

Sitzungsberichte
der
mathematisch-physikalischen Classe
der
k. b. Akademie der Wissenschaften
zu München.

1901. Heft I.



München.
Verlag der k. Akademie
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Neuber)

Ueber Erwärmung geschlossener Lufträume.

Von G. Recknagel.

(Eingelaufen 4. Mai.)

1. Es soll ermittelt werden, wie die Erwärmung eines geschlossenen mit Luft erfüllten Raumes vor sich geht, dem eine konstante Wärmequelle von bekannter Leistung Wärme zuführt, während eine homogene Wand von bestimmter Fläche (F), gegebener Dicke (δ) und bekanntem Material (s Gewicht des Kubikmeters, w Wärmekapazität des Kilogramms, λ innere Leitungsfähigkeit, h_1 äussere Leitungsfähigkeit der Innenseite, h_2 äussere Leitungsfähigkeit der Aussenseite) der äusseren Luft zugekehrt ist, deren Temperatur A durchaus konstant ist. An den übrigen Wandflächen wird Wärme weder aufgenommen noch abgegeben.

Ueber den Anfangszustand wird die Annahme gemacht, dass er durch irgend einen Abkühlungsprozess entstanden ist, durch welchen die Innenluft die Temperatur J_0 , die Mauer- schicht in der Entfernung x die Temperatur $U_0 = f_0(x)$ erhalten hat. Besondere Werte sind $f_0(0) = \mathfrak{T}_i$, $f_0(\delta) = \mathfrak{T}_a$.

Nach Verlauf von z Stunden sind diese Temperaturen J , $U = f(x, z)$, $\mathfrak{T}_i$, $\mathfrak{T}_a$.

2. Von der Wärmezufuhr gewinnt man am leichtesten eine deutliche Vorstellung, wenn man an eine Luftheizung denkt, die durch eine Oeffnung vom Querschnitt q Luft von der Temperatur R° Celsius mit der Geschwindigkeit v zuführt. Man erhält dann stündlich $3600 v q$ Kubikmeter Luft, vom Gewichte

$3600 \cdot v q \frac{1,293}{1 + \alpha R} \cdot \frac{B}{760}$ Kilogramm, die bei jedem Grad, um den sie sich abkühlt, die Wärmemenge

$$3600 \cdot v q \frac{1,293}{1 + \alpha R} \cdot \frac{B}{760} c = Q c$$

abgibt, wenn c die Wärmekapazität bei konstantem Druck bezeichnet. In dem an die Zeit Z anschliessenden Zeitelemente dz dringt die Luftmenge $Q dz$ ein, welche sich mit der Zimmerluft von der Masse L und der Temperatur J mischt und eine Erhöhung dieser Temperatur um dJ hervorbringt, während sie sich selbst von R auf $(J + dJ)$ Grade abkühlt. Zugleich muss, damit diese Temperaturerhöhung eintritt, von der zugeführten Wärme der Verlust gedeckt werden, den die Innenluft durch Wärmeabgabe an die Innenwand erleidet, nämlich $(J - \mathfrak{T}_i) F h_i dz$. Man erhält demnach (von unendlich Kleinem zweiter Ordnung abgesehen) die Gleichung:

$$c Q dz (R - J) = c L dJ + (J - \mathfrak{T}_i) F h_i dz. \quad (\text{I})$$

Hier sind J und $\mathfrak{T}_i$ Funktionen der Zeit (Z). Die Masse L der Innenluft ist nicht völlig konstant. Denn da durch Abzüge und Poren fortgesetzt soviel Luft entweicht, als zum Ausgleich des innern Luftdruckes mit dem äusseren dient, so vermindert sich die Dichtigkeit der inneren Luft infolge der stetigen Temperatursteigerung in dem Maße, dass $L = \frac{L_0}{1 + \alpha J}$, wenn L_0 die bei 0°C. den Raum ausfüllende Luftmasse und α den Ausdehnungskoeffizienten der Luft bezeichnet. Da durch Berücksichtigung dieser Dichtigkeitsänderung auch L als Funktion der Zeit und damit eine Komplikation in die Rechnung eingeführt würde, die zur erreichbaren Genauigkeit ausser Verhältnis stünde, wird L konstant angenommen.¹⁾

¹⁾ Die Ungenauigkeit, welche dadurch in die Rechnung kommt, dass man für L einen konstanten Mittelwert annimmt, z. B. den für 10°C. geltenden $\frac{L_0}{1,037}$ beträgt demnach bei Heizung von 0° auf 20°C.

3. Eine zweite Gleichung erhält man, wenn man das Schicksal der durch die Innenfläche in die Wand eindringenden Wärme weiter verfolgt. Sie kann teils zur Temperaturerhöhung der Mauerschichten verwendet werden und teils von der Aussenwand ins Freie entweichen.

$$(J - \mathfrak{T}_i) F h_1 dz = dz \int_0^{\delta} F s w \frac{dU}{dz} dx + (\mathfrak{T}_a - A) F h_2 dz. \quad (\text{II})$$

Bedenkt man, dass (vgl. „Abkühlung“ Nr. 5 und 6)

$$(J - \mathfrak{T}_i) h_1 = -\lambda \left| \frac{dU}{dx} \right|_0; \quad (\mathfrak{T}_a - A) h_2 = -\lambda \left| \frac{dU}{dx} \right|_{\delta}$$

und

$$\left| \frac{dU}{dx} \right|_{\delta} - \left| \frac{dU}{dx} \right|_0 = \int_0^{\delta} \frac{d^2 U}{dx^2} dx,$$

so erhält man aus II:

$$\lambda \int_0^{\delta} \frac{d^2 U}{dx^2} dx = \int_0^{\delta} s w \frac{dU}{dz} dx$$

woraus man die Beziehung zwischen der Temperatur U und den beiden unabhängigen Variablen x und z ableiten kann:

$$\lambda \frac{d^2 U}{dx^2} = s w \frac{dU}{dz}. \quad (\text{III})$$

4. Die weitere Entwicklung muss sich an den Grenzfall anschliessen, in welchem die variablen Temperaturen J und U die höchsten durch die gegebene Wärmequelle erreichbaren Werte angenommen haben und auf diesen konstant erhalten werden. Diese Grenzmaxima sollen durch den Index m kenntlich gemacht werden.

Da in diesem Falle dJ und $\frac{dU}{dz} dz$ Null sind, so folgt aus I

$$c Q (R - J_m) = (J_m - \mathfrak{T}_{im}) F h_1 \quad (\text{Ia})$$

d. h. alle zugeführte Wärme dringt in die Wand ein.

weniger als 4 Prozent der Luftmasse und ist bei dem geringen Einfluss, den die Grösse dieser Masse überhaupt auf den Vorgang ausübt, ohne Bedeutung.

Aus II erhält man:

$$(J_m - \mathfrak{T}_{im}) h_1 = (\mathfrak{T}_{am} - A) h_2 \quad (\text{IIa})$$

d. h. ebensoviel Wärme, als durch die Innenwand eindringt, wird an der Aussenwand abgegeben.

Für die Temperaturverteilung innerhalb der Mauer hat man aus (III)

$$\frac{d^2 U_m}{dx^2} = 0$$

woraus

$$U_m = C_m - D_m x. \quad (\text{IV})$$

Dabei ist $C_m = \mathfrak{T}_{im}$ die Maximaltemperatur der Innenwand, und aus $\mathfrak{T}_{am} = C_m - D_m \delta$ folgt:

$$D_m = \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta}.$$

Aus IV folgt auch:

$$\frac{d U_m}{dx} = - D_m$$

und da

$$-\lambda \left| \frac{d U_m}{dx} \right|_0 = (J_m - \mathfrak{T}_{im}) h_1$$

und

$$\left| \frac{d U_m}{dx} \right|_0 = \frac{d U_m}{dx} = - D_m,$$

so ergibt sich

$$\lambda D_m = (J_m - \mathfrak{T}_{im}) h_1$$

oder

$$\lambda \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta} = (J_m - \mathfrak{T}_{im}) h_1. \quad (\text{IIIa})$$

Es werden nun aus den Gleichungen Ia, IIa, IIIa die Zwischentemperaturen $\mathfrak{T}_{am}$ und $\mathfrak{T}_{im}$ eliminiert. Aus

$$\mathfrak{T}_{am} - A = \frac{h_1}{h_2} (J_m - \mathfrak{T}_{im})$$

$$\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am} = \frac{h_1 \delta}{\lambda} (J_m - \mathfrak{T}_{im})$$

erhält man

$$\mathfrak{T}_{im} - A = (J_m - \mathfrak{T}_{im}) \left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1 \delta}{\lambda} \right)$$

oder

$$\mathfrak{T}_{im} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1 \delta}{\lambda} \right) = J_m \left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1 \delta}{\lambda} \right) + A.$$

Führt man hier den Transmissionskoeffizienten p ein mit der Definition:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{\delta}{\lambda},$$

so ergibt sich:

$$J_m - \mathfrak{T}_{im} = (J_m - A) \frac{p}{h_1}$$

oder

$$\mathfrak{T}_{im} - A = (J_m - A) \left(1 - \frac{p}{h_1} \right)$$

und

$$\mathfrak{T}_{am} - A = (J_m - A) \frac{p}{h_2}.$$

Durch Substitution in Ia erhält man zunächst

$$c Q (R - J_m) = (J_m - A) p F, \quad (\text{I b})$$

woraus sich eine der drei Grössen Q , R , J_m berechnen lässt.

Für den grössten erreichbaren Ueberschuss der Lufttemperatur J_m über die Temperatur A der Aussenluft ergibt sich daraus

$$J_m - A = (R - A) \frac{c Q}{c Q + p F},$$

was mit der von Fourier (Chap. I Sect. VI) gegebenen Formel im wesentlichen übereinstimmt. Ferner erhält man:

$$D_m = (J_m - A) \frac{p}{\lambda}$$

$$C_m = A + (J_m - A) \left(1 - \frac{p}{h_1} \right).$$

5. Es soll nun die Temperatur U aufgefasst werden als Differenz zwischen der Maximaltemperatur

$$U_m = C_m - D_m x$$

und einer niedrigeren Temperatur U' , welche angibt, wie weit die an der Stelle x bestehende Temperatur U zur Zeit Z noch von der Maximaltemperatur entfernt ist:

$$U = C_m - D_m x - U'.$$

Bewirkt man nun durch geeignete Wahl der Funktion U' , dass

$$\frac{dU'}{dz} = \kappa \frac{d^2 U'}{dx^2},$$

so ist auch Gleichung III erfüllt, d. h.

$$\frac{dU}{dz} = \kappa \frac{d^2 U}{dx^2} \quad \left(\text{wenn } \kappa = \frac{\lambda}{s w} \right).$$

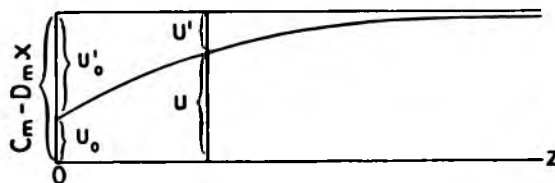
Da nun U' eine mit fortschreitender Zeit abnehmende Funktion von z ist, so hindert nichts

$$U' = (a \cos m x + b \sin m x) e^{-\kappa m^2 z}$$

zu setzen. Denn die damit eingeführte Annahme, dass die Maximalwerte erst in unendlich langer Zeit vollständig erreicht werden, ist durchaus sachgemäss.

Stellt man den Gang der Temperatur U an der Stelle x als Funktion der Zeit Z dar, so erhält man eine Kurve, wie Fig. 1, in welcher die Parallele $U_m = C_m - D_m x$ als Asymptote erscheint.

Fig. 1.



Da sich für m in U' unendlich viele Werte ergeben und sowohl a als b von m abhängig werden, erhält man für die Funktion U die unendliche Reihe:

$$U = C - D x - \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \cos m_n x + b_n \sin m_n x) e^{-\kappa m_n^2 z}] \quad (\text{VI})$$

wobei nun an C und D zur Vereinfachung der Schreibweise der Index m weggelassen ist.

Ferner wird das Temperaturgefälle in der Wand im allgemeinen

$$-\frac{dU}{dx} = D - \sum [m_n (a_n \sin m_n x - b_n \cos m_n x) e^{-\kappa m_n^2 z}] \quad (\text{VII})$$

und die beiden besonderen Werte desselben

$$-\left. \frac{dU}{dx} \right|_0 = D + \sum (m_n b_n e^{-\kappa m_n^2 z}) \quad (\text{VIIa})$$

$$-\left. \frac{dU}{dx} \right|_\delta = D - \sum [m_n (a_n \sin m_n \delta - b_n \cos m_n \delta) e^{-\kappa m_n^2 z}] \quad (\text{VIIb})$$

Für die Temperaturen an den Grenzflächen erhält man

$$(x=0) \mathfrak{T}_i = C - \sum (a_n e^{-\kappa m_n^2 z}) \quad (\text{VIa})$$

$$(x=\delta) \mathfrak{T}_a = C - D \delta - \sum [(a_n \cos m_n \delta + b_n \sin m_n \delta) e^{-\kappa m_n^2 z}] \quad (\text{VIb})$$

Im Anfangszustande, wenn das Heizen beginnt, ist

$$(z=0) U_0 = C - D x - \sum (a_n \cos m_n x + b_n \sin m_n x)$$

$$(z=0, x=0) \mathfrak{T}_{i0} = C - \sum (a_n)$$

$$(z=0, x=\delta) \mathfrak{T}_{a0} = C - D \delta - \sum (a_n \cos m_n \delta + b_n \sin m_n \delta).$$

U_0 muss mit dem Problem zugleich als Funktion von x gegeben sein, da nur auf Grund einer vollständigen Beschreibung des Anfangszustandes etwas bestimmtes über die Wirkung der Heizung ausgesagt werden kann.

6. Bestimmung der Konstanten m, a, b .

1) Substituiert man aus VIb und VIIb in

$$(\mathfrak{T}_a - A) h_2 = - \left. \frac{dU}{dx} \right|_\delta \lambda,$$

so erhält man

$$(C - D \delta - A) \frac{h_2}{\lambda} - \frac{h_2}{\lambda} \sum [(a_n \cos m_n \delta + b_n \sin m_n \delta) e^{-\kappa m_n^2 z}] \\ = D - \sum [m_n (a_n \sin m_n \delta - b_n \cos m_n \delta) e^{-\kappa m_n^2 z}].$$

Da diese Gleichung für jedes Z gelten soll, müssen die Coeffizienten von $e^{-\kappa m_n^2 z}$ einander gleich sein.

Die Forderung $(C - D \delta - A) \frac{h_2}{\lambda} = D$ ist erfüllt, weil $C - D \delta = \mathfrak{T}_{am}$, $D = \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta}$ und gemäss II a und III a (in Nr. 4) $(\mathfrak{T}_{am} - A) h_2 = \lambda \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta}$ ist. Es bleibt somit noch zu erfüllen:

$$\frac{h_2}{\lambda} (a_n \cos m_n \delta + b_n \sin m_n \delta) = m_n (a_n \sin m_n \delta - b_n \cos m_n \delta) \quad (\text{VIII})$$

für jedes n . Lässt man zur Vereinfachung der Schreibweise den Index n weg, dividiert durch $a \cos m \delta$ und setzt β für $\frac{b}{a}$, so erhält man zunächst

$$\frac{h_2}{\lambda} (1 + \beta \operatorname{tg} m \delta) = m (\operatorname{tg} m \delta - \beta)$$

oder

$$\operatorname{tg} m \delta = \frac{p_2 + m \beta}{m - \beta p_2}, \quad (\text{VIII a})$$

wobei p_2 für $\frac{h_2}{\lambda}$ geschrieben ist. Durch diese Gleichung sind die Koeffizienten m und β mit einander verbunden.

7. Fortsetzung. Substituiert man in die Gleichung

$$- \left| \frac{dU}{dx} \right|_0 \lambda = (J - \mathfrak{T}_i) h_1$$

die aus VII a und VI a entnommenen Werte von $\left| \frac{dU}{dx} \right|_0$ und $\mathfrak{T}_i$, so erhält man

$$D \lambda + \lambda \sum [m b e^{-\kappa m^2 z}] = (J - C + \sum [a e^{-\kappa m^2 z}]) h_1.$$

Hieraus ergibt sich ein Ausdruck für die Lufttemperatur J als Funktion der Zeit z

$$J = \frac{\lambda}{h_1} D + C + \Sigma \left[\left(\frac{\lambda}{h_1} m b - a \right) e^{-\kappa m^2 z} \right],$$

in welchem (nach Nr. 4)

$$C + \frac{\lambda}{h_1} D = \mathfrak{T}_{im} + \frac{\lambda}{h_1} \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta} = J_m$$

die Maximaltemperatur der Luft ist. Man schreibt somit einfacher

$$J = J_m - \Sigma \left[\left(a - \frac{\lambda}{h_1} m b \right) e^{-\kappa m^2 z} \right]. \quad (\text{IX})$$

Es wird nun ein zweiter Ausdruck für die Temperatur J hergestellt, indem man die Differentialgleichung I

$$c L \frac{dJ}{dz} = c Q (R - J) - F (J - \mathfrak{T}_i) h_1$$

nach Einsetzung der Werte von J (aus IX) und $\mathfrak{T}_i$ (aus VIa) integriert. Die Differentialgleichung wird zunächst:

$$c L \frac{dJ}{dz} = c Q R - c Q J_m + c Q \Sigma \left[\left(a - \frac{\lambda}{h_1} m b \right) e^{-\kappa m^2 z} \right] \\ - F D \lambda - F \lambda \Sigma [m b e^{-\kappa m^2 z}],$$

und es lässt sich nachweisen, dass das Aggregat der Constanten

$$c Q R - c Q J_m - F D \lambda = 0.$$

Denn nach Nr. 4, Ia und IIIa ist

$$c Q (R - J_m) = F (\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}) \frac{\lambda}{\delta} = F D \lambda.$$

Sodann gibt die Ausführung der Integration

$$c L J = - \frac{c Q}{\kappa} \Sigma \left[\left(\frac{a}{m^2} - \frac{\lambda}{h_1} \frac{b}{m} \right) e^{-\kappa m^2 z} \right] \\ + F \frac{\lambda}{\kappa} \Sigma \left[\frac{b}{m} e^{-\kappa m^2 z} \right] + \text{Constante.}$$

Die Integrationskonstante lässt sich aus der Erwägung bestimmen, dass für $z = \infty$ das $J = J_m$ wird. Demnach erhält man:

$$\text{Constante} = c L J_m.$$

Dividiert man nun die Gleichung durch $c L$, den kalorischen Wasserwert der Luft, und erinnert sich, dass

$$\kappa = \frac{\lambda}{w s},$$

wobei $w s$ den Wasserwert eines Kubikmeters vom Material der Wand vorstellt, so erhält man

$$J - J_m = -\frac{c Q}{\lambda} \left(\frac{w s}{c L} \right) \Sigma \left[\left(\frac{a}{m^2} - \frac{\lambda}{h_1} \frac{b}{m} \right) e^{-\kappa m^2 z} \right] \\ + F \left(\frac{w s}{c L} \right) \Sigma \left[\frac{b}{m} e^{-\kappa m^2 z} \right].$$

Der Bruch $\frac{c L}{F w s}$ soll mit ϱ bezeichnet werden, ferner die Verhältnisse $\frac{c Q}{\lambda F}$ mit p_0 , $\frac{h_1}{\lambda}$ mit p_1 . Dann ist

$$J = J_m - \frac{p_0}{\varrho} \Sigma \left[\left(\frac{a}{m^2} - \frac{1}{p_1} \frac{b}{m} \right) e^{-\kappa m^2 z} \right] + \frac{1}{\varrho} \Sigma \left[\frac{b}{m} e^{-\kappa m^2 z} \right]. \quad (\text{X})$$

Man kann nun zunächst die Anfangstemperatur der Luft einführen, indem man zugleich 0 für Z und J_0 für J setzt. Man erhält so:

$$J_m - J_0 = \Sigma \left(a - \frac{1}{p_1} m b \right) \quad (\text{IX a})$$

und

$$J_m - J_0 = \frac{p_0}{\varrho} \Sigma \left(\frac{a}{m^2} - \frac{1}{p_1} \frac{b}{m} \right) - \frac{1}{\varrho} \Sigma \left(\frac{b}{m} \right),$$

oder

$$\varrho (J_m - J_0) = p_0 \Sigma \left(\frac{a}{m^2} \right) - \left(\frac{p_0}{p_1} + 1 \right) \Sigma \left(\frac{b}{m} \right). \quad (\text{X a})$$

Ferner müssen die beiden für J erhaltenen Reihen identisch sein, wodurch folgendes zweite System von Gleichungen erhalten wird:

$$a - \frac{m b}{p_1} = \frac{p_0}{e} \frac{a}{m^2} - \frac{p_0}{e} \frac{b}{p_1 m} - \frac{b}{m e}$$

oder, wenn man mit $\frac{e p_1 m^3}{a}$ multipliziert und β für $\frac{b}{a}$ schreibt:

$$e p_1 m^3 - p_0 p_1 = \beta (m^3 e - p_0 m - p_1 m),$$

woraus sich ergibt:

$$\beta = \frac{p_1 (p_0 - e m^3)}{m (p_0 + p_1 - e m^3)}. \quad (\text{XI})$$

Wird dieser Ausdruck in VIII a substituiert, der Nenner wegmultipliziert und nach steigenden Potenzen von m geordnet, so erhält man:

$$\operatorname{tg} m \delta = m \frac{p_0 p_1 + (p_0 + p_1) p_2 - e (p_1 + p_2) m^3}{-p_0 p_1 p_2 + (p_0 + p_1 + e p_1 p_2) m^2 - e m^4}.$$

Für die Auflösung empfiehlt sich die Umformung:

$$m \cotg m \delta = -P + \frac{m^3 [p_0 + p_1 - e P (p_1 + p_2) + e p_1 p_2] - e m^4}{p_1 p_2 + p_0 (p_1 + p_2) - e (p_1 + p_2) m^2}$$

wobei mit P der reciproke Wert von

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{P}$$

bezeichnet ist. Dividiert man nochmals partiell mit dem Bekannten des Nenners in das erste Glied des Zählers, so erhält man:

$$P_1 = \frac{p_0 + p_1 - e P (p_1 + p_2) + e p_1 p_2}{p_1 p_2 + p_0 (p_1 + p_2)}$$

als Koeffizienten von m^2 , und demnach

$$m \cotg m \delta = -P + P_1 m^2 + \frac{e [P_1 (p_1 + p_2) - 1] m^4}{p_1 p_2 + p_0 (p_1 + p_2) - e (p_1 + p_2) m^2}$$

und schliesslich

$$m \cotg m \delta = -P + P_1 m^2 + \frac{\frac{e [P_1 (p_1 + p_2) - 1] m^4}{p_1 p_2 + p_0 (p_1 + p_2)}}{1 - \frac{e (p_1 + p_2)}{p_1 p_2 + p_0 (p_1 + p_2)} m^2}.$$

8. Nachdem so gezeigt ist, wie sich die m und β bestimmen lassen, erübrigt noch die Bestimmung der Koeffizienten a .

Hiezu muss der Anfangszustand dienen, der einerseits durch die Gleichung

$$U_0 = C - Dx - \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)],$$

andererseits durch bestimmte Werte der inneren Lufttemperatur J_0 , der Aussentemperatur A , und für die Wand durch eine Funktion von x gegeben ist, die mit $f_0(x) = U_0$ bezeichnet werden soll. Man hat demnach die Gleichung:

$$C - Dx - f_0(x) = \sum [a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)], \quad (\text{XIII})$$

in welcher die Faktoren $(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)$ bestimmt sind und für jedes x zwischen 0 und δ berechnet werden können.

Um irgend einen der Koeffizienten a_r zu bestimmen, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit dem zu a_r gehörigen Faktor

$$\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x$$

und integriert beiderseits zwischen den Grenzen 0 und δ . Dadurch erhält man links eine Funktion von δ , m , β , C , D , die mit $\varphi(m_r)$ bezeichnet werden soll, so dass also

$$\varphi(m_r) = \int_0^\delta [C - Dx - f_0(x)] [\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x] dx. \quad (\text{XIV})$$

Ist der zu a_r gehörige Wert von m_r bekannt, so lässt sich $\varphi(m_r)$ numerisch berechnen.

Auf der rechten Seite erhält man eine unendliche Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$t_n = a_n \int_0^\delta (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x) (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x) \cdot dx$$

und es ist bereits (Abkühlung Nr. 8) nachgewiesen, dass sich dieses Glied im allgemeinen d. h. so oft n von r verschieden ist, auf

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}$$

reduziert d. h. auf den Wert, welchen das Integral an der untern Grenze ($x=0$) annimmt, während es an der obern Grenze ($x=\delta$) vermöge der Gleichung (VIII) verschwindet.

Ist hingegen $n=r$ d. h. handelt es sich um

$$t_r = a_r \int_0^\delta (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)^2 dx,$$

so ergibt die Substitution $n=r$ in das allgemeine Glied sowohl an der obern als an der untern Grenze die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, und es muss somit der Wert von t_r besonders bestimmt werden. Man erhält leicht wie a. a. O. S. 90:

$$t_r = \left[\frac{\delta}{2} (1 + \beta_r^2) + \left(1 + \frac{\beta_r}{m_r} p_2 \right) \frac{\sin m_r \delta}{2 m_r} \cdot \frac{\cos(m_r \delta - \varphi_r)}{\cos \varphi_r} \right] a_r = a_r B_r.$$

In diesem Ausdruck ist auch der Wert ζ_r enthalten, den das t_n für $n=r$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ an der untern Grenze besitzt. Folglich besteht die Gleichung:

$$\varphi(m_r) = t_r + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2} \right) - \zeta_r, \quad (\text{XV})$$

wobei ζ_r noch zu bestimmen ist. Es geschieht dieses, indem man das allgemeine Glied der Reihe

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}$$

durch Einführung der Werte von β von dem Nenner ($m_r^2 - m_n^2$) befreit.

Da (nach XI)

$$\beta = p_1 \frac{p_0 - \varrho m^2}{m(p_0 + p_1 - \varrho m^2)}$$

folgt

$$\beta_r m_r - \beta_n m_n = p_1 \frac{p_1 \varrho (m_n^2 - m_r^2)}{(p_0 + p_1 - \varrho m_r^2)(p_0 + p_1 - \varrho m_n^2)}$$

und somit

$$\begin{aligned}
a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2} &= - \frac{a_n p_1^2 \varrho}{(p_0 + p_1 - \varrho m_r^2)(p_0 + p_1 - \varrho m_n^2)} \\
&= - \frac{p_1 \varrho}{p_0 + p_1 - \varrho m_r^2} \cdot \frac{a_n p_1}{p_0 + p_1 - \varrho m_n^2} \\
&= - \frac{\beta_r m_r \varrho}{p_0 - \varrho m_r^2} \cdot \frac{\beta_n a_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2}.
\end{aligned}$$

Demnach ist das allgemeine Glied der Reihe das Produkt aus einer Constanten

$$- \frac{\beta_r m_r \varrho}{p_0 - \varrho m_r^2},$$

in welcher β_r und m_r zu dem Koeffizienten a_r gehören, der bestimmt werden soll, und einer von Glied zu Glied Veränderlichen:

$$\frac{a_n \beta_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2},$$

und ζ_r erhält (wegen $m_n = m_r$) den Wert:

$$\zeta_r = - \varrho a_r \left(\frac{\beta_r m_r}{p_0 - \varrho m_r^2} \right)^2.$$

Somit geht die Gleichung XV über in

$$\begin{aligned}
\varphi(m_r) &= a_r B_r + \varrho a_r \left(\frac{\beta_r m_r}{p_0 - \varrho m_r^2} \right)^2 \\
&\quad - \frac{\beta_r m_r \varrho}{p_0 - \varrho m_r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_n a_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2} \right) \quad (\text{XV a})
\end{aligned}$$

und es ist noch übrig, die Summe der Reihe zu finden.

Hiezu ist die Gl. X a verwendbar, nämlich:

$$p_0 \sum \left(\frac{a_n}{m_n^2} \right) = \varrho (J_m - J_0) + \left(\frac{p_0}{p_1} + 1 \right) \sum \left(\frac{b_n}{m_n} \right),$$

wenn man $\sum \left(\frac{b_n}{\beta_n m_n^2} \right)$ in folgender Weise entwickelt:

$$\begin{aligned}
\sum \left(\frac{a_n}{m_n^2} \right) &= \sum \left(\frac{b_n}{\beta_n m_n^2} \right) = \frac{1}{p_1} \sum \left(\frac{b_n (p_0 + p_1 - \varrho m_n^2)}{m_n (p_0 - \varrho m_n^2)} \right) \\
&= \frac{p_0 + p_1}{p_1} \sum \left(\frac{b_n}{m_n (p_0 - \varrho m_n^2)} \right) - \frac{\varrho}{p_1} \sum \left(\frac{b_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2} \right). \quad (\text{VI})
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\varrho}{p_1} \sum \left(\frac{b_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2} \right) = \frac{p_0 + p_1}{p_1} \sum \left(\frac{b_n}{m_n (p_0 - \varrho m_n^2)} \right) - \sum \left(\frac{a_n}{m_n^2} \right)$$

und durch Substitution aus Gleichung (X a)

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{p_1} \sum \left(\frac{b_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2} \right) &= \frac{p_0 + p_1}{p_1} \sum \left(\frac{b_n}{m_n (p_0 - \varrho m_n^2)} \right) \\ &\quad - \frac{p_0 + p_1}{p_0 p_1} \sum \left(\frac{b_n}{m_n} \right) - \frac{\varrho}{p_0} (J_m - J_0). \end{aligned}$$

Die beiden Summen auf der rechten Seite lassen sich zusammenziehen, da

$$\frac{b_n p_0}{m_n (p_0 - \varrho m_n^2)} - \frac{b_n}{m_n} = \frac{\varrho b_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2}.$$

Somit erhält man

$$\frac{\varrho}{p_1} \sum \left(\frac{b_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2} \right) = \varrho \frac{p_0 + p_1}{p_0 p_1} \sum \left(\frac{b_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2} \right) - \frac{\varrho}{p_0} (J_m - J_0)$$

oder

$$\sum \left(\frac{b_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2} \right) = J_m - J_0.$$

Da $b_n = \beta_n a_n$, ist hiemit die gewünschte Summe in XV a als Differenz zweier Lufttemperaturen bestimmt.

Durch Substitution wird

$$\varphi(m_r) = a_r B_r + \varrho a_r \left(\frac{\beta_r m_r}{p_0 - \varrho m_r^2} \right)^2 - \frac{\varrho \beta_r m_r}{p_0 - \varrho m_r^2} (J_m - J_0). \quad (\text{XV b})$$

Daraus bestimmt sich endlich der gesuchte Koeffizient a_r

$$a_r = \frac{\varphi(m_r) + \frac{\varrho \beta_r m_r}{p_0 - \varrho m_r^2} (J_m - J_0)}{B_r + \varrho \left(\frac{\beta_r m_r}{p_0 - \varrho m_r^2} \right)^2}.$$
