# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft I.



München.
Verlag der k. Akademie
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

# Beiträge zur Sonnentheorie.

Von R. Emden.

(Eingelaufen 6. Juli.)

Helmholtz[1]) hat gezeigt, dass verschieden dichte, mit ungleicher Geschwindigkeit strömende Luftschichten in scharf ausgeprägten Diskontinuitätsflächen aneinander grenzen können; dann sind ähnliche Bedingungen gegeben, wie wenn der Wind über eine Wasseroberfläche streicht, und jene Trennungsfläche wird zur Bildung gewaltiger, paralleler, in Richtung der rascher bewegten Schicht vorwärts eilender Wellenzüge veranlasst. Diese, meistens unsichtbar, können der Beobachtung zugänglich werden durch parallele, in den aufsteigenden Wellenbergen entstehende Wolkenstreifen, welche oft grosse Flächen des Firmaments bedecken; durch stürmische Regenschauer, die von Perioden heiteren Wetters unterbrochen, in gleichen Zwischenräumen mehrmals im Tage wiederkehren, sowie durch die Bewegung, die sie einem zufällig von ihnen erfassten Luftballon mittheilen. Ein glücklicher Zufall gestattete mir, bei einer Ballonfahrt die Längen dieser Wellen, sowie die Beschaffenheit der beiden sich berührenden Luftschichten zu messen und Uebereinstimmung der von der Helmholtz'schen Theorie geforderten und der gemessenen Wellenlänge zu konstatiren.[2])

In einer Reihe von Abhandlungen hat Helmholtz die Bedeutung dieser Wellenbildung für die allgemeine Zirkulation

---

[1]) Helmholtz, Gesammelte Abhandlungen. Bd. I u. III.

[2]) R. Emden, Eine Beobachtung über Luftwogen. Wied. Annal. LXII. pag. 62. 1897.

der Atmosphäre dargelegt. Die Wärmemenge, welche die Atmosphäre in den äquitorialen Gegenden empfängt und in mächtiger Strömung in den obern Schichten den Polen zuführt, müssen auch der Erdoberfläche in mittleren Breiten zugeführt werden. Ein einfaches Niedersteigen jener obern Schichten ist ausgeschlossen, denn, ihr Rotationsmoment beibehaltend, würden schon in niedern Breiten regelmässig Stürme auftreten, von einer Heftigkeit, wie sie selbst ausnahmsweise nicht beobachtet werden. Der Koefficient der Wärmeleitung ist viel zu klein, dass sich der Wärmegehalt durch Leitung, der Reibungskoefficient zu klein, dass sich Rotationsmomente durch innere Reibung ausgleichen können. Vielmehr werden sich die am Aequator mit Energie gespeisten, polwärts strömenden Luftmassen in immer neu sich bildenden Diskontinuitätsflächen von den untern, an Energie ärmeren, zurück zum Aequator strömenden Luftmassen absondern. Die immer mächtiger sich ausbildenden Wellen werden mit immer steiler werdender Wellenfront weitereilen, sie werden schliesslich, wie Wasserwellen, überhängend und branden; und an Stelle jedes Wellenzuges bildet sich ein gewaltiger, horizontalgelagerter Wirbel, indem sich schliesslich die beiden Luftschichten mischen. Indem durch Bildung von Diskontinuitätsflächen die Unstetigkeit erst auf die Spitze getrieben wird, bewirkt das Aufrollen derselben stetige Uebergänge in Bezug auf Rotationsmoment und Wärmegehalt, die ohne diesen Vorgang bei der Kleinheit der Koefficienten für Wärmeleitung und Reibung unmöglich wäre.

Aehnliche Verhältnisse werden auch im Innern der flüssig gedachten, rotirenden und Wärme ausstrahlenden Sonne eintreten müssen. Dies näher auszuführen ist der Zweck der nachfolgenden Betrachtungen.[1])

---

[1]) Auf die im Folgenden zu beschreibende Schichtenbildung hat, wie ich sehe, bereits M. Brillouin hingewiesen in einer kurzen Anmerkung zur französischen Uebersetzung der Abhandlung von W. Thomson: Ueber die Sonnenwärme. W. Thomson: Conférences scientifiques et allocutions. pag. 241, Anmerkung.

Wir betrachten die Sonne zur grösseren Bequemlichkeit als rotirende Kugel; die sich ergebenden Schlüsse lassen sich ohne Weiteres auch auf ein rotirendes Ellipsoid übertragen. Um eine zu rasche Abkühlung der äussersten Schichten zu verhüten, sind wir, da Wärmeleitung zu geringe Wärmemengen nach der Oberfläche transportiren würde, genöthigt, die Sonne ganz oder bis in beträchtliche Tiefen hinab als flüssige Masse aufzufassen, die durch Wärmeabgabe dichter wird, so dass durch Wärmeausstrahlung auf- und absteigende Strömungen und durch deren Mischung mehr oder minder gleichmässige Wärmeabgabe derselben bewirkt werden. Ob die Flüssigkeit kompressibel oder inkompressibel ist, ist hierbei gleichgültig. Wir behandeln den ersten Fall, als den Allgemeineren. Da wir die Zustandsgleichung so hoch temperirter und stark komprimirter Gase nicht kennen, legen wir der Rechnung die Hypothese zu Grunde, dass der ganze Theil der Sonne, den wir betrachten, die Zustandsgleichung $p$ (Druck) $\times$ $v$ (Masse der Volumeinheit) $=$ $H$ (Gaskonstante) $\times$ $T$ (absolute Temperatur) gehorcht.

Wir nehmen ferner an, dass die Masse der ganzen Sonne den Gasgesetzen gehorcht, der Durchkühlungsprocess durch Konvektionsströmung durch die ganze Masse hindurch erfolgt. Hätte die Sonne einen festen Kern, so wäre dies für das Folgende gleichgültig; die eintretende Schichtenbildung würde dann eben nur bis zur Oberfläche dieses festen Kernes hinabreichen. Diese Gaskugel soll anfangs im adiabatischen (indifferenten) Gleichgewichte stehen, d. h. Dichte, Druck und Temperatur soll durch die ganze Masse hindurch so variiren, dass ein beliebiges Sonnentheilchen bei beliebiger, vor Wärmeaustausch geschützter Verschiebung im Sonneninnern in Bezug auf Dichte, Druck und Temperatur stets mit dem augenblicklich verdrängten Theilchen übereinstimmt. In einer nicht rotirenden Kugel muss durch Mischung auf- und absteigender Strömungen dieser Zustand stets herbeigeführt werden.

Reibungskräfte sollen nur an Stellen mit endlichen Geschwindigkeitsdifferenzen zur Wirkung gelangen.

Wir betrachten die Sonne vom Nordpole aus und bezeichnen eine Bewegung im Sinne der Rotation als Vorwärtsbewegung.

Die Massen an der Oberfläche der Sonne geben Wärme ab, werden dichter und müssen in die Tiefe sinken. Würde die Sonne nicht rotiren, so würden bei dem angenommenen Gleichgewichtszustande der Sonne diese Massen bis zum Sonnenmittelpunkt herabsteigen und daselbst eine gleiche Menge Materie verdrängen, die den freigewordenen Platz an der Oberfläche ausfüllt. Dies Strömungsbild wird aber durch die Rotation der Sonne vollständig geändert.

Aus Symetriegründen sind die Flächen gleichen Druckes Rotationsflächen, die Druckkräfte schneiden die Sonnenachse und die durch Abkühlung dichter gewordenen, einwärts sinkenden Massen müssen ihr Rotationsmoment beibehalten. Der Sonnenachse sich nähernd werden sie immer rascher vorwärts eilen und ihr Abtrieb durch Wachsen der Winkelgeschwindigkeit (Zentrifugalkraft) abnehmen. Die aufsteigenden Massen werden, ihr kleineres Rotationsmoment beibehaltend, immer rascher rückwärts eilen, mit abnehmendem Auftriebe. Wir erhalten so ungleich dichte, verschieden rasch rotirende Gasmassen, die in einer ausgeprägten Diskontinuitätsfläche an einander vorbeigleiten können. Wir erhalten so Diskontinuitätsflächen, die an beliebigen Stellen im Sonneninnern auftreten können. Ueber ihre Gestalt wissen wir a priori nichts, als dass wir es wegen Symetriegründen mit Rotationsflächen, in den meisten Fällen aber wohl nur mit mehr oder minder grossen Stücken von solchen zu thun haben werden. An diese Diskontinuitätsflächen sind nun die Bedingungen für das Zustandekommen mächtiger Wellen gegeben. Zur Sonnenachse nicht windschief gelegene Wellen oder Wellenzüge werden immer gewaltiger sich ausbilden, vorwärtseilend werden sie überhängend und an Stelle jeder Welle bildet sich durch deren Brandung ein mächtiger Wirbel, in dem sich der Ausgleich der Rotationsmomente und des Wärmegehaltes der beiden Schichten vollzieht. Nur auf diese Weise kann ein gleichmässiger Durchkühlungsprocess der **rotirenden** Sonne zu Stande kommen, denn die Verschiedenheit der Rotationsmomente verhindert das Zustandekommen beträchtlicher Konvektionsströme in radialer Richtung; die innere Reibung genügt bei der Kleinheit des Reibungskoefficienten nicht, in genügend kurzer Zeit die Rotationsmomente auszugleichen, ebensowenig wie die Wärmeleitung den verschiedenen Wärmegehalt.

Dieser geschilderte Mischungsprocess soll näher untersucht werden. Wir haben in erster Linie die Gestalt und Lage dieser Diskontinuitätsflächen und dadurch die Lagerung der durch sie getrennten Sonnenschichten festzustellen.

Wir bezeichnen mit $R$ den Abstand eines Theilchens vom Sonnenmittelpunkt, mit $r$ dessen Abstand von der Sonnenachse; der Durchmesser der Sonne sei $= D$. Das Rotationsmoment der Masseneinheit, die mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um die Sonne rotirt, sei:

1) $$\Omega = \omega r^2.$$

Bezeichnen $p$ und $\varrho$ Druck und Dichte, $X$, $Y$, $Z$, $u$, $v$, $w$ Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in Richtung der $x\,y\,z$-Achsen, so lauten die hydrodynamischen Gleichungen:

2) $$\begin{aligned} X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

2^a) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0.$$

Der Anfangspunkt des Coordinatensystems werde in den Sonnenmittelpunkt gelegt; die $x$-Achse falle mit der Sonnenachse zusammen, die $y$-Achse geht durch Vorwärtsbewegung in die $Z$-Achse über. $X\ Y\ Z$ sind die Beschleunigungen, welche die Sonnenmasse einer im Innern liegenden Masseneinheit ertheilt.

Liegt diese im Abstande $R$ vom Sonnenmittelpunkt, so ist das Potential der Gesammtmasse der Sonne auf dieselbe:

$$V = -4\pi \left\{ \frac{1}{R} \int_0^R \varrho R^2 dR + \int_R^{\frac{D}{2}} \varrho R \, dR \right\}.$$

Dabei ist es gleichgültig, ob wir die Sonne mit festem Kerne oder durch die ganze Masse hindurch gasförmig annehmen. (Durch den gasförmigen Theil hindurch ist $\varrho$ als Funktion von $R$ bekannt, sobald die Adiabate, welche dessen indifferentes Gleichgewicht darstellt, und die Natur des Gases gegeben sind.) Würden wir die Sonne nicht als Kugel, sondern Ellipsoid betrachten, so wäre für das Folgende $V$ als das Potential dieses Ellipsoides aufzufassen. Stets ist:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Wir beobachten nur rotirende Bewegungen um die Sonnenachse. Dann ist:

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= -\omega z = -\frac{\Omega}{r^2} z, \\ w &= \phantom{-}\omega y = \phantom{-}\frac{\Omega}{r^2} y. \end{aligned}$$

Die 3 Gleichungen 2) vereinfachen sich, wenn die Bewegung stationär geworden, in die beiden Gleichungen:

$$\text{3)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial X} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\Omega^2}{r^3} \end{aligned}$$

$2^a$ ist identisch erfüllt.

Der Ausdruck $\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s}$, worin $s$ eine beliebige Richtung bedeutet, lässt bei adiabatischen Processen eine wichtige Umformung zu. Der Zustand der Gasmasse sei in einem bestimmten Momente definirt durch die Werthe $p_0$ u. $\varrho_0$. Behandeln wir die Gasmasse adiabatisch, so sind sämmtliche Werthe von $p$ und $\varrho$, welche die Gasmasse durchläuft, abhängig von $p_0$ u. $\varrho_0$ nach der Gleichung:

$$4)\qquad \frac{p}{\varrho^{\varkappa}} = \frac{p_0}{\varrho_0^{\varkappa}}$$

(wenn $\varkappa$ das Verhältniss der spezifischen Wärmen) und in jedem Momente muss sein:

$$4^a)\qquad \frac{p}{\varrho} = H\,T.$$

Der Wärmegehalt einer Gasmasse wird gemessen durch deren potentielle Temperatur. Dieselbe wird gewöhnlich definirt als diejenige Temperatur, die ein Gas erlangt, wenn es adiabatisch auf einen näher festzusetzenden Normaldruck gebracht wird. Da im Gegensatz zu einem solchen willkürlichen Normaldruck die Dichte eins eine durch das absolute Messsystem unmittelbar und eindeutig festgesetzte Grösse ist, dürfte die folgende Definition der potentiellen Temperatur zweckmässiger sein, da sie ausserdem die Formeln sehr vereinfacht, so oft die potentielle Temperatur in dieselbe eintritt:

Potentielle Temperatur ist diejenige Temperatur, die ein Gas erlangt, wenn es adiabatisch auf die Dichte eins gebracht wird. Diese Temperatur bezeichnen wir mit $\Theta$.

Durch diese Festsetzung ist ohne weiteres auch ein potentieller Druck definirt als derjenige Druck, den das Gas ausübt, wenn es adiabatisch auf die Dichte eins gebracht wird. Dieser sei mit $\Pi$ bezeichnet. $\Pi$ und $\Theta$ ändern sich bei adiabatischer Behandlung nicht. Ist die Sonne im adiabatischen Gleichgewicht, so haben $\Pi$ und $\Theta$ durch die ganze Sonnenmasse hindurch konstante Werthe. Strahlt ein Sonnentheilchen Wärme aus, so sinken dessen $\Pi$ und $\Theta$.

Nach 4$^a$) stehen $\Pi$ und $\Theta$ in der Beziehung:

$$\Pi = H \cdot \Theta.$$

Wählen wir in Gl. 4 für $\varrho_0$ und $p_0$ die Werthe

$$\varrho_0 = 1 \text{ u. } p_0 = \Pi,$$

so lautet die Gleichung der Adiabate:

$$p = \varrho^{\varkappa} \cdot \Pi \Theta.$$

Diese Festsetzungen benützend können wir schreiben:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} = (\Pi \cdot \Theta)^{\frac{1}{\varkappa}} p^{-\frac{1}{\varkappa}} \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot (\Pi \cdot \Theta)^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{\partial p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{\partial s}.$$

Setzen wir:

5) $$\vartheta = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} (\Pi\, \Theta)^{\frac{1}{\varkappa}}, \quad \pi = p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},$$

so wird:

6) $$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} = \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial s}, \quad \vartheta = \text{constans}.$$

Da $\varkappa > 1$, so ändert sich $\vartheta$ gleichsinnig mit $\Theta$, und kann deshalb ebenfalls als Mass für den Wärmegehalt einer Gasmasse dienen. Ebenso ändert sich $\pi$ gleichsinnig mit $p$. An Stelle der beiden Variabeln $\varrho$ und $p$ haben wir nur noch Eine, $\pi$, da $\vartheta$ bei adiabatischen Processen konstant bleibt. Bei adiabatischem Gleichgewicht hat $\vartheta$ durch die ganze Sonnenmasse hindurch denselben Werth.

Durch den oben geschilderten Abkühlungs- und Strömungsvorgang können sich in der Sonne Schichten bilden, innerhalb welchen Wärmegehalt und Rotationsmoment konstante Werthe besitzen, während beide Grössen von einer Schicht zur andern sprungweise sich ändern. Eine solche Schicht, innerhalb welcher $\vartheta$ und $\Omega$ konstante Werthe besitzen, nennen wir eine h o m o g e n e Schicht.

Mit Benutzung der eingeführten Bezeichnungen lauten die Gleichungen 3):

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\Omega^2}{r^3}.$$

Innerhalb einer homogenen Schicht gilt also die Beziehung:

$$\text{I.} \qquad V + \vartheta \pi = -\tfrac{1}{2}\frac{\Omega^2}{r^2} + C.$$

Wir betrachten nun zwei aneinander grenzende Schichten 1 und 2 und unterscheiden danach $\vartheta_1\ \Omega_1\ C_1$ von $\vartheta_2\ \Omega_2\ C_2$.

Damit eine Diskontinuitätsfläche bestehen kann, muss zu beiden Seiten derselben der Druck, und somit auch $\pi$, denselben Werth haben. An jeder Stelle der Grenzfläche muss also sein:

$$\pi_1 - \pi_2 = 0,$$

wobei längs derselben $\pi_1$ und $\pi_2$ variiren und an der Oberfläche der Gaskugel die Werthe $\pi_1 = \pi_2 = 0$ annehmen.

Wir erhalten demnach als Gleichung der Meridiankurve der Diskontinuitätsfläche (Berührungsflächen zweier homogenen Schichten), ausgedrückt durch $r$ und $R$:

$$\text{II.} \qquad V\left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_1}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}\right) - \frac{C_1}{\vartheta_1} + \frac{C_2}{\vartheta_2}.$$

Die Tangentenrichtung dieser Meridiankurve ergiebt sich durch Differenziren nach $r$ und $R$ zu:

$$\frac{dV}{dR}\,dR = \frac{dr}{r^3}\left(\frac{\Omega_1^2\vartheta_2 - \Omega_2^2\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}\right)$$

oder:

$$\text{III.} \qquad \frac{dr}{dR} = r^3\frac{dV}{dR}\cdot\left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2\vartheta_2 - \Omega_2^2\vartheta_1}\right).$$

Der Differentialquotient hat also stets dasselbe Vorzeichen wie $\dfrac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2\vartheta_2 - \Omega_2^2\vartheta_1}$.

Verschwindet dieser Ausdruck, was für $\vartheta_2 = \vartheta_1$, $\Omega_1 = \Omega_2$ der Fall ist, so geht die Meridiankurve über in eine Parallele zur Sonnenachse.

Die Trennungsfläche von Schichten, die bei gleichem Wärmegehalt verschiedenes Rotationsmoment besitzen, sind in diesem Specialfalle Kreis-Cylinderflächen, parallel und zentrisch zur Sonnenachse gelegen.[1])

Um im allgemeineren Falle weiteren Einblick in die Formen dieser Flächen und die Lagerung der Schichten 1 und 2 zu erhalten, benützen wir das von Helmholtz bei Behandlung der Diskontinuitätsflächen der Atmosphäre angewendete Verfahren.

Die Gleichung der Trennungsfläche lautet $\pi_1 - \pi_2 = 0$ und für jede Richtung $s$ innerhalb der Trennungsfläche ist deshalb

$$\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial s} = 0.$$

Ertheilen wir der Fläche einer Stelle eine kleine Deformation, so werden $\pi_1$ und $\pi_2$ sich ändern, und ebenfalls $\pi_1 - \pi_2$, falls das Gleichgewicht der Fläche nicht zufällig indifferent ist. Entfernen wir uns auf der Fläche auf der Normalen um die kleine Strecke $\partial n$, so kann der Quotient $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial n}$ positiv oder negativ sein, und dasselbe Vorzeichen hat bei stetiger Druckvertheilung auf jeder Seite der Fläche auch der Quotient $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial h}$, wobei $\partial h$ in beliebiger Richtung zurückgelegt wird. Ist der Differentialquotient positiv, so wird bei dieser Deformation nach dieser Seite hin ein Ueberdruck entstehen, der die Fläche wieder zurückdrängt; das Gleichgewicht der Fläche ist dann stabil. Wäre der Differentialquotient negativ, so würde die auftretende Druckdifferenz die Deformation vergrössern und das Gleichgewicht wäre labil. Zur Entscheidung des Gleichgewichts genügt es, den Differentialquotienten nach den beiden Richtungen $d\,r$ und $d\,R$ zu bilden und zu sehen, in welche Schicht bei stabilem Gleichgewicht $d\,r$ oder $d\,R$ hineinragt.

Wir bilden erst $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial R}$ bei konstantem $r$, d. h. wir gehen parallel zur Sonnenachse nach aussen. Gleichung I. liefert:

$$\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial R} = \frac{\partial V}{\partial R}\left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_1}\right). \tag{7}$$

---

[1]) Vergl. E. J. Wilczynski: Hydrodynamische Untersuchungen mit Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. Inauguraldissertation, Berlin 1897, pag. 8.

Der Differentialquotient ist $+$, wenn $\vartheta_1 > \vartheta_2$, also: wenn die wärmehaltigere Schicht in Richtung nach dem Sonnenpol höher liegt, ist das Gleichgewicht der Fläche stabil.

Dabei bleiben noch zwei Möglichkeiten offen. Gehen wir auf der Trennungsfläche nach aussen, so können wir uns der Sonnenachse nähern oder von ihr entfernen. Im ersten Falle müsste die wärmehaltigere Schicht auf der der Achse abgewendeten Seite der Fläche liegen; im zweiten Falle wäre die Lage derselben auf der der Sonnenachse zugewendeten Seite. Um dies zu entscheiden, bilden wir aus I. $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial r}$ bei konstantem $R$ und erhalten:

$$8)\qquad \frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial r} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}\right).$$

Der Differentialquotient ist positiv, wenn $\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} > \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}$, d. h. wenn zum grössern Rotationsmoment $\Omega_1$ der kleinere Wärmegehalt $\vartheta_1$ oder ein höchstens gleicher Wärmegehalt $\vartheta_2$ gehört. In der vor Ausstrahlung geschützten Sonne hat $\vartheta$ überall denselben Werth, $\Omega$ nimmt von der Achse nach dem Aequator hin zu. Bei der Ausstrahlung nimmt $\vartheta$ gleichmässig über die ganze Oberfläche ab, so dass $\frac{\Omega^2}{\vartheta}$ vom Pol zum Aequator hin und von der Sonnenachse senkrecht nach aussen wächst. Auch tritt die Abkühlung, Abnahme von $\vartheta$, ein für die an der Oberfläche liegenden, niedersinkenden Massen, also grösseres $\Omega$, während die aufsteigenden Massen mit grösserem $\vartheta$ und kleinerem $\Omega$ beladen sind. In den Schichten der Sonne wird deshalb stets zum grössern $\Omega$ das kleinere $\vartheta$ gehören.

Bewegen wir uns auf einer Kugelfläche, die wir um den Sonnenmittelpunkt legen, so liegt bei stabilem Gleichgewicht die Schicht mit grösserem Wärmegehalt und kleinerem Rotationsmoment auf der der Sonnenachse zugewandten Seite der Trennungsfläche.

Die Trennungsflächen der Schichten, die sich in der rotirenden Sonne durch Wärmeausstrahlung bilden müssen, liegen also der Art, dass wir bei der Bewegung auf derselben uns von der Sonnenachse entfernen, wenn wir nach aussen gehen. Dabei liegt die an Wärme reichere, mit kleinerem Rotationsmoment behaftete Schicht auf der der Sonnenachse zugewandten Seite.

In Uebereinstimmung damit zeigt III, dass $\frac{dr}{dR}$ positiv ist.

Gehen wir parallel zur Sonnenachse nach aussen, so treffen wir stets auf wärmereichere Schichten, ebenso, wenn wir auf einer Kugelfläche von der Aequatorebene her uns der Sonnenachse nähern. Auf keinem dieser beiden Wege können wir deshalb dieselbe Trennungsfläche zweimal durchqueren. Daraus folgt:

Die Trennungsflächen sind keine geschlossenen Flächen, sondern Rotationsflächen, welche die Sonnenoberfläche schneiden.

Der Schnittwinkel ist bestimmt durch den Werth von $\frac{dr}{dR}$ an der Sonnenoberfläche.

Ueber die Gestalt dieser Fläche lässt sich im Allgemeinen wenig aussagen; sie ist bestimmt durch $\frac{dr}{dR}$. Aus III. folgt:

$$\frac{dr}{dR} = r^3 \frac{dV}{dR} \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2 \vartheta_2 - \Omega_2^2 \vartheta_1} = r^3 \cdot f \cdot (R) \cdot \varphi(\Omega \cdot \vartheta).$$

Die Funktion $f(R) = \frac{dV}{dR}$ kann, wenn die Gaskonstante und das Verhältniss der specifischen Wärme der Sonnenmassen bekannt ist, für den adiabatischen Gleichgewichtszustand mit genügender Genauigkeit berechnet werden.[1]) Vom Werthe 0 im Mittelpunkte steigt sie, um nach Ueberschreitung eines

---

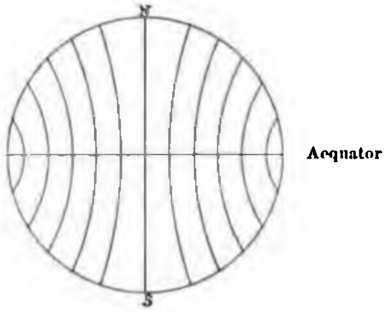
[1]) Ritter, Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Konstitution gasförmiger Weltkörper. Wied. Annal. XI. pag. 332. 1880.

Maximums, dessen Lage auf dem Radius durch $\varkappa$ bedingt ist, bis zum Werthe $-g$ auf der Oberfläche abzunehmen. Ueber den Werth der Funktion $\varphi(\Omega\,\vartheta)$ können wir ohne Kenntniss der Grösse $\Omega$ und $\vartheta$ nichts aussagen, als dass sie $+$ ist und mit steigender Differenz des Wärmegehaltes beider Schichten zunimmt. Legen wir eine Ebene durch die $x$ (Sonnen-) und $y$-Achse, so können wir die Gleichung für $\frac{dr}{dR}$ auch schreiben

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x}\left(\frac{R}{r^3 f(R)\,\varphi(\Omega\,\vartheta)} - y\right)$$

und sehen daraus, dass die Trennungsflächen die Aequatorebene senkrecht durchsetzen und an derselben Stelle im Sonnen-

Fig. 1.




innern die Tangente an der Meridiankurve um so steiler auf der Aequatorebene steht, je kleiner $\varphi(\Omega\,\vartheta)$ ist. Die Trennungsflächen sind also um so gekrümmter, je mehr sich die beiden benachbarten Schichten in Bezug auf Wärmegehalt und Rotationsmoment unterscheiden. Wären nur die Rotationsmomente, nicht auch die potentiellen Temperaturen derselben verschieden, so wären die Trennungsflächen Cylinderflächen parallel zur Sonnenachse.

Die Form der Trennungsflächen ist in vorstehender Figur angedeutet.

Ein Zerfallen der rotirenden Sonne in eine beliebig grosse Zahl solcher homogener Schichten würde einen stabilen Gleichgewichtszustand derselben darstellen, falls wir die Reibung an den Trennungsflächen vernachlässigen, und die Schichten so geordnet sind, dass bei Bewegung auf der Aequatorebene nach aussen stets Schichten mit grösserem $\Omega$ und kleinerem $\vartheta$ angetroffen werden.

Jede dieser rotirenden Schichten zeigt nun gänzlich anderes Verhalten wie die als Ganzes rotirend gedachte Sonne. Während letztere durch die ganze Masse hindurch dieselbe potentielle Temperatur besitzt, ist diese hier nur innerhalb einer Schicht konstant und wechselt von einer Schicht zur andern sprungsweise. In jeder Schicht ist das Rotationsmoment ebenfalls konstant; der kleinste Impuls genügt daher, um ein Massentheilchen eine Schicht in beliebiger Richtung durchqueren zu lassen. In jeder Schicht existirt ein Geschwindigkeitspotential, während die Rotation der Sonne eine Wirbelbewegung darstellt. Innerhalb einer Schicht wächst die Winkelgeschwindigkeit umgekehrt wie das Quadrat des Rotationsradiuses, die lineare Geschwindigkeit umgekehrt wie die erste Potenz, die Zentrifugalkraft umgekehrt wie die dritte Potenz desselben. Die Differenzen der linearen Geschwindigkeit an der Berührungsfläche zweier Schichten ist deshalb nicht konstant, sondern nimmt in dem Masse zu, wie sich die Trennungsfläche der Achse nähert. Je tiefer sich eine Trennungsfläche in das Sonneninnere hinabzieht, um so grösser wird die Differenz der sich tangirenden Geschwindigkeit und deshalb der Effekt der Reibung längs der Trennungsfläche.

Die Bildung dieser Schichten und die Gestalt der Trennungsflächen ist offenbar vollständig unabhängig von der Anwesenheit eines festen Kernes in der Sonne. In letzterem Falle wird sich die Schichtbildung eben nur bis zur Oberfläche hinabziehen und der feste Sonnenkern mit der zur Photosphäre reichenden, geschichteten Gashülle vollständig der Erde mit der geschichteten Atmosphäre entsprechen. Der Unterschied ist nur der, dass die Lagerung der Schichten und der Trennungsflächen, wie sie der Sonne entsprechen, in der Atmosphäre der Erde, wo in der Regel die Tangente an die Meridiankurve der Trennungsfläche der Schichten das Himmelsgewölbe zwischen Horizont und Pol schneidet, nur ausnahmsweise und lokal beschränkt auftreten kann. Der Grund hierfür liegt darin, dass in der am Aequator geheizten Atmosphäre beinahe stets zum grössern Rotationsmoment der grössere Wärmegehalt gehört, durch Heizung der Quotient $\frac{\Omega}{\vartheta}$ abnimmt, während in den sich berührenden Schichten der Sonne zum grössern Rotationsmoment der geringere Wärmegehalt gehört, da durch Abkühlung $\frac{\Omega}{\vartheta}$ zunimmt.

Tritt an der Trennungsfläche solcher Schichten Mischung ein zwischen den Mengen $m_1$ und $m_2$ der durch $\Omega_1\,\vartheta_1$ und $\Omega_2\,\vartheta_2$ charakterisirten Schichten, so lassen sich das Rotationsmoment $\Omega$ (da nur innere Kräfte wirken) und die potentielle Temperatur $\vartheta$ der Mischung nach dem Schwerpunktssatze berechnen zu:

$$(m_1 + m_2)\,\Omega = m_1\,\Omega_1 + m_2\,\Omega_2$$
$$(m_1 + m_2)\,\vartheta = m_1\,\vartheta_1 + m_2\,\vartheta_2.$$

Gleichung III lautete:

$$\frac{d\,V}{d\,R}\cdot\frac{d\,R}{d\,r} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{\Omega_1^2\,\vartheta_2 - \Omega_2^2\,\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}\right).$$

Der Index 1 beziehe sich auf die wärmehaltigere Schicht. Um die Lage der Grenzfläche der Mischung gegen Schicht 1 zu finden, die durch $\frac{d\,r_1}{d\,R_1}$ bezeichnet werden möge, haben wir in dieser Gleichung an Stelle von $\Omega_2$ und $\vartheta_2$ $\Omega$ und $\vartheta$ zu setzen und finden:

$$\frac{d\,V}{d\,r}\left(\frac{d\,R_1}{d\,r_1} - \frac{d\,R}{d\,r}\right) = \frac{m_1\,\vartheta_1}{m_1 + m_2}\,\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2}{\vartheta_2 - \vartheta_1},$$

da $\vartheta_1 > \vartheta_2$ ist:

$$\frac{d\,r_1}{d\,R_1} > \frac{d\,r}{d\,R}.$$

Die neue Trennungsfläche gegen Schicht 1 ist also stärker gegen die Aequatorebene geneigt, wie die ursprüngliche. Ebenso erhalten wir für $\frac{dR_2}{dr_2}$, welches die Lage der Trennungsfläche der Mischung gegen Schicht 2 angiebt, nach demselben Verfahren:

$$\frac{dV}{dr}\left(\frac{dR_2}{dr_2}-\frac{dR}{dr}\right)=\frac{m_2\,\vartheta_2}{m_1+m_2}\,\frac{(\Omega_1-\Omega_2)^2}{\vartheta_1-\vartheta_2},$$

also:

$$\frac{dr_2}{dR_2}<\frac{dR}{dr}.$$

Die neue Trennungsfläche gegen Schicht 2 steht also steiler auf der Aequatorebene wie die ursprüngliche. Von dem beliebigen Punkte der Trennungsfläche an, an dem die Mischung sich vollzieht, suchen sich also zwei neue Trennungsflächen in die Schichten 1 und 2 hineinzuziehen, einen dachförmigen, gegen die Aequatorebene hin offenen Raum abgrenzend. Die gemischten Partieen müssen sich deshalb längs der ursprünglichen Trennungsfläche äquatorwärts (in der Atmosphäre der Erde unter normalen Verhältnissen polwärts) in Bewegung setzen. In dem Masse, wie immer mehr Massen zur Mischung gelangen, wird die gemischte Schicht auch längs der Trennungsfläche nach aussen an Raum gewinnen und zwischen die ursprünglichen sich berührenden Schichten lagert sich eine neue Schicht mit mittlerem Rotationsmoment und Wärmegehalt ein.

Nun ist es wohl ausgeschlossen, dass die Sonne oder der gasförmige Theil derselben vollständig in eine mehr oder minder grosse Anzahl solcher homogener Schichten zerfällt. Wir haben uns die in Wirklichkeit eintretenden Verhältnisse vielmehr so vorzustellen, dass bei der von aussen her stattfindenden Abkühlung der rotirenden Sonne mehr oder minder ausgedehnte Stücke dieser Diskontinuitätsflächen sich bilden werden. Die Verschiedenheit der linearen Geschwindigkeit zu beiden Seiten der Trennungsfläche regt dieselbe zu immer mächtigerer Wellenbildung an, Wellen, die schliesslich überhängend werden und branden und sich dadurch in gewaltige

Wirbel verwandeln, innerhalb deren sich die Mischung eines grossen Theils der Massen beider Schichten vollzieht. Inzwischen werden sich an anderen Stellen neue Trennungsflächen neu entstandener Schichten gebildet haben, an denen sich derselbe Mischungsprocess wiederholt. Einzig und allein durch diesen Mechanismus, der nichts Hypothetisches an sich hat und in einer flüssigen, rotirenden, Wärme ausstrahlenden Masse mit Nothwendigkeit sich einstellen muss, kann eine gleichmässige Durchkühlung der Sonnenmasse eintreten und ein viel zu rasches Erkalten der äusseren Schichten verhindert werden. Denn Wärmeleitung und innere Reibung der Gase sind zu gering, den Ausgleich des Wärmegehaltes und der Rotationsmomente zu besorgen. Nur durch die geschilderte Bildung von Diskontinuitätsflächen und deren Aufrollen können durch Mischung verschiedene Rotationsmomente und potentielle Temperaturen ausgeglichen werden.

Wir haben bereits gezeigt, dass in einer homogenen Schicht die Winkelgeschwindigkeit im Quadrat des Abstandes von der Rotations- (Sonnenachse) abnimmt. Daraus folgt, dass es unmöglich ist, von einer Winkelgeschwindigkeit der rotirenden Sonne zu sprechen. Würde die Sonne zufällig einmal überall mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiren, so würde diese Konstanz durch die auftretende Schichtenbildung und Mischung gestört werden. Die Winkelgeschwindigkeit muss variabel sein sowohl durch die ganze Sonnenmasse hindurch, als an derselben Stelle im Laufe der Zeit. Sie braucht in einem bestimmten Moment auch nicht stetig durch die Masse zu variiren, sondern wird an einer Diskontinuitätsfläche sich sprungweise ändern. Schneidet eine Diskontinuitätsfläche die Sonnenoberfläche (Photosphäre), so erhalten wir Partien, die daselbst mit ungleicher Winkelgeschwindigkeit aneinander vorbeigleiten. Dieselbe Ueberlegung gilt aber auch hinsichtlich der potentiellen Temperaturen. Wäre $\varkappa$ für die Sonnenmasse und jene Funktion $\varphi\,(\Omega\,\vartheta)$ bekannt, so liesse sich eine mittlere Vertheilung der Winkelgeschwindigkeiten (Rotationsmomente) und potentiellen Temperaturen angenähert berechnen. In Ermanglung dessen müssen wir uns mit folgendem allgemeinen Raisonnement begnügen.

Kühlt sich die nicht rotirende Sonne von aussen her ab, so wird die Wirkung der Abkühlung auf die ganze Oberfläche gleichförmig sein, da die durch Konvektionsströmung bewirkte Mischung bis in gleiche Sonnentiefen hinabreicht. Rotirt die Sonne, so werden jene Strömungen, die sich an den Polen längs der Sonnenachse vollziehen, in keiner Weise gestört. Je näher wir aber dem Aequator kommen, desto weniger tief kann die Strömung hinabgehen, desto näher der Oberfläche wird sie durch Bildung von Diskontinuitätsflächen gehemmt und der Wärmeaustausch kann nur durch Aufrollen derselben und Bildung neuer ungleich langsamer in die Tiefe fortschreiten. Der Wärmeverlust der äquatorialen Partien wird deshalb langsamer ersetzt als der polaren Gegenden, die potentiellen Temperaturen der letzteren müssen deshalb verhältnissmässig höher werden. Da aber unter gleichen Drucken die wirklich beobachteten Gastemperaturen mit den potentiellen Temperaturen wachsen, so würde der Satz folgen:

a) Die Sonnenoberfläche muss in den polaren Gegenden höhere Temperaturen besitzen wie am Aequator.

Ob diese Temperaturdifferenz gross genug ist, um durch Strahlungsmessungen festgestellt zu werden, muss die Erfahrung lehren.

Ganz dieselben Ueberlegungen können wir anstellen bezüglich den Austausch der Rotationsmomente (Winkelgeschwindigkeiten) in polaren und äquatorialen Gegenden. Die äusseren Sonnenportionen ziehen sich durch Abkühlung zusammen, ihre Winkelgeschwindigkeit vergrössert sich und die Hülle muss dem Kern voraneilen. Die in polaren Gegenden ungestört in grösste Tiefen hinabreichenden Konvektionsströme sorgen für Ausgleich der Winkelgeschwindigkeit. Je näher wir dem Aequator kommen, desto bälder wird die Strömung durch Diskontinuitätsflächen gehemmt und desto langsamer theilt sich durch fortwährendes Aufrollen und Neubildung derselben die von aussen wachsende Winkelgeschwindigkeit den tiefern Partien mit. Daraus folgt der bekannte Satz:

b) Die Sonnenoberfläche muss in ihren äquatorialen Gegenden grössere Winkelgeschwindigkeiten besitzen wie in den polaren Gegenden.

Sätze a) und b) sind Parallelsätze, die auf derselben Ursache basiren.

Ausser durch die Verhinderung einer gleichmässigen Winkelgeschwindigkeit der rotirenden Sonne machen sich diese Diskontinuitätsflächen, namentlich der Process ihres Aufrollens, noch in anderer Weise bemerkbar.

Die Verschiedenheit der linearen Geschwindigkeiten veranlassen die Flächen und Wellen, die schliesslich überhängend werden und branden. An Stelle jeden Wellenzuges entsteht ein gewaltiger Wirbel, der im Sinne der Rotationsbewegung der Sonne rotirt und nicht windschief zur Sonnenachse liegt. Die Differenz der linearen Geschwindigkeit zu beiden Seiten dieser Trennungsfläche wächst (pag. 352) mit deren Annäherung an die Sonnenachse. Der Ort maximaler Wellen- und Wirbelbildung wird deshalb im Innern der Sonne, nicht an der Oberfläche derselben zu suchen sein. In Fig. 2 ist ein solcher Wirbel seiner Lage nach skizzirt. Die Theorie der Wirbel lehrt, dass in seiner Achse der Druck sinkt. In Richtung der Achse saugt der Wirbel deshalb Masse ein, um sie in andern Theilen wieder auszuwerfen. Diese Saugwirkung der Cyklone der Atmosphäre ist bekannt; jeder vertikale Wirbel in einem Flusse macht sich in einer Depression der Oberfläche geltend. Liegt der Wirbel, der sich durch Aufrollen der Diskontinuitätsfläche bildet, der Sonnenoberfläche nicht zu fern, so wird er sich in jener ebenso bemerkbar machen, wie der Wasserwirbel in der Oberfläche des Wassers. Giebt man die Wilson'sche

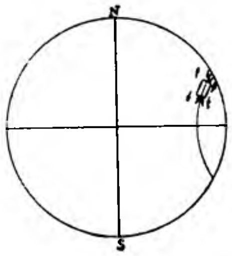



Fig. 2.

Theorie der Beschaffenheit der Sonnenflecke als Vertiefungen in der Sonnenoberfläche zu, so brauchen wir die Ursache derselben nur in diesen Wirbeln im Sonneninnern zu suchen, um eine befriedigende Erklärung des Meisten zu erhalten, was wir über die Flecken und ihre Begleiterscheinungen wissen.

Es kann nicht im Rahmen dieser Abhandlung liegen, das ganze ungeheure Beobachtungsmaterial über Sonnenflecke in Hinsicht auf diesen Erklärungsversuch eingehend zu behandeln. Es genüge hier zu zeigen, dass die charakteristischen Erscheinungen, welche die Sonnenflecken darbieten, beinahe a priori vorausgesagt werden können, wenn wir sie mit diesen Wirbeln im Sonneninnern in Verbindung bringen.

Rollt sich eine Diskontinuitätsfläche nicht zu entfernt von der Sonnenoberfläche auf, so wird der sich ausbildende Wirbel sich allmählich auch auf derselben bemerkbar machen. Unruhe der Oberfläche, vermehrte Fackelbildung sind Vorboten des sich bildenden Fleckes, nach unserer Auffassung ein Beweis, dass die Mühle im Innern der Sonne bereits im Gange ist. Die Saugwirkung des Wirbels wird bald die an der Oberfläche der Photosphäre gelegenen Massen ergreifen. An einem oder mehreren Punkten beginnt die Masse einzusinken. Es bildet sich ein höchst unregelmässiger Krater aus; die Strömung wird allmählich stationär, und in demselben Grade wird der Krater regelmässigeren Querschnitt annehmen. In radialen Strömen stürzen die photosphärischen Massen in diesen Krater hinein, das Aussehen der Absorptionslinien im Spektrum zeigt die heftige Bewegung im Innern dieses Strudels an. „Dunklere Theile, wie der übrige Kern, sind wahrscheinlich Oeffnungen röhrenartiger Vertiefungen, welche in unbekannte Tiefen eindringen“ (Dawes).

Die eingesogenen Massen müssen durch Massen aus dem Sonneninnern ersetzt werden, und der Sonnenfleck wird deshalb von einem an Fackeln und Protuberanzen reichen Gebiete umgeben sein. „Ein Fleck ist thatsächlich in der Regel von einem Ringe von Eruptionen umgeben, und es hat den Anschein, als ob die ausbrechenden Massen sämmtlich in ein und dieselbe Vertiefung strömten, als ob die Massen wirklich hinabgesogen würden, als ob der Fleck eine saugende Wirkung ausübte, die stark genug ist, um die in der Umgebung des Fleckes hervorbrechenden Massen in das Innere des Fleckes hinabzuziehen" (Young).

Erschöpft sich allmählich im Sonneninnern der Wirbel durch innere Reibung, so lässt dessen Saugwirkung nach, der Krater an der Sonnenoberfläche füllt sich aus und nur die noch einige Zeit andauernde, vermehrte Fackelthätigkeit an dieser Stelle zeigt, dass im Sonneninnern an dieser Stelle noch Kräfte thätig sind, die allmählich erlöschen. Wird, während der Wirbel noch in Thätigkeit ist, durch eintretende Unsymmetrie das Zuströmen nicht in Richtung der Achse erfolgen, so kann der Krater an der Sonnenoberfläche verschwinden, um nach Erneuerung des symmetrischen Zuflusses wieder zu erscheinen. Auf diese Weise können Sonnenflecke mehrmals verschwinden und an derselben Stelle der Sonne wieder aufbrechen. Entstehen die Wellen und Wirbel in zu grosser Tiefe, so wird sich ihr Auftreten auf der Sonnenoberfläche nur in vermehrter Fackelthätigkeit, nicht mehr in Kraterbildung, bemerkbar machen. Auf diese Weise lassen sich auch die „verschleierten Flecke" erklären, auf die Trouvelot aufmerksam machte. (Vgl. Young, Die Sonne, pag. 129.)

Entsteht der Wirbel nahe der Sonnenoberfläche, so wird sich sein Rotationssinn (im Sinne der Sonnenrotation) auch in einer gleichsinnigen Drehbewegung des Flecks bemerkbar machen müssen, wie sie auch zuweilen beobachtet wird. In den meisten Fällen entsteht der Wirbel in beträchtlichem Abstand von der Sonnenoberfläche, so dass der Drehsinn des Fleckes in erster Linie bedingt ist durch unsymmetrisches Herbeiströmen der angesogenen Massen. Die ablenkende Kraft der Sonnenrotation auf diese Strömungen ist bei der langsamen Winkelgeschwindigkeit derselben gering (unter gleicher Breite und bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit etwa 25 mal kleiner als auf der Erde), besonders in den niederen Breiten, in denen sich die

Mehrzahl der Flecke ausbildet. Es kann deshalb auch sehr wohl vorkommen, dass in demselben Fleck je nach der Unsymmetrie des Anströmens verschiedener Drehsinn herrscht.

Aussehen, Entstehen und Verschwinden der Flecke wird, sobald man diese wie Wilson betrachtet, vollständig durch dies Aufrollen der Diskontinuitätsflächen klar gelegt. Ebenso befriedigend wird dadurch auch die Vertheilung der Flecke über die Sonnenoberfläche hinweg erklärt. Die Art und Weise des Entstehens der Schichtbildung und Betrachtung der Fig. 1 lehrt, dass um den Aequator herum eine Zone minimaler Flecken häufig vorhanden sein muss. Nur äusserst selten kann eine, vielleicht unsymmetrisch ausgebildete, Trennungsfläche durch unsymmetrisches Aufrollen einen Fleck in diesen Regionen verursachen. Auch in höheren Breiten werden sich selten Diskontinuitätsflächen bilden und dann nur solche, bei denen erst in grossen Tiefen genügende Differenz der linearen Geschwindigkeiten zu beiden Seiten und dadurch Wellen- und Wirbelbildung zu Stande kommt. In höheren Breiten werden wir wohl Fackeln, auch verschleierte Flecke, aber keine ausgebildeten Flecke mehr antreffen. Der Ort maximaler Fleckenhäufigkeit sind mittlere Breiten, jene Breiten maximaler Schichtbildung, die sich auch an der Oberfläche durch grösste Verschiedenheit in der stetigen Anordnung der Winkelgeschwindigkeit verrathen. Wäre jene Funktion $\varphi\,(\Omega\,\vartheta)$ bekannt, so liesse sich der Ort maximaler Fleckenhäufigkeit berechnen. So lange dies nicht möglich ist, müssen wir eher umgekehrt aus der Fleckenhäufigkeit auf die Stelle maximaler Schichtbildung schliessen. Die meisten Trennungsflächen müssen sich deshalb in mittleren Breiten bilden, wo die Tangentenrichtung an die der Sonnenoberfläche näher liegenden Theile derselben letztere unter $10^0$ bis $40^0$ Breite schneidet, da zwischen diese Grenze die Fleckenzone (mit seltenen Ausnahmen) eingeschlossen ist. Diese Orte maximaler und ausgeprägtester Schichtbildung haben durchaus nichts Unwahrscheinliches an sich, so dass wir auf Grund unserer Hypothese die Vertheilung der Flecken rein mechanisch und ungezwungen erklären können.

Häufig treten Sonnenflecke in gleicher Breite serienweise angeordnet auf. Unsere Hypothese lässt dies voraussehen. Denn eine Diskontinuitätsfläche bildet öfters nicht eine Welle, sondern es folgen mehrere Wellen aufeinander. Jedem Wellenzuge entspricht bei der Auflösung desselben ein Wirbel, und jedem Wirbel kann ein Sonnenfleck entsprechen. So entstehen Flecke, die ungefähr unter gleicher Breite liegend zu ziemlich gleichen Zeiten auftreten. (Eine Serie Sonnenflecke und ein System parallel gelagerter Cirrusstreifen in unserer Atmosphäre werden durch den gleichen Mechanismus hervorgerufen.)

Nach einer Periode geringster Fleckenhäufigkeit beginnen die wieder zahlreicher auftretenden Flecke sich in höheren Breiten zu bilden und die Fleckenbildung schreitet dann nach niedrigeren Breiten fort. Unsere Hypothese lässt auch dies voraussehen. Ist die Sonnenmasse in einer Periode grösster Ruhe, so werden die an der Oberfläche erkaltenden Massen verhältnissmässig stark sich abkühlen können, ehe sie niedersinken. Die Diskontinuitätsflächen beginnen in grösserer Tiefe und höherer Breite sich zu bilden und ebenso die Sonnenflecke. In dem Masse, wie die Sonne unruhiger wird, wird das labile Gleichgewicht der erkaltenden Massen an der Oberfläche rascher ausgelöst; die Massen müssen früher, weniger stark erkaltet niedersinken und dementsprechend bilden sich Schichten und Flecke in immer niedereren Breiten.

Durch Auslösung dieses labilen Gleichgewichtes können möglicherweise Planeten die Fleckenerscheinungen beeinflussen.

Werden die Sonnenflecke durch Wirbel verursacht, so müssen sie auch Eigenbewegung besitzen. Ein gerader Wirbelfaden in einer unendlich ausgedehnten ruhenden Flüssigkeitsmasse wird keine Eigenbewegung besitzen. Liegt er aber in der Nähe einer festen Wand oder der Flüssigkeitsoberfläche diesen parallel, so wird er sich diesen parallel bewegen im gleichen Sinne, wie in Folge seiner Rotationsbewegung die Flüssigkeit zwischen Wirbel und Wand hindurchströmt und mit einer Geschwindigkeit $= \frac{1}{4}$ derjenigen, mit welcher die Flüssigkeit im Fusspunkte des auf die feste Wand gefällten

Lothes strömt. Die Wirbel im Sonneninnern liegen nicht parallel der Sonnenoberfläche, zerlegen wir sie aber in zwei Wirbelkomponenten senkrecht und parallel der Sonnenoberfläche, so wird namentlich für Wirbel in niederen Breiten letztere beträchtlichen Werth besitzen. In niederen Breiten müssen die Wirbel, namentlich wenn sie nicht in zu grosser Tiefe liegen, Eigenbewegung besitzen und zwar im Sinne der Rotationsbewegung der Sonne dieser voraneilen. So erklärt sich der Satz von Duner, dass sich aus Sonnenfleckenbeobachtungen eine grössere Rotationsgeschwindigkeit der Sonne ergiebt, wie aus Spektralbeobachtungen auf Grund des Doppler'schen Princips. Nicht senkrecht zu einander gestellte Wirbel beeinflussen gegenseitig ihre Eigenbewegung; dadurch lassen sich die verwickelten Eigenbewegungen der Sonnenflecke erklären, die Faye denselben zuschreibt. Dass ein Wirbel (Sonnenfleck) sich in mehrere Wirbel theilt, kann entsprechend an den Wasserwirbeln in einem Flusse häufig beobachtet werden.

Da nach dieser Erklärung die Flecke Folgeerscheinungen des Mischungsprocesses der rotirenden Sonne sind, so wird zur Zeit ihrer maximalen Häufigkeit der Wärmeverlust der Sonnenoberfläche am vollkommensten durch Mischung mit tiefer liegenden, wärmehaltigeren Massen ausgeglichen werden. Die Zeiten maximaler Fleckenhäufigkeit werden demnach mit Zeiten erhöhter Wärmestrahlung der Sonne (Klimaschwankungen) zusammenfallen.

Young hat (die Sonne, pag. 173) die Vermuthung ausgesprochen, „dass die Flecke vielleicht Vertiefungen in der Photosphäre sind, die nicht unmittelbar durch den Druck von oben nach unten, sondern durch Verminderung des Drucks von unten nach oben, in Folge von Eruptionen, die in der Nähe stattfinden, erzeugt werden“, und eine etwas künstliche Theorie der Flecke auf dieser Basis versucht.

Die Entstehung von Wirbeln durch Aufrollen der Diskontinuitätsflächen giebt unmittelbar die Druckverminderung im Sonneninnern, nach der Young sucht. Die Faye'sche Wirbel-theorie der Sonnenflecke besitzt ihrer mannigfachen Vorzüge wegen noch zahlreiche Verbreitung, trotzdem, im Widerspruch mit der Erfahrung, das Fleckeninnere sämmtlich gleichsinnig mit der Sonne rotiren müsste, und die mechanische Erklärung des Zustandekommens dieser Wirbel nicht stichhaltig ist. Die hier skizzirte Theorie besitzt sämmtliche Vorzüge, welche die Theorie von Faye auszeichnen, ohne deren Nachtheile.

Da über den Flecken, falls sie durch Saugwirkung der im Innern der Sonne arbeitenden Wirbel entstehen, eine absteigende Strömung der die Photosphäre umhüllenden Gase eintreten muss, wie sie Oppolzer seiner Theorie der Sonnenflecke zu Grunde legt, so werden die mannigfachen Vorzüge der Oppolzer'schen Theorie auch der hier entwickelten zu Gute kommen. Die absteigende Strömung, von der Oppolzer ausgeht, findet hier ihre Erklärung.

Schichtenbildung, nach Raum und Zeit variable Rotationsgeschwindigkeiten und den Sonnenflecken analoge Gebilde sind nothwendige Folgeerscheinungen des durch Wärmeausstrahlung bewirkten Abkühlungsprocesses eines rotirenden, ganz oder nur in seinen äussern Schichten aus flüssiger Masse bestehenden Himmelskörpers.