Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Ueber kosmische Staubmassen und das Zodiacallicht.

Von **H. Seeliger.**

(*Eingelaufen 6. Juli.*)

Die Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen habe ich in zwei Abhandlungen[1]) entwickelt. Veranlasst wurden diese Untersuchungen durch den Wunsch, über die Verhältnisse, welche der Saturnring darbietet, in's Einzelne gehende Aufschlüsse zu erhalten. Hiezu waren ziemlich weitgehende Entwicklungen nöthig, die ich besonders in II in solcher Allgemeinheit durchgeführt habe, dass in der Hauptsache die betreffenden Probleme als gelöst betrachtet werden können.

Unter staubförmigen kosmischen Massen oder kosmischen Staubwolken hat man Aggregate von Massen zu verstehen, deren gegenseitige Entfernungen im Vergleich zu ihren Dimensionen gross sind. Dabei wird man in den meisten Fällen die Theorie nur unter der Voraussetzung zu entwickeln haben, dass das genannte Verhältnis sehr gross ist, da es sich um ganz genaue Formeln nicht handeln kann. Nichts hindert indessen, dass man, ähnlich wie in der kinetischen Gastheorie, einen Schritt weiter geht. Ganz genaue Formeln, die also auch auf Ansammlungen dicht gedrängter Theilchen anwendbar sind, aufzustellen, dürfte indessen bedeutende Schwierigkeiten darbieten. Solche weitergeführte Entwicklungen verlangt die

[1]) I. Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesondere des Saturnringes. Abhdl. der bayer. Akademie der W. Bd. XVI. München 1887. II. Theorie der Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen etc. Ebenda, Bd. XVIII. München 1893.

Astronomie zunächst nicht, denn die bisher bekannt gewordenen kosmischen Staubwolken enthalten nur sehr dünn vertheilte Materie.

Die Theorie erfordert nicht die Annahme kugelförmiger Gestalt der einzelnen die Staubwolke zusammensetzenden Theilchen, man darf aber diese Annahme machen, ohne die Allgemeinheit zu gefährden. Bei der obigen Definition der Staubwolken, umfassen diese sehr verschiedene kosmische Gebilde z. B. den Saturnring und das Zodiacallicht, aber auch, gewissermaassen als Specialfälle, selbstleuchtende oder theilweise selbstleuchtende Massen, wie die Sternhaufen, wahrscheinlich auch die sogenannten Spiralnebel und schliesslich gehört der ganze sichtbare Fixsterncomplex dazu. Einige Anwendungen auf den letzteren habe ich gelegentlich einer anderen Untersuchung gemacht.[1])

In der vorliegenden Arbeit möchte ich mir erlauben, einige Punkte der früheren Entwicklungen in Betreff der Beleuchtung an sich dunkler Staubwolken näher auszuführen und einige Bemerkungen über das Zodiacallicht hinzuzufügen.

1.

Wir denken uns die Staubwolke — den obigen Bemerkungen gemäss — aus n gleichen Kugeln vom Radius ϱ bestehend und die Lichtquelle sowie den Beobachter in so grosser Entfernung von ihr, dass die Veränderlichkeit dieser Entfernung von Kugel zu Kugel nicht in Frage kommt. Dann wird, wenn zunächst von der gegenseitigen Beschattung und Verdeckung der einzelnen Kugeln abgesehen wird, die Gesammtlichtmenge, welche diese n Kugeln dem Beobachter zusenden,

$$Q = I^{\nu} \cdot n \varrho^2$$

wo I^{ν} eine Constante ist. Ist M die Gesammtmasse dieser n Kugeln, so wird

[1]) Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1896.

$$Q = \Gamma \cdot \frac{M}{\varrho} = \gamma \sqrt[3]{M^2 n}, \qquad (1)$$

wo γ und Γ weder von M noch von n und ϱ abhängen. Belegt man, woran festgehalten werden soll, stets denselben Raum mit Kugeln, so wird die mittlere Flächenhelligkeit der Staubwolke ebenfalls durch (1) dargestellt, wenn nur γ eine andere Constante, wie früher, bedeutet. Zertheilt man demnach dieselbe Masse M in eine Anzahl Kugeln, so wird die Lichtmenge der entstehenden Staubwolke mit $\frac{1}{\varrho}$ oder $\sqrt[3]{n}$ wachsen, d. h. je kleiner die einzelnen Kugeln sind, desto heller wird unter sonst gleichen Umständen die Staubwolke sein. Die sehr hellen sogenannten leuchtenden Nachtwolken stellen u. A. solche Ansammlungen sehr kleiner Theilchen dar, wofür ja auch ihr sehr langes Verweilen in so überaus grossen Höhen spricht.

Von selbst ist klar, dass die Formel (1) nur innerhalb gewisser Grenzen gelten kann, denn sonst könnte Q über alle Grenzen hinaus wachsen. Der Grund, weshalb das nicht geschieht, ist leicht zu finden. Je kleiner ϱ bei festgehaltenem M wird, desto mehr treten die gegenseitigen Beschattungen und Bedeckungen der einzelnen Kugeln in Wirksamkeit und so kommt es, dass Q über einen gewissen endlichen Betrag nicht hinauswachsen kann.

Sehr leicht zu übersehen sind die Verhältnisse bei einer zweidimensionalen Vertheilung der Kugeln. Wir nehmen z. B. an, die Mittelpunkte der Kugeln liegen innerhalb eines begrenzten ebenen Flächenstückes F. Dann wird Q zunächst bei der Verkleinerung von ϱ wachsen. Bei fortgesetzter Verkleinerung der Kugeln werden diese aber schliesslich das Ebenenstück F so dicht besetzen, dass sie sich gegenseitig berühren und eine weitere Verkleinerung von ϱ kann demnach nicht erfolgen.

Nennt man für diesen Grenzfall σ die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, in dessen Spitzen je 3 sich berührende Kugeln stehen, so ist

$$\sigma = 2\,\varrho \sin 60^0 = \varrho\,\sqrt{3}$$

und je grösser n ist, desto genauer wird die Formel sein

$$2\,n\,\varrho\,\sigma = F.$$

Nennt man noch P das Gesammtvolumen aller Kugeln und δ die Massendichtigkeit einer jeden, so ist

$$P = \tfrac{4}{3}\,n\,\varrho^3\,\pi = \frac{M}{\delta}.$$

Der kleinste zulässige Werth von ϱ ergiebt sich hieraus:

$$\varrho = \frac{3\sqrt{3}}{2\,\pi} \cdot \frac{P}{F} = \frac{3\sqrt{3}}{2\,\pi}\,\frac{M}{F \cdot \delta}$$

und der Maximalwerth vom n ist demnach:

$$n = \frac{2\,\pi^2}{27\sqrt{3}} \cdot \frac{F^3}{P^2}.$$

Nennt man weiter den Maximalwerth von Q: Q_0 und den Werth von Q für ein bestimmtes gegebenes $n = n_0$: Q_{n_0}, setzt man der besseren Uebersicht wegen $F = a^2$ und $V = a^3$, so wird:

$$\frac{Q_0}{Q_{n_0}} = \left(\frac{2\,\pi^2}{27\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{V}{P}\right)^{\frac{1}{4}} = 0.751 \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \cdot \left(\frac{V}{P}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$V : P = \Delta$ ist umso grösser, je dünner die Massenvertheilung ist. Q_0 wächst also mit $\Delta^{\frac{1}{4}}$ und kann für grosse Δ bedeutend werden. Die Durchsichtigkeit einer solchen Staubschicht nimmt, wie von selbst klar ist, mit der Verkleinerung von ϱ, also der Vergrösserung von n ab.

Ganz ähnliches gilt nun auch für dreidimensionale Staubwolken. Die Entwicklungen in I und II geben hierüber nach jeder Richtung Auskunft. Infolge der gegenseitigen Beschattungen und Verdeckungen der einzelnen Theilchen ergiebt sich auch hier ein Maximalwerth für die Flächenhelligkeit einer Staubwolke, dem man sich durch fortgesetzte Zerstückelung der gegebenen Gesammtmasse nähert. Es tritt aber noch ein

anderer Umstand hinzu. Nennt man die Lichtquelle „Sonne" und den Winkel an der Kugel im Dreieck Sonne-Kugel-Beobachter, also den Phasenwinkel, α, so wird die Helligkeit einer Staubwolke von α abhängig sein und im Allgemeinen mit Verkleinerung von α zunehmen. Die näheren Umstände dieser Zunahme hängen von dem elementaren Beleuchtungsgesetz für zerstreut reflectirende Substanzen ab und sind deshalb nicht voraussetzungslos angebbar. Die gewöhnlich angewandten photometrischen Elementargesetze für glatte Oberflächen geben für kleine Variationen von α und besonders in der Nähe des Werthes $\alpha = 0$ nur sehr kleine Variationen der Helligkeit. Trotzdem können hier sehr beträchtliche Helligkeitszunahmen stattfinden, die bei nahezu undurchsichtigen Staubwolken ihre Helligkeit auf das Doppelte erhöhen, wenn man von sehr kleinen α zu dem Werthe $\alpha = 0$ übergeht. Dieses Resultat ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass für $\alpha = 0$ die beschatteten Theile der Staubwolke zugleich die verdeckten sind und schon bei geringfügiger Vergrösserung von α die beschatteten Theilchen sichtbar werden und somit die mittlere Helligkeit der Staubwolke abschwächen müssen. Die quantitative Verfolgung dieses Phänomenes ist in I und II geschehen. Dasselbe spielt in der Theorie der Beleuchtung des Saturnringes eine besonders wichtige Rolle und ist hier als sehr auffällig durch die Beobachtung constatirt. Bei sehr durchsichtigen Staubwolken ist es dagegen von untergeordneter Bedeutung. Hier soll davon gänzlich abgesehen werden, wodurch eine grosse Vereinfachung in der Betrachtung eintritt.

Bei den folgenden einfachen Rechnungen sollen die in I und II getroffenen Festsetzungen beibehalten werden. Es seien also Δ und Δ_1 die Entfernung einer Kugel vom Beobachter bezw. von der Sonne, deren Radius R sei. Dann ist die Lichtmenge $Q(\alpha)$, welche eine Kugel vom Radius ϱ beim Phasenwinkel α dem Beobachter zusendet:

$$Q(\alpha) = J \cdot \mu \cdot \frac{R^2}{\Delta^2} \frac{\varrho^2}{\Delta_1^2} f(\alpha).$$

Hierbei ist μ die Albedo nach der von mir eingeführten Definition[1]) und ferner:

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} i \, d i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos i, \cos \varepsilon) \sin \varepsilon \, d \varepsilon$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{2P} \int_0^{\pi} \sin \vartheta \, d \vartheta \int_{\alpha}^{\pi} \varphi(\sin \vartheta \sin(\omega - \alpha), \sin \vartheta \sin \omega) \, d \omega$$

wobei φ das elementare Beleuchtungsgesetz bedeutet. Bei der bekannten Unsicherheit darüber, welchen Ausdruck man für φ am besten anzuwenden hat, empfiehlt es sich mehrere möglichst einfache bezw. mehr oder weniger erprobte Annahmen zu machen. Die neuere Photometrie hat besonders auf drei solche Annahmen hingewiesen, nämlich:

$$1) \quad \varphi = \cos i \cos \varepsilon, \quad 2) \quad \varphi = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}, \quad 3) \quad \varphi = \cos i$$

wo i und ε Incidenz- und Emanationswinkel bedeuten. Die drei Annahmen sind als das Lambert'sche Gesetz, das Absorptionsgesetz und das Gesetz von Euler bekannt. Für diese 3 Annahmen ist der Reihe nach $P = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ und 1, wodurch wird:

$$1) \; f_1(\alpha) = \tfrac{2}{3} \left[\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha\right]$$

$$2) \; f_2(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \operatorname{lognat} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{4} \alpha\right]$$

$$3) \; f_3(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass $L = J \pi \cdot \left(\frac{R}{\Delta_1}\right)^2$ die Lichtmenge ist, welche ein senkrecht der Sonnenstrahlung ausgesetztes Flächenelement $= 1$ in der Entfernung Δ_1 erhält. Für genügend grosse Δ_1, für solche nämlich, für welche $4 \sin^2 \frac{\sigma}{2} = \sin^2 \sigma$ gesetzt werden darf, — σ ist der scheinbare

---

[1]) I art. 5.

Sonnenradius — ist $\pi\left(\frac{R}{\Delta_1}\right)^2$ der scheinbare Flächeninhalt der Sonnenscheibe, von der betr. Kugel aus gesehen, und J ist demnach die scheinbare Flächenhelligkeit der Sonne, also völlig unabhängig von Δ_1. Bezeichnet J_M die mittlere scheinbare Flächenhelligkeit der Mondscheibe und ist σ_M ihr Radius, so kann man setzen[1]):

$$J \cdot \sigma^2 = J_M \sigma_M^2 \cdot 569500.$$

Betrachten wir nun nur — der Einfachheit wegen — eine homogene Staubwolke vom Rauminhalt R_1. Die Zahl aller in R_1 enthaltenen Kugeln sei N. Dann ist die scheinbare Flächenhelligkeit H in einer von einem Punkte ausserhalb der Wolke gezogenen Richtung, welche die Wolke in zwei Punkten 1 und 2 schneidet, wo die Strecke $\overline{12} = X$ ist, gegeben durch:

$$H = \Gamma \frac{\varrho^2 N}{R_1} \int_0^X \frac{e^{-\lambda(h+h_1)}}{\Delta_1^2} \cdot f(\alpha)\, dh. \qquad (1)$$

h und h_1 sind die innerhalb der Staubwolke gelegenen Stücke der Geraden, welche von dem betrachteten Punkt in $\overline{12}$ zum Beobachter bezw. zur Sonne gezogen werden. Ferner ist gesetzt worden:

$$\lambda = \frac{N \varrho^2 \pi}{R_1}, \quad \Gamma = J \cdot \mu R^2. \qquad (2)$$

Ist, wie früher, P der Raum, den alle Kugeln zusammen einnehmen, so wird:

$$\lambda = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{P}{R_1} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{S}{\varrho}; \quad S = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{P}{R_1}.$$

S ist das Maass für die Dichtigkeit der Massenvertheilung. Jetzt kann man H auch schreiben:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi} \cdot \lambda \int_0^X \frac{e^{-\lambda(h+h_1)}}{\Delta_1^2} f(\alpha)\, dh. \qquad (3)$$

Wenn der Beobachter und die Sonne soweit von der Staub-

[1]) Müller, Photometrie der Gestirne S. 315.

wolke entfernt sind, dass ihre Dimension dieser Entfernung gegenüber sehr klein ist, hat man:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi} \cdot \frac{f(\alpha)}{\Delta_1^2} \cdot \Phi(\lambda); \quad \Phi(\lambda) = \lambda \int_0^X e^{-\lambda(h+h_1)} \cdot dh.$$

Einer beliebig weit fortgesetzten Zerstückelung der Masse, durch Verkleinerung von ϱ, steht hier nichts im Wege. Aber für $\varrho = 0$ nähert sich H einem endlichen Grenzwerthe, da $\Phi(\lambda)$ für $\lambda = \infty$ endlich bleibt.

Für $\lambda = \infty$ wird aber die Staubwolke unendlich wenig durchsichtig. Zu dem Integrale $\Phi(\lambda)$ können dann nur Schichten einen Betrag liefern, für welche h und h_1 unendlich klein sind. Zieht man an der Stelle der Oberfläche der Staubwolke, auf welche sich die scheinbare Helligkeit H bezieht, die Tangentialebene und nennt man i und ε den Incidenz- bezw. Emanationswinkel der von der Sonne empfangenen bezw. dem Beobachter zugesandten Strahlen, so wird, von etwaigen singulären Punkten der Oberfläche abgesehen:

$$h_1 = \frac{h \cos \varepsilon}{\cos i}$$

und es wird demnach für $\lambda = \infty$:

$$\Phi(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i}} dh = \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}$$

d. h. die Staubwolke reflectirt das Licht wie ein fester glatter Körper, dessen Oberfläche das Absorptionsgesetz (2) befolgt und dessen Albedo vom Phasenwinkel abhängt. Daraus ergiebt sich z. B. die Lichtmenge einer kugelförmigen Staubwolke vom Radius S_1:

$$Q(\alpha) = \frac{\Gamma}{\pi} \cdot \frac{S_1^2}{\Delta^2} \cdot \frac{f(\alpha)}{\Delta_1^2} \cdot f_2(\alpha),$$

wo $f_2(\alpha)$ der obige Ausdruck (S. 270) ist und $f(\alpha)$ das Elementargesetz ausdrückt, welchem die einzelnen Kugeln folgen.

Für zwischen 0 und ∞ gelegene Werthe von λ ist die Ausrechnung des Integrales im Allgemeinen recht verwickelt, wie das Beispiel einer kugelförmigen Staubwolke zeigt, das ich

in II (S. 12 ff.) behandelt habe. Um ein möglichst einfaches Beispiel zu betrachten, soll eine von zwei parallelen Ebenen, im Abstand X, begrenzte Staubschicht vorliegen und es befinde sich sowohl die Sonne als auch der Beobachter auf derselben Seite der Schicht. Bezeichnet wieder i und ε Incidenz- und Emanationswinkel und x die Tiefe des betrachteten Volumelementes unter der oberen Grenzebene, so ist:

$$h_1 = \frac{x}{\cos i}; \quad h = \frac{x}{\cos \varepsilon}.$$

Die Integration ist dann sofort ausführbar und man hat:

$$\Phi(\lambda) = \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}\left(1 - e^{-\lambda X \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}}\right).$$

Bezeichnet man also:

$$\nu = S \cdot X \cdot \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon},$$

so wird:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi \Delta_1^2} f(a) \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \Psi; \quad \Psi = 1 - e^{-\frac{\nu}{\varrho}}. \qquad (4)$$

Ψ nimmt mit abnehmendem ϱ fortwährend zu und erreicht für $\varrho = 0$ sein absolutes Maximum. Sobald $i > 90^0$ gelten die Formeln nicht mehr. Ohne auf diesen leicht zu erledigenden Fall näher einzugehen, sei nur hervorgehoben, dass dann jedenfalls für $\lambda = 0$ und für $\lambda = \infty$ $H = 0$ sein muss — im letzteren Fall liegt eine von hinten beleuchtete undurchsichtige Schicht vor — so dass also das Maximum der Helligkeit für einen dazwischenliegenden Werth von λ stattfinden muss.

Ich betrachte nun den Fall, wo die Sonne innerhalb der Staubwolke, der Beobachter dagegen in sehr grosser Entfernung ausserhalb liegt. Die Formel (3) gilt dann, wenn nur $h_1 = \Delta_1$ gesetzt wird. Da hier $f(a)$ innerhalb des Integrales steht, ist eine weitere Entwicklung der Formel von der Wahl des elementaren Beleuchtungsgesetzes abhängig.

Fällt man von der Sonne eine Senkrechte s auf die vom Beobachter zum betrachteten Volumelement gezogene Gerade

und ist m der Abstand des Fusspunktes dieser Senkrechten von der Eintrittsstelle der genannten Geraden in die Staubwolke, so hat man:

$$h = m + s \operatorname{cotg} \alpha; \quad h + \Delta' = m + s \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

und es ergiebt sich aus (3):

$$H = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\lambda}{s} \cdot e^{-\lambda m} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} e^{-\lambda s \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha} \cdot f(\alpha)\, d\alpha,$$

wo α_0 und α_1 die Werthe von α für die Eintritt- und Austrittsstelle bedeuten. Setzt man noch:

$$\nu = \lambda s; \quad \Psi_\nu(\alpha) = \nu \int_0^\alpha e^{-\nu \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} f(\pi - \alpha)\, d\alpha,$$

so wird:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi s^2} e^{+\nu \operatorname{cotg} \alpha_0} \{\Psi_\nu(\pi - \alpha_1) - \Psi_\nu(\pi - \alpha_0)\}. \qquad (5)$$

Die Integrale Ψ sind in jedem Falle leicht numerisch auszuwerthen. Ich habe beispielsweise eine kleine Tafel für das Lambert'sche Gesetz berechnet. Hier ist:

$$f(\pi - \alpha) = \tfrac{2}{3} [\sin \alpha - \alpha \cos \alpha].$$

Die am Schlusse mitgetheilte Tafel ist nicht nach dem Argumente ν, sondern nach $\nu_1 = 0.43429\, \nu$ geordnet und giebt eine genügende Uebersicht über den Verlauf der Function Ψ zwischen $\nu_1 = 0$ und $\nu_1 = 1$. Es sollen nun einige numerische Nachweise zu den vorstehenden Formeln gegeben werden.

Da die scheinbaren Durchmesser von Sonne und Mond — von der Erde aus gesehen — nicht wesentlich verschieden sind, so hat man:

$$\Gamma = \mu \cdot J_{\mathfrak{M}} \cdot R^2 \cdot 569500.$$

Betrachtet man zuerst eine Scheibe von Staubmaterie, die von ausserhalb beleuchtet wird, so ist nach (4) das Maximum ihrer Helligkeit:

$$H_{\max} = \frac{\Gamma}{\pi \Delta_1^2} f(\alpha) \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}$$

oder:

$$\frac{H_{\max}}{J_M} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{R}{\Delta_1}\right)^2 \cdot 569500 \cdot f(\alpha) \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}.$$

Drückt man Δ_1 in Einheiten der Entfernung Sonne-Erde aus, so wird:

$$\frac{H_{\max}}{J_M} = 12.3 \times \mu \cdot \frac{f(\alpha)}{\pi} \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \cdot \frac{1}{\Delta_1^2}.$$

$\frac{f(\alpha)}{\pi}$ ist für $\alpha = 0$ für die drei oben betrachteten Beleuchtungsgesetze der Reihe nach $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und für $\alpha = 90^0$ grösser als $\frac{1}{3}$. Da für $i = \varepsilon$, $\frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} = \frac{1}{2}$ ist, so kommt man leicht auf Maximalhelligkeiten:

$$\frac{H_{\max}}{J_M} > 2 \cdot \frac{\mu}{\Delta_1^2},$$

was für $\Delta_1 = 1000$ (etwa 30 Neptunsweiten):

$$H_{\max} = J_M \cdot 2.10^{-6}\, \mu$$

ergiebt. Eine solche Flächenhelligkeit würde also z. B. eine Staubwolke haben können, die eine Parallaxe von 0.″01 besitzt und von einem Sterne von der Grösse 10.4 beleuchtet wird, der in einer Entfernung von 10″ sich von ihr befindet. Für schon recht dunklen Oberflächen entsprechende Albedowerthe wird man so, in dem angenommenen Falle, auf Flächenhelligkeiten

$$H = J_M \cdot \gamma \cdot 10^{-7}$$

geführt, wo γ einige Einheiten ausmacht. Diese Zahl vergrössert sich im quadratischen Verhältnis mit der Annäherung des Sternes an die Staubwolke.

Liegt der Stern innerhalb der Staubwolke, so ist nach (5):

$$\frac{H}{J_M} = \mu \times 3.93 \cdot \frac{e^{\nu \operatorname{cotg} \alpha_0}}{s^2} \{\Psi_\nu(\pi - \alpha_1) - \Psi_\nu(\pi - \alpha_0)\}.$$

Nimmt man z. B. α_1 ganz beiläufig in der Nähe von Null, $\alpha_0 = 130^0$, $\nu_1 = 0.2$, so ergiebt sich mit Hülfe der Tabelle

$$H = \mu J_M \cdot \frac{0.94}{s^2}.$$

Ist π'' die jährliche Parallaxe der Staubwolke in Secunden, s'' der in Secunden ausgedrückte Abstand des Sternes, von derselben Leuchtkraft wie die Sonne, von dem betrachteten Theile der Staubwolke, so ist

$$s'' = \pi'' \sqrt{\frac{0.94\mu}{H} \cdot J_M}.$$

Setzt man z. B. $\frac{H}{J_M} = \lambda \cdot 10^{-7}$; $\pi'' = 0.''01$; $\mu = \frac{1}{4}$ (entsprechend einer Albedo, die zwischen der des Mercur und Mars liegt), so ist ungefähr:

$$s'' = 15'' \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Auch in diesem Falle macht es keine Schwierigkeiten in der Entfernung von mehreren Secunden von einem schwächeren Sterne Flächenhelligkeiten der Staubwolke zu erhalten, die vom Range 10^{-7} der mittleren Flächenhelligkeit der Vollmondscheibe sind. Es ist dabei nicht ausser Betracht zu lassen, dass sehr wahrscheinlicher Weise die meisten Sterne eine viel bedeutendere Leuchtkraft als die Sonne besitzen. Man kann demnach die berechneten Werthe auch für beträchtlich kleinere Parallaxen als 0.''01 gelten lassen. In beiden Fällen sieht man also dann Nebelmassen in der Nähe von Sternen. Es fragt sich nun aber, ob Nebelmassen von der angenommenen Flächenhelligkeit überhaupt bemerkbare Objecte sind.

Die Bestimmung der Flächenhelligkeit von ausgedehnten lichtschwachen Gebilden am Himmel ist bisher nur in wenigen Einzelfällen und auch hier nur mit geringer Zuverlässigkeit durchgeführt worden.

Namentlich ist man nur sehr selten über relative Helligkeitsschätzungen von Gebilden unter sich hinausgekommen und

Beziehungen auf bestimmte, also gewissermaassen absolute Einheiten sind fast gar nicht vorhanden. Als eine solche Einheit empfiehlt sich die oben benutzte, nämlich die mittlere Flächenhelligkeit der Vollmondscheibe oder diese Helligkeit mit einer negativen ganzen Potenz von 10 multipliciert. Behält man die erstere als Einheit bei, so werden die reciproken Flächenhelligkeiten, die ich mit A bezeichnen will, selbst der hellsten Nebelflecke und noch mehr minder heller Objecte, wie der Milchstrasse, allerdings durch grosse Zahlen dargestellt, was indessen wohl kaum bedenklich sein dürfte.

Es mag nun das Wenige, was in dieser Beziehung bekannt ist, hier erwähnt werden. Es ist sehr zu bedauern, dass man kaum über sehr vage und unsichere Angaben hinaus gelangen kann, denn die obigen Bemerkungen dürften, abgesehen von andern Fragen, darauf hinweisen, dass mit besser begründeten Feststellungen von solchen Flächenhelligkeiten ein recht erhebliches Interesse verbunden ist.

Der Himmelsgrund ist durch die Sonne oder durch den Vollmond nicht gleichmässig erhellt, vielmehr hängt, wie selbstverständlich, die Flächenhelligkeit der einzelnen Theile des Himmels von ihrer Lage zum erleuchtenden Gestirn und von der Höhe des letzteren über dem Horizont ab. Einen genaueren Nachweis hierüber hat Herr Wild[1]) gegeben. Danach ist z. B. im Azimuthe 90^0 von der Sonne entfernt das Verhältnis der Flächenhelligkeit der Sonnenscheibe zur Flächenhelligkeit des Himmelsgrundes $\gamma \cdot 10^6$, wo γ eine nicht sehr von der Einheit verschiedene Zahl bedeutet. Ungefähr dieselbe Zahl würde hieraus für die in den obigen Einheiten ausgedrückte reciproke Helligkeit des Himmelsgrundes bei Vollmond folgen, da Vollmond und Sonne nahe von gleicher scheinbarer Grösse sind.

Statt dessen führt aber Olbers[2]) — wohl eine der frühesten Angaben in diesem Gebiete — für die Zahl A 10^5 an. Da indessen diese Angabe ohne nähere Begründung gemacht

---

[1]) Bulletin der Akademie in Petersburg. 1876 u. 1877.

[2]) Olbers Werke I. S. 139.

ist, dürfte wohl die erwähnte Wild'sche zuverlässiger sein. Bei Vollmond verschwindet nun aber für das freie Auge, die Milchstrasse überall, vielleicht mit Ausnahme der allerhellsten Partien. Hier ist die Helligkeit des Himmelsgrundes um die der Milchstrasse vermehrt. Bleibt diese Helligkeit unbemerkt, so muss der Quotient aus der genannten Vermehrung dividirt durch die Helligkeit des Himmelsgrundes $< \varepsilon$ sein, wo ε eine Zahl ist, die man wohl kleiner als etwa $\frac{1}{40}$ annehmen kann. Danach würde also für die Milchstrasse für A der Werth $\frac{1}{\varepsilon} \cdot 10^5$ bezw. $\frac{1}{\varepsilon} 10^6$ folgen, also werden voraussichtlich auch die hellen Partien der Milchstrasse ein A aufweisen, das vom Range 10^7 ist.

Die hellen, besonders einige kleine planetarische Nebel, scheinen eine viel grössere Helligkeit zu besitzen, doch lassen sich nur ganz unsichere Angaben in dieser Richtung machen. Die wenigen hierher gehörenden Angaben, deren Nachprüfung und Vermehrung dringend erwünscht wäre, hat Herr G. Müller in seiner Photometrie der Gestirne zusammengestellt.

Nach Herrn E. Pickering sendet der helle planetarische Nebel G. C. 4964 soviel Licht aus, wie ein Stern von der Grösse 8.6.[1]) Die Lichtmenge, welche der mittlere Vollmond der Erde zusendet, ist gleich derjenigen, welche ein Stern von der Grösse -11.77 besitzen würde.[2]) Der genannte planetarische Nebel ist ungefähr kreisrund und hat nach einer von Herrn Villiger auf mein Ersuchen angestellten Messung einen Durchmesser von 21″. Hiermit ergiebt sich A für diesen Nebel zu rund 18000. Ferner hat Herr Huggins[3]) die Flächenhelligkeit von 3 Nebeln bestimmt, hierbei als Einheit die Flächenhelligkeit einer auf einem nahen Dache aufgestellten Kerzenflamme genommen und hierfür gefunden:

---

[1]) Müller a. a. O. S. 420.

[2]) Müller a. a. O. S. 340.

[3]) Huggins, Philosoph. Transact. Vol. 156, part. I, S. 392 ff. und Müller S. 420.

		A
Nebel G. C. 4628	1 : 1508	618
Ringnebel. Leyer	: 6032	2472
Dumbbellnebel	: 19604	8032.

Ueber das Verhältnis der Helligkeit der benutzten Kerzenflamme zu der des Vollmondes irgendwie zuverlässige Angaben zu finden, ist mir nicht gelungen. Nimmt man die für eine gewöhnliche Normalkerze geltenden Zahlen an, nämlich:[1]) Flächenhelligkeit der Sonne zu der der Flamme 220420 : 1, Lichtmenge der Sonne zu der des Vollmondes 569500, Sonnen- bezw. Monddurchmesser 1919".5 bezw. 1865".7, so ergeben sich die bereits angeführten Zahlen A für die 3 Nebel. Diese Zahlen sind nun aber so auffallend klein, dass man sie als verfehlt ansehen muss. Es ist nicht gerade wahrscheinlich, dass dies in der allerdings ganz unsicheren Reduction begründet ist. Was die relative Helligkeit der 3 Nebel betrifft, so scheint dieselbe, wie gleich erwähnt werden soll, ziemlich zutreffend bestimmt worden zu sein.

Die genauere Bestimmung der relativen Flächenhelligkeiten nebeliger Objecte, bereitet bekanntlich praktische Schwierigkeiten, die noch nicht überwunden sind. Aber man kann doch mit verhältnismässig einfachen Hülfsmitteln zu einer rohen zahlenmässigen Abschätzung gelangen. Will man dann die Zahlen A gewinnen, so wird man gegenwärtig noch am besten den Werth von A für den von Herrn Pickering bestimmten Nebel G. C. 4964 zu Grunde legen, da dieser Werth verhältnismässig nicht so grossen Unsicherheiten ausgesetzt zu sein scheint. Die Abschätzung der relativen Flächenhelligkeit anderer Nebel im Vergleich zu dem genannten, kann in der zunächst geforderten Annäherung mit Hülfe eines Keilphotometers erfolgen. Die Bedenken gegen eine solche Anwendung des Keilphotometers sollen dabei, weil allgemein bekannt, ganz unerörtert bleiben und es soll nur erwähnt werden, dass solche Vergleichungen nur auf die hellsten Theile ausgedehnter Ob-

[1]) Müller a. a. O. S. 312.

jecte sich beziehen können.[1]) Ich habe nun Herrn Villiger ersucht, mit dem schönen Töpfer'schen Keilphotometer, welches mit dem $10^1/_2$ zölligen Refractor der Münchener Sternwarte in Verbindung gebracht werden kann, einige passend ausgewählte Nebelobjecte zu vergleichen, was auch im December 1900 und Mai 1901 geschehen ist. Auf die Details dieser Messungen soll hier nicht eingegangen werden. Ich führe nur die resultierenden Mittelwerthe von A an, wobei für den Nebel G. C. 4964 der obige Werth $A = 18000$ angenommen wurde.

G. C. 4628	$A =$	13900
Ringnebel in der Leyer		61800
Dumbbellnebel		133000
G. C. 4964		18000
G. C. 6826		32100
Andromedanebel		16100
Sternhaufen im Hercules Messier 13		45700

Die mit $A = 13900$ für G. C. 4628 berechneten, oben erwähnten, Messungen von Herrn Huggins ergeben für:

Ringnebel	$A =$	55700
Dumbbellnebel		181000

was immerhin in passabler Uebereinstimmung mit den Bestimmungen des Münchener Keilphotometers steht.

Zu Gunsten der oben angeführten Zahlen dürfte der für den Sternhaufen im Hercules gefundene Werth von A sprechen. Nach dem von Herrn Scheiner gegebenen Catalog ergiebt sich, dass in dem innersten und dichtesten Theil des Sternhaufens (30 Bogensecunden im Quadrat) im Mittel 0.1067 Sterne von der Grösse 12.7 auf dem Areale einer Quadratsecunde stehen. Hieraus ergiebt sich A zu 22000. Bei der Unsicherheit, die immerhin der Grössenschätzung anhaftet, dürfte die Uebereinstimmung der beiderlei Zahlen befriedigend sein, immer voraus-

[1]) Um ein homogenes Gesichtsfeld zu erzielen wird man zwei gleiche Keile oder Stücke von solchen, deren Spitzen entgegengesetzt liegen, anwenden. Das eine Keilstück wird man am besten fest mit dem Oculare verbinden.

gesetzt, dass man nur die Grössenordnung von A zu bestimmen versucht.

Endlich kann man auf Grund meiner „Betrachtungen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne,“ [1]) die mittlere Flächenhelligkeit nicht zu kleiner Theile der Milchstrasse bestimmen. Das ist freilich gegenwärtig nicht ohne Hypothesen möglich, wie ich a. a. O. S. 47 ff. gezeigt habe, aber einiges Interesse dürften doch dergleichen Rechnungen haben.

Bezeichnet λ eine Grösse, die für die Milchstrasse im Mittel 0.25 ist, h_m die Lichtmenge eines Sternes von der Grösse m, n die Sterngrösse, unter welcher die hellsten Sterne an der Grenze des Sternsystems erscheinen, A_m die Anzahl aller Sterne auf einem bestimmten Areale des Himmels, z. B. auf einem Quadratgrad, von den hellsten herab bis zu denen von der Grösse m, dann ist:

$$A_m = A_n \cdot \frac{5 - \lambda - (3 - \lambda)\frac{h_m}{h_n}}{2} \quad \text{wenn } m > n$$

und

$$A_m = A_n \cdot \left(\frac{h_n}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \qquad m < n$$

Ferner hat man $h_m = h_n \gamma^{m-n}$, wo $\log \gamma = -0.4$. Damit ergiebt sich, wenn $\gamma' = \log \text{nat}\, \gamma$ ist, für $m > n$:

$$h_m \, d A_m = -\frac{3 - \lambda}{2} \cdot A_n h_n \gamma' \cdot \gamma^{2(m-n)} \cdot d m$$

und die Lichtmenge aller Sterne zusammen von der Grösse n bis zu den schwächsten wird:

$$-\frac{3 - \lambda}{4} A_n h_n \gamma' \int_0^\infty \gamma^x \, d x = \frac{3 - \lambda}{4} A_n h_n .$$

Ebenso findet sich für $m < n$:

$$h_m \, d A_m = -\frac{3 - \lambda}{2} A_n h_n \gamma' \cdot \gamma^{\frac{m-n}{2}(\lambda-1)} \cdot d m$$

und die Lichtmenge aller Sterne zusammen von den hellsten, für welche offenbar genähert $m - n = -\infty$ gesetzt werden darf:

[1]) Abhandlungen der Akademie d. W. zu München. Bd. XIX. 1898.

$$\frac{3-\lambda}{1-\lambda} \cdot A_n h_n \gamma' \cdot \int_{-\infty}^{0} \gamma^x \, dx = A_n h_n \cdot \frac{3-\lambda}{1-\lambda}.$$

Als Gesammtlichtmenge Q ergiebt sich also:

$$Q = A_n h_n \cdot \frac{(3-\lambda)(5-\lambda)}{4(1-\lambda)}.$$

Was man auch, wenn unter m eine Zahl $> n$ verstanden wird, schreiben kann:

$$Q = A_m h_n \cdot \frac{(3-\lambda)(5-\lambda)}{2(1-\lambda)\left[(5-\lambda) - (3-\lambda)\frac{h_m}{h_n}\right]}.$$

Für den typischen Verlauf der Milchstrasse wurde $\lambda = \frac{1}{4}$ gesetzt, wodurch wird:

$$Q = A_m h_n \cdot \frac{11}{6\left[1 - \frac{11}{19} \cdot \frac{h_m}{h_n}\right]}.$$

Nimmt man für m die Grösse der schwächsten W. Herschelschen Sterne und schliesst man sich den weiteren Annahmen, die ich a. a. O. gemacht habe, an, so erhält man für die 4 folgenden verschiedenen Annahmen von m die daneben stehenden Werthe von n:

1)	$m = 13.5$	$n = 13.22$
2)	14.0	12.95
3)	14.5	12.86
4)	15.0	12.81

Für diese 4 Annahmen hat die Grösse:

$$S = \frac{h_n}{h_{12}} \cdot \frac{11}{6\left[1 - \frac{11}{19}\frac{h_m}{h_n}\right]}$$

der Reihe nach die Werthe: 1.08, 0.98, 0.95 und 0.94. Man kann demnach bei Ueberschlagsrechnungen, um die es sich hier handelt, $S = 1$ setzen und es ergiebt sich so:

$$Q = A_m h_{12}.$$

Die Lichtmenge eines Quadratgrades von der Flächenhelligkeit des Vollmondes wäre — 13.46 Grössenklassen. Für A ergiebt sich hieraus:

$$\log A = + 10.184 - \log A_m;\ A = 1.5 \times 10^{10} \cdot \frac{1}{A_m}.$$

A_m ist hier also die Anzahl Herschel'scher Sterne auf dem Quadratgrad. In der typischen Vertheilung ist in der Milchstrasse A_m etwa $= 2000$ und

$$A = 7\tfrac{1}{2} \times 10^6.$$

Für sehr helle Stellen der Milchstrasse mag A auf eine Million oder noch auf weniger herabsinken.

Nach den vorstehenden Erwägungen ist also kaum zu bezweifeln, dass kosmischer Staub in der Nähe leuchtender Massen sich als auf nicht unbeträchtliche Strecken ausgebreitete schwach leuchtende Nebelmaterie darstellen kann. Sind die einzelnen Staubtheilchen überaus klein, vom Range der Wellenlänge des Lichtes, so werden bekanntlich die kurzwelligen Strahlen in stärkerem Maasse reflectirt als die langwelligen und die Staubwolke wird sich dann leichter auf der photographischen Platte zeigen als dem Auge direct bemerkbar machen.

Es scheint nicht unwahrscheinlich, dass gewisse Theile der Spiralnebel, auf solche erleuchtete Staubwolken zurückzuführen sind. Unsere Sonne ist, worauf das Zodiacallicht hindeutet, von einer dünnen Staubwolke umgeben, welche über die Erdbahn hinausreicht. Sie wird den nächsten Fixsternen deshalb als ein nebliger Stern erscheinen. Die Nebelhülle ist freilich wenig ausgedehnt, hat aber, wie leicht zu sehen, für ausserhalb des Sonnensystems gelegene Beobachter durchaus noch merkliche Helligkeit, insoweit sie natürlich nicht durch den in ihrer Nähe stehenden Stern überstrahlt wird.

2.

Wie schon erwähnt wurde, zähle ich zu den staubförmigen kosmischen Massen das Zodiacallicht. Unter den mancherlei Hypothesen, welche zur Erklärung dieses Phänomenes aufge-

stellt worden sind, scheint mir die einfachste folgende zu sein: Der Raum des Sonnensystemes in der Nähe der Sonne bis zu Gegenden, welche die Erdbahn jedenfalls noch umschliessen, ist ausgefüllt mit Theilchen kosmischen Staubes, welche das Sonnenlicht zurückwerfen. Diese Staubwolke wird sich um eine Ebene, in welcher die Axe des Zodiacallichtes liegt, gruppiren, so dass sie in einer auf die Ebene senkrechten Richtung eine relativ geringe Ausdehnung besitzt. In der genannten Ebene selbst wird sie, da das Zodiacallicht ständige Unterschiede im Aussehen, die von der Jahreszeit abhängen, nicht zu zeigen scheint, nach allen Richtungen gleich ausgebreitet sein. In der Hauptsache wird also diese Staubwolke die Form einer Rotationsscheibe aufweisen, deren Mitte in der Sonne liegt und die über die Erdbahn hinausreicht. Die Dichtigkeit der Massenvertheilung wird wahrscheinlich von der Sonne nach Aussen zu abnehmen und es wäre möglich, dass sich die staubförmige Materie bei zu grossen Entfernungen von der Sonne nachweisen liesse, aber in viel grösserer Sonnenentfernung, als die der Erde, wird sie jedenfalls überaus dünn und ihr Einfluss also sehr gering sein müssen.

Ob die Axe des Zodiacallichtes wirklich in der Ekliptik liegt und also die Rotationsaxe der Scheibe senkrecht darauf steht, bleibt dahingestellt. Früher hat man daran nicht gezweifelt, neuerdings aber haben zuverlässige Beobachter dies gethan. So hat Herr Marchand[1]) und ganz neuerdings Herr M. Wolf[2]) gefunden, dass die Axe des Zodiacallichtes eher in der Ebene des Sonnenaequators als in der Ekliptik liegend anzunehmen sei.

Die oben erwähnte Ansicht über das Zodiacallicht drängt sich von selbst auf, wenn man sich erinnert, dass auch sonst verschiedene astronomische Erfahrungen auf die Anwesenheit kosmischen Staubes, namentlich in der Umgebung der Sonne

---

[1]) Compt. Rend. Band CXXI. S. 1134. 1895.

[2]) Ueber die Bestimmung der Lage des Zodiacallichts und den Gegenschein. Sitzb. d. Münchener Akademie d. W. 1900. S. 197—207.

unzweideutig hinweisen. Vor 9 Jahren[1]) habe ich mich ausdrücklich zu dieser Ansicht bekannt, die auch von anderer Seite, so von dem um die Erforschung des Zodiacallichtes hochverdienten A. Searle verfochten worden ist und eine nähere Begründung in Aussicht gestellt. Dass eine solche bisher nicht erfolgt ist, lag einmal darin, dass 1 Jahr später Herr Searle[2]) die Sachlage eingehend beleuchtet hat und ferner darin, dass zuverlässige photometrische Angaben über die Helligkeitsvertheilung im Zodiacallicht nicht zu beschaffen waren und meine eigenen dahin gerichteten Versuche einen Erfolg nicht hatten.

Eine Aenderung dieser Sachlage ist zwar bisher nicht eingetreten, aber es ist durch die neuesten Arbeiten von M. Wolf die Aussicht eröffnet worden eine solche erwarten zu können. Herrn Wolf ist es in der That gelungen, eine photographische Methode zu finden, welche die Helligkeitsvertheilung im Zodiacallichte zu erforschen erlaubt und diese scheint mir demnach einen höchst bedeutungsvollen Fortschritt auf diesem Gebiete anzubahnen. Man darf also hoffen in nicht zu ferner Zeit die erforderlichen photometrischen Daten zu erhalten, welche über die Zulässigkeit oder Unzulässigkeit der einzelnen Ansichten über das Wesen des Zodiacallichts im Grossen und Ganzen zu entscheiden gestatten werden.

In dieser Richtung lässt sich freilich, wie ich glaube, schon jetzt manches sagen und die Ausarbeitung der verschiedenen Theorien im Einzelnen dürfte zur Ausscheidung der einen oder andern von diesen, als unzulässig, führen. Eine solche mehr ins Détail gehende Beleuchtung hat einer meiner Schüler unternommen. Ohne dieser vorgreifen zu wollen, möchte ich mir hier nur einige ganz kurze allgemeine Bemerkungen erlauben mit Zugrundelegung der oben erörterten Ansicht über das Wesen des Zodiacallichtes. Veranlasst werde ich hierzu durch zweierlei Umstände:

---

[1]) Ueber allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. München 1892.

[2]) Researches on the Zodiacal Light. Annales of the Harvard College Observatory. Vol. XIX, II, 1893.

Erstens ist in verschiedenen Publicationen, zum Theil von populärer Tendenz, mein Name mit Ansichten über das Zodiacallicht in Verbindung gebracht worden, die ich niemals gehabt und noch weniger ausgesprochen habe. Dann aber sind auch Einwände gegen die oben erwähnte Ansicht vorgebracht worden, die ich bereits a. a. O. widerlegt habe, ohne freilich diese Widerlegung durch mathematische Formeln unterstützt zu haben. Das letztere möchte ich in allgemeinen Umrissen nunmehr nachholen.

Die Theorie der Beleuchtung von Staubwolken tritt hier in der einfachsten Form auf, denn die gegenseitige Beschattung und Verdeckung der einzelnen Theilchen kann kaum einen bemerkbaren Einfluss ausüben, weil die Masse des Zodiacallichtes jedenfalls ausserordentlich dünn verstreut ist, wie der hohe Grad von Durchsichtigkeit dieses Gebildes beweist. Es wäre möglich, dass hierüber genauere Auskunft durch systematisch ausgeführte photometrische Fixsternbeobachtungen zu erlangen wäre, denn wenn eine merkbare Schwächung der das Zodiacallicht durchquerenden Lichtstrahlen stattfindet, müssten Sterne, die in der Nähe der Axe des Zodiacallichtes stehen, Helligkeiten zeigen, die von der Elongation von der Sonne abhängen. Die Schwierigkeit einer solchen Untersuchung liegt in dem Umstande, dass man die Sterne bis zu beträchtlicher Annäherung an die Sonne verfolgen müsste und somit die Extinction durch die Erdatmosphäre einen bedeutenden Einfluss erhielte. Man würde deshalb wohl ein positives Resultat nur dann erhalten, wenn das Zodiacallicht das Sternlicht um einen nicht zu kleinen Procentsatz schwächen würde. Indessen wäre auch ein negatives Resultat offenbar von wissenschaftlichem Interesse.

Nach dem oben Gesagten werden wir anzunehmen haben, dass die Anzahl der in der Raumeinheit enthaltenen, das Zodiacallicht verursachenden kugelförmigen Körper $\frac{N}{R_1}$ (s. oben) eine Function des Ortes ist. Es soll jetzt mit σ der Radius einer der kleinen Kugeln, mit ϱ und r die Entfernung eines Volumelementes von der Sonne bezw. von der Erde, schliesslich mit

a die Entfernung Erde-Sonne bezeichnet werden. Die Flächenhelligkeit h eines kleinen Theiles des Himmels, wo das Zodiacallicht sichtbar ist, wird man ganz analog dem Früheren erhalten:

$$dh = \Phi \cdot f(a)\, dr.$$

Hierin hat Φ die Bedeutung:

$$\Phi = \tfrac{3}{4} J \mu \frac{R^2}{\varrho^2} \cdot \frac{\delta}{\sigma}; \quad \delta = \tfrac{4}{3} \pi \sigma^3 \frac{N}{R_1},$$

wo also J, μ, R und $f(a)$ die frühere Bedeutung haben und δ als die Dichtigkeit der Massenvertheilung anzusehen ist. Es soll nun hier nur die Lichtvertheilung in der Axe des Zodiacallichtes untersucht werden. Dann wird die Sonne im Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius P liegen, welcher die staubförmige Masse begrenzt. Innerhalb desselben Kreises soll die Erde in der Entfernung a vom Centrum liegen und ferner soll ϑ der Winkel zwischen den Richtungen Erde-Volumelement und Erde-Sonne sein. Die erstere Richtung soll den Kreis in der Entfernung r_1 von der Erde treffen. Wegen der oben erörterten Annahme, dass nämlich die Helligkeit des Zodiacallichtes keine Abhängigkeit von der Jahreszeit zu haben scheint, wird Φ nur als Function von ϱ anzunehmen sein. So ergiebt sich also für die Flächenhelligkeit h in der Elongation ϑ von der Sonne der Ausdruck:

$$h = \int_0^{r_1} \Phi(\varrho) \cdot f(a) \cdot dr. \tag{1}$$

Hierin kann man nach Belieben r, ϱ oder a als Integrationsvariable einführen und jede dieser Formen bietet gewisse Vortheile dar. Dabei sind die Formeln zu benutzen:

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 - 2\, a\, r \cos\vartheta$$

$$\sin a = \frac{a \sin\vartheta}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2\, a\, r \cos\vartheta}}$$

$$r_1 = a \cos\vartheta + \sqrt{P^2 - a^2 \sin^2\vartheta}$$

Führt man ϱ als Integrationsvariable in (1) ein, so hat man:

$$d\varrho = \frac{r - a\cos\vartheta}{\varrho} \cdot dr = \cos\alpha \cdot dr$$

und zerlegt man das Integral in (1) für: $\vartheta \cdot \leq 90^0$ in:

$$\int_0^{r_1} = \int_0^{a\cos\vartheta} + \int_{a\cos\vartheta}^{2a\cos\vartheta} + \int_{2a\cos\vartheta}^{r'}$$

so ergiebt sich, wenn noch $f(\alpha) + f(\pi - \alpha) = \varphi(\alpha)$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} h &= \int_{a\cos\vartheta}^{a} \frac{\Phi(\varrho)}{\cos\alpha}\,\varphi(\alpha)\,d\varrho + \int_{a}^{P} \Phi(\varrho)\cdot\frac{f(\alpha)}{\cos\alpha}d\varrho \quad \ldots \quad \vartheta < 90^0 \\ h &= \int_{a}^{P} \Phi(\varrho)\cdot\frac{f(\alpha)}{\cos\alpha}\,d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad \vartheta > 90^0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Hier ist α zu bestimmen durch:

$$\cos\alpha = +\frac{1}{\varrho}\sqrt{\varrho^2 - a^2\sin^2\vartheta}.$$

Führt man schliesslich α als Integrationsvariable ein:

$$dr = -a\sin\vartheta\cdot\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha},$$

so hat man:

$$h = a\sin\vartheta\int_{\alpha_0}^{\pi-\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{f(\alpha)}{\sin^2\alpha}\cdot d\alpha, \quad (3)$$

wo $\varrho = \frac{a\sin\vartheta}{\sin\alpha}$ und α_0 gegeben ist durch $\sin\alpha_0 = \frac{a\sin\vartheta}{P}$ und zwar als spitzer Winkel anzunehmen ist. Man kann übrigens, wenn man will, (3) auch in 2 Formeln zerspalten:

$$\left.\begin{aligned} h &= a\sin\vartheta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{\sin^2\alpha} + a\sin\vartheta\int_{\alpha_0}^{\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\sin^2\alpha} \ldots \vartheta < 90^0 \\ h &= a\sin\vartheta\int_{\alpha_0}^{\pi-\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{f(\alpha)d\alpha}{\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \vartheta > 90^0 \end{aligned}\right\} \quad (3^a)$$

Aus (2) ersieht man sofort, dass der Verlauf der Helligkeit des Zodiacallichtes von $\vartheta = 90^0$ bis 180^0, also bis zur

Stelle des Gegenscheines, wesentlich von der Function $\frac{f(\alpha)}{\cos \alpha}$ abhängt, also vom elementaren Beleuchtungsgesetz. Für jedes ϱ nimmt hier nämlich α fortwährend ab mit zunehmendem ϑ. Wenn demnach $\frac{f(\alpha)}{\cos \alpha}$ mit zunehmendem α fortwährend wächst, so wird die Helligkeit des Zodiacallichtes immer abnehmen, wenn man von der Elongation 90° bis zur Elongation 180° fortschreitet. Thatsächlich zeigen manche Beleuchtungsgesetze diese Eigenschaft. So ist für das Lambert'sche und das Euler'sche Gesetz die genannte Function, abgesehen von constanten Factoren:

$$\operatorname{tg} \alpha + \pi - \alpha, \quad \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Wenn man also eine dieser Formeln zur Anwendung bringt, könnte der Gegenschein nicht ohne Weiteres erklärt werden. Aber durchaus nicht alle Beleuchtungsgesetze zeigen diese Eigenschaft. So ergiebt das Absorptionsgesetz $\frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}$ eine Function $\frac{f(\alpha)}{\cos \alpha}$, welche von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 20°$ (ihr Logarithmus etwa um -0.007) abnimmt und man wird daraus schliessen, dass bei Zugrundelegung dieses Beleuchtungsgesetzes die Helligkeit des Zodiacallichtes bei $\vartheta = 180°$ etwas grösser sein muss, als in einer etwas kleineren Elongation. Diese Lichtzunahme ist an sich allerdings sehr gering. Es ist aber bekannt, dass die Helligkeit sehr rauher Körper in der Nähe der Opposition viel stärker zunimmt, als alle die gewöhnlich benutzten Beleuchtungsformeln ergeben. So ist diese Thatsache bei der photometrischen Beobachtung der kleinen Planeten besonders deutlich hervorgetreten, worauf u. A. auch Herr Searle sehr nachdrücklich hingewiesen hat. Man wird deshalb wohl behaupten dürfen, dass hier, zunächst wenigstens, ernstliche Schwierigkeiten für die obige Theorie des Zodiacallichtes nicht vorliegen. Zum mindesten müsste doch erst das Zeugnis von

photometrischen Beobachtungen in der Nähe des Gegenscheines abgewartet werden.

Was den Verlauf der Helligkeit für Elongationen $< 90^0$ betrifft, so wird hier die Beschaffenheit der Function Φ von grösstem Einflusse sein. Während für den Theil des Zodiacallichts zwischen 90^0 und 180^0 Elongation nur die Lichtreflexion an Theilchen zwischen $\varrho = a$ bis $\varrho = P$ in Frage kommt, treten für kleinere Elongationen immer neue Theilchen, die näher an der Sonne stehen, mit ins Spiel und daraus folgt eben, dass man h als Function von ϑ durch passende Wahl von Φ innerhalb eines weiteren Spielraumes wird darstellen können. Eine Einschränkung erleidet die Darstellung eines beliebigen Verlaufes von $h(\vartheta)$ schon dadurch, dass die Function Φ ihrer Bedeutung gemäss nur positive Werthe für alle ϱ haben darf. Bei der gegenwärtigen Unkenntnis des thatsächlichen Verlaufes von h kann zunächst nicht auf diesen Punkt eingegangen werden. Vorerst dürfte aber die Behauptung grundlos sein, die hier vertretene Ansicht über das Wesen des Zodiacallichtes könne nicht mit den beobachteten Thatsachen in Einklang gebracht werden.

Mit Sicherheit dürfte anzunehmen sein, dass die Helligkeit des Zodiacallichtes von kleinen Elongationen bis zu solchen von etwa 90^0 fortwährend abnimmt und dies kann durch passende Wahl von Φ erreicht werden. Durch Differentiation von (3) nach ϑ ergiebt sich nämlich leicht:

$$\frac{\partial h}{\partial \vartheta} = -a \sin\vartheta \left[\Phi(a) \frac{f(\pi-\vartheta)}{\sin^2\vartheta} + \frac{a}{P} \Phi(P) \frac{f(a_0)}{\sin^2 a_0} \frac{\cos\vartheta}{\cos a_0} \right]$$
$$+ a \cos\vartheta \int_{a_0}^{\pi-\vartheta} \frac{f(a)}{\sin^2 a} \frac{d}{d\varrho}(\varrho\, \Phi) \cdot da.$$

Wenn demnach Φ stärker wie $\frac{1}{\varrho}$ mit wachsendem ϱ abnimmt, wird zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 90^0$ sicher $\frac{dh}{d\vartheta}$ negativ sein, welches elementare Beleuchtungsgesetz auch zu Grunde

gelegt werden mag und man kann durch passende Wahl von $\Phi(\varrho)$ die Abnahme von h beliebig gross machen. Ganz in der Nähe von $\vartheta = 90^0$ wird übrigens unter allen Umständen $\frac{dh}{d\vartheta}$ negativ sein, da hier $\cos\vartheta$ sehr klein ist.

Bei einer Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung wird man also so zu verfahren haben. Man wird einen Ausdruck für $\Phi(\varrho)$ interpolatorisch anzusetzen haben, der soviele Parameter enthält, dass man durch deren Bestimmung einen genügenden Anschluss an die Beobachtungen zu erzielen hoffen darf. Dabei ist zu beachten, dass die Beschaffenheit der Function $\Phi(\varrho)$ zwischen $\varrho = 0$ bis $\varrho = a$ ganz gleichgültig für die Darstellung der Helligkeit des Zodiacallichtes bei Elongationen $> 90^0$ ist. Es soll hier, wie schon erwähnt, auf diese Angelegenheit nicht näher eingegangen werden, da so gut wie gar nichts sicheres über den quantitativen Verlauf der Helligkeit des Zodiacallichtes bekannt ist. Einige Schwierigkeit wird indessen immer die Wahl des elementaren Beleuchtungsgesetzes verursachen.

Tabelle: $\Psi_\nu(\alpha)$ (Seite 274).

$\alpha \mid \nu_1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0^0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
10	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
15	1 1	1 1	2 2	2 1	3 2	3 2	4 3	4 3	4 3	5 4
20	2 1	4 3	5 3	7 5	8 5	9 6	11 7	12 8	13 9	14 9
25	4 2	9 5	12 7	16 9	19 11	22 13	24 13	27 15	29 16	30 16
30	9 5	17 8	25 13	31 15	37 18	43 21	47 23	51 24	55 26	58 28
35	17 8	31 14	44 19	55 24	66 29	74 31	82 35	88 37	94 39	99 41
40	27 10	52 21	73 27	91 35	106 40	119 45	131 49	140 52	147 53	154 55
45	43 16	81 29	112 39	139 48	161 55	180 61	195 64	207 67	217 70	224 70
50	65 22	119 38	165 53	202 63	233 72	258 78	277 82	292 85	302 85	310 86
55	93 28	169 50	232 67	282 80	322 89	353 95	376 99	393 101	404 102	411 101
60	129 36	233 64	316 84	381 99	431 109	468 115	494 118	512 119	522 118	527 116
65	174 45	311 78	417 101	498 117	559 128	601 133	629 135	646 134	653 131	654 127
70	228 54	404 93	537 130	635 137	705 146	752 151	780 151	794 148	796 143	789 135
75	293 65	514 110	676 139	792 157	870 165	919 167	945 165	953 159	947 151	931 142
80	369 76	640 126	834 158	966 174	1052 182	1100 181	1121 176	1120 167	1103 156	1075 144
85	457 88	784 144	1010 176	1158 192	1248 196	1292 192	1304 183	1291 171	1260 157	1218 143
90	557 100	945 161	1203 198	1365 207	1455 207	1492 200	1491 187	1462 171	1414 154	1356 138
95	670 118	1121 176	1412 209	1584 219	1670 215	1695 203	1676 185	1629 167	1562 148	1485 129
100	795 125	1314 193	1633 221	1811 227	1889 219	1897 202	1857 181	1788 159	1700 138	1603 118
105	932 137	1519 205	1865 232	2043 232	2106 217	2092 195	2029 172	1935 147	1824 124	1706 103
110	1081 149	1736 217	2102 237	2274 231	2317 211	2278 186	2187 158	2067 132	1932 108	1794 88
115	1239 158	1961 225	2342 240	2500 226	2517 200	2448 170	2327 140	2181 114	2023 91	1866 72
120	1407 168	2191 230	2577 235	2716 216	2701 184	2599 151	2448 121	2275 94	2096 73	1921 55
125	1583 176	2421 230	2805 228	2915 199	2865 164	2728 129	2547 99	2350 75	2151 56	1961 40
130	1763 180	2647 226	3017 212	3092 177	3004 139	2833 105	2623 76	2405 55	2190 39	1988 27
135	1945 182	2863 216	3209 192	3244 152	3117 113	2913 80	2679 56	2442 37	2215 25	2004 16
140	2126 181	3064 201	3375 166	3367 123	3201 84	2969 56	2715 36	2466 24	2229 14	2013 9
145	2302 176	3242 178	3510 135	3458 91	3260 59	3005 36	2736 21	2478 12	2237 8	2017 4
150	2466 164	3391 149	3612 102	3520 62	3295 35	3024 19	2747 11	2483 5	2240 3	2019 2
155	2613 147	3506 115	3680 68	3556 38	3312 17	3032 8	2751 4	2485 2	2240 0	2019 0
160	2736 123	3583 77	3717 37	3571 15	3319 7	3035 3	2752 1	2485 0	2240 0	2019 0
165	2826 90	3624 41	3731 14	3576 5	3320 1	3035 0	2752 0	2485 0	2240 0	2019 0
170	2876 50	3637 13	3733 2	3576 0	3320 0	3035 0	2752 0	2485 0	2240 0	2019 0
175	2890 14	3638 1	3733 0	3576 0	3320 0	3035 0	2752 0	2485 0	2240 0	2019 0
180	2890 0	3638 0	3733 0	3576 0	3320 0	3035 0	2752 0	2485 0	2240 0	2019 0