.

39. Sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ zwei gleichartige reelle KV, also beide direkt oder beide indirekt, ferner AA', BB' ihre gemeinsamen Paare, so bezeichnen wir den Inbegriff der ∞^2 Kreisverwandtschaften, die mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichartig sind und die Paare AA', BB' gemein haben, als das „Büschel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$" und zwar als ein „Feldbüschel" oder „Kreisbüschel", je nachdem $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ direkt oder indirekt sind. Der Definition des Büschels können statt $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ irgend zwei verschiedene Verwandtschaften des Büschels zu Grunde gelegt werden. Die Punkte $[AA']$, $[BB']$ heissen die Grundpunkte, ferner $[AB']$ und $[BA']$ die Grenzpunkte des Büschels. Das letztere enthält nur zwei singuläre KV; ihre singulären Punkte sind A, B' bezw. B, A'.

Ein reelles Büschel, das also zu jeder KV gleichzeitig die inverse enthält, entsteht, wenn entweder A mit A' und B mit B' identisch, d. h. die Grundpunkte reell, oder wenn A mit B' und B mit A' identisch, also die Grenzpunkte reell werden. Ein reelles Feldbüschel insbesondere besteht entweder aus ∞^2 direkten KV mit gemeinsamen Fixpunkten, oder aus ∞^2 Involutionen, die ein gemeinsames Paar enthalten.

Ist A mit B, A' mit B' identisch, so erhält man ein „Berührungsbüschel", bestehend aus ∞^2 Kreisverwandtschaften, die sich im Punkte $[AA']$ berühren.

Von zwei harmonischen Punktfeldern geht nach Nr. 38 jedes durch Spiegelung an dem andern in sich über, und analoges gilt auch für harmonische Kreise. Ist also die KV $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichartig und harmonisch, so sind die Punkte $[AA']$ und $[BB']$ hinsichtlich $\mathfrak{P}'$ invers, $\mathfrak{P}'$ enthält also die Paare AB', BA'; und umgekehrt. Es gibt demnach ∞^2 Kreisverwandtschaften, die zu allen KV des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ harmonisch liegen; sie bilden das zu letzterem „adjungirte Büschel", das $[AB']$ und $[BA']$ zu Grundpunkten, $[AA']$ und $[BB']$ zu Grenzpunkten hat. Das adjungirte Büschel eines Berührungsbüschels ist wieder ein solches und hat denselben doppelt zählenden Grundpunkt.

40. Um diejenige KV $\mathfrak{P}'$ des zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ adjungirten Büschels zu finden, die ein gegebenes Paar C, C' enthält, invertire man den Punkt $[CC']$ an $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, wodurch die Punkte $[DD']$ und $[EE']$ erhalten werden; dann sind CC', DD', EE' 3 Paare von $\mathfrak{P}'$. Ist CC' ein Paar von $\mathfrak{P}$, so invertire man den Punkt $[CC']$ an $\mathfrak{Q}$, wodurch $[EE']$, und den letzteren Punkt an $\mathfrak{P}$, wodurch $[FF']$ entstehe; dann sind CC', EE', FF' 3 Paare von $\mathfrak{P}'$. Diese Construktion versagt dann und nur dann, wenn $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$ harmonisch liegt, weil dann auch das Paar EE' in $\mathfrak{P}$ enthalten, also mit FF' identisch ist, und es bietet sich dann die weiter unten zu erledigende Aufgabe, eine zu $\mathfrak{P}$ harmonische gleichartige KV zu bestimmen, die 2 gegebene Paare von $\mathfrak{P}$ enthält. Ist endlich CC' eines der gemeinsamen Paare von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, etwa mit AA' identisch, so muss $\mathfrak{P}'$ die singuläre KV sein, deren singuläres Paar A und A' sind; diese KV sowie diejenige, die B, B' zu singulären Punkten hat, sind in der That die einzigen singulären KV des zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ adjungirten Büschels.

Die Construktion derjenigen KV, die einem gegebenen Büschel angehört und ein gegebenes Paar enthält, lässt sich auf die vorige zurückführen, indem man zunächst zwei beliebige KV des adjungirten Büschels bestimmt.

Die Aufgabe, eine mit $\mathfrak{Q}$ gleichartige und harmonische $KV\,\mathfrak{P}'$ zu bestimmen, die zwei gegebene Paare CC', DD' enthält, erledigt sich dadurch, dass man durch Inversionen an $\mathfrak{Q}$ aus den gegebenen Paaren neue ableitet; diese Construktion versagt nur dann, wenn jene Paare beide auch in $\mathfrak{Q}$ enthalten sind. In diesem Falle ermittle man zunächst zwei beliebige KV, die mit $\mathfrak{Q}$ gleichartig und harmonisch sind, sowie das Paar CC' enthalten; sie gehören zu einem Berührungsbüschel mit dem Grundpunkt $[CC']$. Ferner bestimme man zwei beliebige $KV\ \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1$ des dazu adjungirten Berührungsbüschels, sowie diejenige $KV\ \mathfrak{P}'$, die das Paar DD' enthält und zu $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ harmonisch ist. Diese letztere Construktion ist nunmehr stets ausführbar, da sich $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ so wählen lassen, dass keine derselben das Paar DD' enthält.

Um schliesslich diejenige Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}'$ zu bestimmen, die zu drei gegebenen KV: $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ harmonisch ist, verstehe man unter CC' ein beliebiges Paar von $\mathfrak{R}$, ermittele nach dem Obigen die Kreisverwandtschaft $\mathfrak{S}$ des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, die das Paar CC' enthält, und suche das zweite gemeinsame Paar DD' von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$. Dann sind die Punkte $[CC']$ und $[DD']$ hinsichtlich $\mathfrak{P}'$ invers, d. h. CD' und DC' sind Paare von $\mathfrak{P}'$, und man findet auf diesem Wege beliebig viele Paare der gesuchten KV.

Wir bemerken noch, dass alle in dieser Nr. behandelten Aufgaben lediglich lineare Constructionen erfordern.

41. Es sei ein Büschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ gegeben; bedeutet $\mathfrak{P}$ eine beliebige KV desselben, so kann die allgemeinste KV des Büschels in jeder der beiden Formen

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\mathfrak{P};\quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{P}\mathfrak{R}' \tag{3}$$

geschrieben werden, worin $\mathfrak{R}$ (bezw. $\mathfrak{R}'$) das reelle Büschel der ∞^2 direkten KV mit den Fixpunkten AB (bezw. $A'B'$) durchläuft; die allgemeinste Transformation $\mathfrak{Q}'$ des adjungirten Büschels kann dann auf folgende beide Arten dargestellt werden:

(4) $$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{J}\mathfrak{P}; \quad \mathfrak{Q}' = \mathfrak{P}\mathfrak{J}';$$

dabei durchläuft $\mathfrak{J}$ alle Möbiusinvolutionen, die das Paar AB enthalten, d. h. zur Fixpunktsinvolution von $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}$ harmonisch sind, ebenso $\mathfrak{J}'$ alle Möbiusinvolutionen, die das Paar $A'B'$ enthalten. Nach (3) haben alle Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ die Eigenschaft, jede KV des reellen Feldbüschels $\mathfrak{R}$ in eine KV des Büschels $\mathfrak{R}'$ zu transformiren, welch letztere immer dieselbe ist, wie auch $\mathfrak{P}$ innerhalb des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ gewählt sein mag. Insbesondere wird die Involution $\mathfrak{J}$ mit den Fixpunkten AB in $\mathfrak{J}'$ verwandelt;[1]) diese Wirkung haben aber auch alle KV des adjungirten Büschels. Umgekehrt gibt es stets zwei adjungirte Feldbüschel und zwei adjungirte Kreisbüschel derart, dass alle ihnen angehörenden KV zwei vorgegebene Möbiusinvolutionen ineinander überführen.

Die Entwickelungen dieser Nr. gelten in leicht ersichtlicher Weise auch, wenn A mit B, A' mit B' identisch ist, d. h. wenn es sich um ein Berührungsbüschel handelt.

42. Bedeutet $\mathfrak{P}$ eine direkte KV mit den Fixpunkten $M_1 M_2$, die in dem Feldbüschel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ enthalten ist, so entsprechen sich M_1 und M_2 vermöge der im adjungirten Büschel vorkommenden Involution $\mathfrak{j}$, die durch die Paare AB', BA' definirt ist; umgekehrt, bilden $M_1 M_2$ ein Paar von $\mathfrak{j}$, so gibt es in dem Feldbüschel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ stets eine und nur eine direkte KV mit den Fixpunkten $M_1 M_2$.

Der erste Teil dieser Behauptung folgt daraus, dass $\mathfrak{j}$ zu $\mathfrak{P}$ harmonisch ist, also die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ vertauscht, der zweite aus der Beziehung

$$M_1 M_2 A A' \{\mathfrak{j}\} \; M_2 M_1 B' B,$$

[1]) Nur wenn $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ harmonisch sind, gibt es mehr als ein Paar $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$, so dass gleichzeitig $\mathfrak{P}\mathfrak{J}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{J}' = \mathfrak{Q}\mathfrak{J}\mathfrak{Q}^{-1}$, und zwar bedeutet hier $\mathfrak{J}$ eine zu $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}$, $\mathfrak{J}'$ eine zu $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{Q}$ harmonische Involution; für den Inhalt dieser Nr. vgl. übrigens C. Segre a. a. O.

welche lehrt, dass das Doppelverhältnis $(M_1 M_2 A A')$ gleich $(M_1 M_2 B B')$ ist. Natürlich sind ebenso die Fixpunktepaare der KV des adjungirten Feldbüschels mit den Paaren derjenigen Involution $\mathfrak{i}$ identisch, die A mit A' und B mit B' vertauscht.

In einem Feldbüschel gibt es nach dem Gesagten nur zwei parabolische Verwandtschaften; ihre doppelt zählenden Fixpunkte coincidiren bezw. mit den beiden Fixpunkten von $\mathfrak{j}$.

Für den Fall eines reellen Büschels und eines Berührungsbüschels wird die obige Schlussweise natürlich hinfällig; doch bedarf nur der zweite dieser Fälle einer nähern Erläuterung. Es handelt sich hier darum, die in den beiden adjungirten Büscheln enthaltenen Möbiusinvolutionen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ zu construiren. Sei also ein Berührungsbüschel gegeben durch den doppelt zählenden Grundpunkt $[A A']$ und eine direkte KV $\mathfrak{P}$, die das Paar $A A'$ und die Fixpunkte $M_1 M_2$ besitzt. Da $\mathfrak{j}$ zu $\mathfrak{P}$ harmonisch ist und gleichfalls das Paar $A A'$ enthält, so liegen die Fixpunkte $C C'$ von $\mathfrak{j}$ zu $M_1 M_2$ und zu $A A'$ gleichzeitig harmonisch, sind also eindeutig festgelegt. Die Involution $\mathfrak{i}$ ist dann dadurch definirt, dass ihre Fixpunkte zu AA' und zu $C C'$ harmonisch sind. Ist das Berührungsbüschel reell, also A mit A' identisch, so coincidiren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ in die singuläre Involution mit dem singulären Punkt A, d. h. jeder beliebige Punkt der Ebene bildet mit A zusammen das Fixpunktepaar je einer KV der beiden adjungirten Büschel.

43. Wir wollen jetzt die zweispiegeligen Verwandtschaften bestimmen, die in einem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[A A']$, $[B B']$ enthalten sind. Die beiden Fixpunkte P, P' einer dem Büschel angehörigen hyperbolischen KV liegen sowohl mit $A A'$ als mit $B B'$ cyclisch. Bezeichnet man also mit $\mathfrak{t}$ die involutorische Transformation, die jedem Punkte P' den zweiten Schnittpunkt der Kreise $P' AA'$ und $P' BB'$ zuweist, so folgt: Es gibt in dem vorgelegten Feldbüschel ∞^1 hyperbolische Transformationen; ihre Fixpunktepaare sind identisch mit den gemeinsamen Paaren der Transformation $\mathfrak{t}$ und der Möbiusinvolution $\mathfrak{j}$, d. h. also mit denjenigen Punktepaaren

von $\mathfrak{j}$, die mit AA' (und infolgedessen auch mit BB') cyclisch liegen.

Um den geometrischen Ort dieser ∞^1 Paare zu finden, verlege man durch eine Inversion den einen Fixpunkt von $\mathfrak{j}$ in's Unendliche; dann ist A zu B', A' zu B symmetrisch hinsichtlich des andern Fixpunkts 0, den wir als Anfangspunkt eines cartesischen Coordinatensystems x, y wählen. Die Gleichung des Kreisbüschels mit den Grundpunkten AA' habe die Form:

$$(5)\quad (1+\lambda)(x^2+y^2)+\pi+\lambda\pi'-2(\alpha+\lambda\alpha')x-2(\beta+\lambda\beta')y=0,$$

worin λ den Parameter bedeutet; das ihm vermöge $\mathfrak{j}$ entsprechende Büschel wird erhalten, indem man x durch $-x$, y durch $-y$ ersetzt, und aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Elimination von λ die Curve:

$$(6)\quad 0=(x^2+y^2+\pi)(\alpha' x+\beta' y)-(x^2+y^2+\pi')(\alpha x+\beta y),$$

also eine circulare Curve 3.O. Soll diese zerfallen, so muss sich, da sie hinsichtlich 0 symmetrisch ist, eine durch 0 gehende Gerade $y=\varrho x$ von ihr ablösen. Substituiren wir diesen Wert für y in (6) und setzen das Resultat identisch null, so zeigt sich, dass unsere C_3 dann und nur dann zerfällt, wenn die Punkte $AA'BB'$ entweder auf einem Kreise K mit dem Centrum 0 oder auf einer durch 0 gehenden Geraden g liegen. Im ersten Fall zerfällt die C_3 in den Kreis K und die gemeinsame Mittelsenkrechte der Strecken AB, $A'B'$; im zweiten artet die C_3 aus in die Gerade g und den Kreis mit dem Centrum 0, der A von B und A' von B' harmonisch trennt. Daraus folgt:

Die Fixpunktepaare der hyperbolischen Transformationen, die einem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ angehören, erfüllen eine bicirculare C_4 (eventuell eine circulare C_3); dann und nur dann, wenn die Punkte $AA'BB'$ auf einem Kreise K liegen, zerfällt diese Curve, und zwar in den Kreis K und den dazu orthogonalen Kreis, der A von B und A' von B' harmonisch trennt.

44. Die Fixpunkte PP' einer elliptischen Transformation, die dem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ an-

gehört, liegen zu AA' und zu BB' orthocyclisch. Nennt man also $\mathfrak{t}'$ die involutorische Transformation, die jedem Punkte P' den zweiten Schnittpunkt der durch P' gehenden Kreise zuweist, die A von A' bezw. B von B' harmonisch trennen, so sind die Fixpunktepaare der ∞^1 dem Büschel angehörenden elliptischen Transformationen identisch mit den gemeinsamen Paaren der beiden Verwandtschaften $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{t}'$. Verlegt man den einen Fixpunkt von $\mathfrak{j}$ ins Unendliche und wählt den Coordinatenanfang wie in der vorigen Nr., versteht man ferner unter α, β bezw. α', β' die Coordinaten von A bezw. A', und unter π, π' die Grössen $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha'^2+\beta'^2$, so liefert die Gleichung (5) das reelle Kreisbüschel mit den Grenzpunkten AA', also Gleichung (6) den gesuchten Ort, der von den Schnittpunkten entsprechender Kreise des Büschels (5) und des zu ihm hinsichtlich 0 symmetrischen Büschels erfüllt wird. Wie oben schliesst man jetzt:

Die Fixpunktepaare des ∞^1 elliptischen KV, die in einem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$ und $[BB']$ vorkommen, erfüllen eine bicirculare C_4 (eventuell eine circulare C_3); dann und nur dann, wenn die Punkte $AA'\,BB'$ auf einem Kreise K liegen, zerfällt diese C_4 und zwar in den reellen Kreis K', der A von B' und B von A' harmonisch trennt, sowie in den dazu orthogonalen reellen Kreis K'', hinsichtlich dessen A und A', sowie B und B' inverse Punkte sind; von diesen Kreisen ist natürlich mindestens einer einteilig.

45. Sind P, Q die Fixpunkte einer indirekten hyperbolischen KV des complexen Kreisbüschels mit den Grundpunkten $[AA]$, $[BB']$, so gilt nach Nr. 18 die Beziehung:

$$P\{\mathfrak{j}\mathfrak{t}'\}Q,$$

d. h. Q entsteht aus P, indem man zunächst P vermöge $\mathfrak{j}$ in P', sodann diesen letzteren Punkt mittels $\mathfrak{t}'$ in Q überführt. Offenbar ist $\mathfrak{t}'$ dann und nur dann, wenn die Punkte $AA'\,BB'$ auf einem Kreise K liegen, eine Kreisverwandtschaft, nämlich die Inversion an K, und es ist dann das Produkt $\mathfrak{j}\mathfrak{t}'$ gleich der Inversion j, die A mit B' und B mit A' vertauscht;

andernfalls stellt dies Produkt eine höhere birationale und augenscheinlich involutorische Transformation dar.

Die Fixpunktepaare der indirekten hyperbolischen KV des Kreisbüschels mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ sind nach Nr. 18 identisch mit den Gegenpunktepaaren der indirekten elliptischen Transformationen des adjungirten Büschels. Bedeutet also wiederum $\mathfrak{i}$ die Involution, die A mit A' und B mit B' vertauscht, ferner $\mathfrak{t}''$ diejenige involutorische Verwandtschaft, die jedem Punkt P' den zweiten Schnittpunkt der durch ihn gehenden Kreise zuweist, die A von B' bezw. B von A' harmonisch trennen, so sind irgend zwei Punkte P, P', die in der Beziehung

$$P\{\mathfrak{i}\mathfrak{t}''\}P'$$

stehen, Gegenpunkte einer indirekten elliptischen KV, die dem Büschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ angehört, und umgekehrt.

In jedem von zwei adjungirten Kreisbüscheln sind ∞^1 parabolische indirekte KV enthalten; der Ort der Fixpunkte der letzteren ist für beide Büschel die in Nr. 44 genannte Curve C_4. Bei cyclischer Lage der Punkte $AA'\,BB'$ zerfällt diese Curve in die oben definirten reellen Kreise K, K''; doch ist für das Büschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ nur der Kreis K'', sofern er einteilig ist, Fixpunktsort der in dem Büschel enthaltenen parabolischen Substitutionen, während K' den Fixkreis der dem Büschel angehörigen Inversion darstellt; für das adjungirte Büschel vertauschen die Kreise K', K'' ihre Rollen. Die Transformationen $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t}''$ werden nunmehr identisch mit der Inversion an dem Kreise K; also ist $\mathfrak{i}\mathfrak{t}'$ die Inversion an K', und $\mathfrak{i}\mathfrak{t}''$ die Inversion an K''.

In den drei letzten Nummern wurde vorausgesetzt, dass die vier Punkte $AA'\,BB'$ sämtlich voneinander verschieden sind. Die Fälle, in denen zwei oder mehrere dieser Punkte coincidiren, geben zu trivialen Ausartungen der in Nr. 43—45 besprochenen Punktörter Anlass, mit Ausnahme des Falles, dass ein Berührungsbüschel vorliegt; wir gedenken die Theorie dieser speciellen Büschel an anderer Stelle ausführlich zu behandeln.

46. Soll zu zwei gleichartigen KV: $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ eine mit beiden ungleichartige und harmonisch liegende Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ existiren, soll man also haben:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1} = J, \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{Q}^{-1} = J',$$

worin J, J' Inversionen bedeuten, so folgt

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = J'J, \tag{7}$$

d. h. das Produkt $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ ist ebenso wie $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}'$ eine zweispiegelige Verwandtschaft. Da ferner in der Gleichung (7) die Transformation J innerhalb des reellen Kreisbüschels (J, J') beliebig gewählt werden kann, worauf J' eindeutig bestimmt ist, so folgt aus der Zweispiegeligkeit von $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ auch umgekehrt die Existenz einfach unendlich vieler zu $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ harmonischer, mit ihnen ungleichartiger Kreisverwandtschaften:

$$\mathfrak{Q} = J\mathfrak{P} = J'\mathfrak{P}'. \tag{8}$$

47. Wir wollen zwei gleichartige Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$, für die das Produkt $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ zweispiegelig ist, als „associirt“, ferner die ∞^1 Transformationen $\mathfrak{Q}$ als „das zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ harmonische „Halbbüschel“ bezeichnen. Irgend zwei Transformationen $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}'$ des letzteren sind natürlich ihrerseits associirt, und die mit ihnen ungleichartigen, harmonisch liegenden KV bilden ein Halbbüschel, dem $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ angehören. Diese beiden Halbbüschel kann man als harmonisch bezeichnen, insofern jede Transformation $\mathfrak{R}$ des einen zu jeder Transformation $\mathfrak{S}$ des andern harmonisch ist. In der That, es sei $\mathfrak{Q}_1$ durch die Beziehungen

$$\mathfrak{Q}_1 = J_1\mathfrak{P} = J_1'\mathfrak{P}' \tag{9}$$

definirt, wo J_1, J_1' Inversionen des reellen Kreisbüschels (J, J') sind. Ferner bedeute $\mathfrak{R}$ eine mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$ ungleichartige und harmonisch liegende KV, so dass also

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{R}^{-1} = i, \quad \mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}^{-1} = i', \tag{10}$$

endlich $\mathfrak{S}$ eine Transformation des Halbbüschels $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1)$, die also Beziehungen der Form

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{S}^{-1} = i_1; \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{S}^{-1} = i_1'$$

genügt, so folgt aus (8)—(10) zunächst

$$\text{(12)} \qquad \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1^{-1} = i\,i' = J J_1; \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = i_1' i_1 = J J',$$

so dass die Inversionen $J, J', J_1, i, i', i_1, i_1'$ alle demselben reellen Kreisbüschel angehören. Ferner hat man aus (10) und (11)

$$\mathfrak{R} = i\mathfrak{Q}; \quad \mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{P}^{-1} i_1;$$
$$\mathfrak{R}\mathfrak{S}^{-1} = i\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} i_1 = i J i_1;$$

da aber das Produkt dreier Inversionen desselben Büschels wieder eine Inversion liefert, so ist unsere Behauptung erwiesen.

48. Die harmonische Lage zweier gleichartiger KV ist ein Specialfall der Associirtheit. Ist $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}'$ harmonisch, so kann in der Gleichung (7) die Inversion J zwei verschiedenen adjungirten Kreisbüscheln entnommen werden, und es existiren demnach zwei verschiedene zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ harmonische Halbbüschel, und $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ gehören ihrerseits zwei verschiedenen Halbbüscheln gleichzeitig an. Zwei associirte nicht harmonische Verwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ sind dagegen stets in einem und nur einem Halbbüschel enthalten, und zwar hat die allgemeinste Transformation desselben die Form $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$, wo $\mathfrak{R}$ alle ∞^1 zweispiegeligen KV derjenigen eingliedrigen Gruppe durchläuft, der auch die Verwandtschaft $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ angehört. Eine solche eingliedrige Gruppe, sowie das reelle Büschel von Inversionen, die zu den ∞^1 Niveaukreisen jener Gruppe gehören, liefern sonach den einfachsten Typus harmonischer Halbbüschel.

Multiplicirt man alle Transformationen eines Halbbüschels vorn oder hinten mit ein und derselben Kreisverwandtschaft, so entsteht wieder ein Halbbüschel.

49. Jedes Halbbüschel ist in einem ganz bestimmten Büschel enthalten. Umgekehrt, jede Transformation des Büschels

$(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ gehört zwei und nur zwei Halbbüscheln β, β' an, die ganz innerhalb des gegebenen Büschels liegen; sie sind beide durch die Gleichung $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\mathfrak{P}$ gegeben, wo $\mathfrak{R}$ das einemal alle ∞^1 elliptischen, das andremal die hyperbolischen zweispiegeligen Verwandtschaften mit den Fixpunkten A, B durchläuft. Bedeutet $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ ein Feldbüschel, so ist das zu β harmonische Halbbüschel indirekter Kreisverwandtschaften in dem Kreisbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$, das zu β' harmonische Halbbüschel in dem Kreisbüschel mit den Grundpunkten $[AB']$, $[BA']$ enthalten. Die Berührungsbüschel nehmen auch hier eine Ausnahmestellung ein.

50. Ist eine Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}'$ zu einer mit ihr gleichartigen KV $\mathfrak{P}$ und einer ungleichartigen KV $\mathfrak{Q}$ harmonisch, d. h. bestehen die Beziehungen:

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{J}; \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{Q}^{-1} = J; \quad \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}' = J',$$

worin $\mathfrak{J}$ eine Möbiusinvolution, J und J' Inversionen bedeuten, so ist $\mathfrak{J}$ wegen

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{P}J'\mathfrak{P}^{-1} = J''$$

eine zu der indirekten Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ harmonische Möbiusinvolution, und umgekehrt. Wir nehmen zunächst an, dass diese indirekte KV keine Inversion, d. h. dass $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nicht harmonisch seien. Je nachdem nun $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ zwei einteilige Fixkreise oder nur einen besitzt, gibt es nach Nr. 33 zwei Schaaren von je ∞^1 Möbiusinvolutionen der verlangten Art oder nur eine, und jede solche Schaar stellt ein Halbbüschel dar. Nach dem Schlusssatz der Nr. 48 folgt jetzt: Die Kreisverwandtschaften, die zu zwei ungleichartigen nicht harmonischen KV $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichzeitig orthogonal sind, bilden vier bezw. zwei Halbbüschel, je nachdem das Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ dem hyperbolischen oder elliptischen Typus angehört; zwei dieser Halbbüschel (bezw. eines) sind mit $\mathfrak{P}$, zwei (bezw. eines) mit $\mathfrak{Q}$ gleichartig.

Ist $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$ harmonisch, also $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ eine Inversion, so kann man für $\mathfrak{J}$ eine beliebige der ∞^2 Involutionen wählen, deren Fixpunkte durch jene Inversion vertauscht werden, oder auch, falls die Direktrix K der letzteren einteilig ist, eine der ∞^2 Involutionen, deren Fixpunkte auf K liegen, und es treten in dem vorigen Satze an Stelle der Halbbüschel Systeme von je ∞^2 Kreisverwandtschaften, die zweckmässig als „Halbnetze“ bezeichnet werden.