Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Symmetrische und alternirende Lösungen der Gleichung $SX = XS'$.

Von **A. Voss** in Würzburg.

(*Eingelaufen 2. Mai.*)

In der vorhergehenden Arbeit über die Zahl der cogredienten etc. Transformationen einer bilinearen Form S in sich hat es sich als nützlich erwiesen, die Anzahl der symmetrischen und alternirenden Formen zu bestimmen, welche der Bedingung $S'XS = SXS'$ genügen. Ich möchte hier auf ein verwandtes, allerdings viel einfacheres Problem hinweisen, nämlich auf die Bestimmung der Anzahl der symmetrischen und alternen Formen, welche die Gleichung

$$SX = XS' \tag{1}$$

befriedigen.

Bekanntlich giebt es immer Transformationen X, welche eine Form S contragredient in die ihr ähnliche S' verwandeln, d. h. welche die Gleichung

$$X^{-1}SX = S'$$

befriedigen, wobei $|X|$ nicht Null ist. Unter dieser Voraussetzung kann jede andere Lösung Z von 1) in der Form

$$Z = YX$$

angenommen werden. Man erhält durch Eintragen von Z in 1)

$$SYX = YXS' = YSX$$

oder

$$SY = YS.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der Gleichung 1) ist daher ebenso gross, wie die der mit S vertauschbaren Formen, also gleich N.

Da aus 1) folgt

$$S X' = X' S',$$

so muss mit X zugleich auch die symmetrische (alternirende) Form $X + X'$ $(X' - X)$ der Gleichung 1) genügen. Die N linear unabhängigen Lösungen von 1) zerfallen also in p symmetrische und q alterne, und dabei ist $p + q = N$.[1])

Man kann diese Formen auf folgendem Wege bestimmen. Sind

$$X_1, X_2 \ldots X_N$$

die unabhängigen Lösungen von 1), so ist

$$X = \Sigma \alpha_k X_k$$

die allgemeinste, und zur Ermittelung der symmetrischen oder alternen Formen X hat man die Gleichung

$$\sum_k \alpha_k X_k = \pm \sum_k \alpha_k X'_k, \quad k = 1, 2 \ldots N.$$

Da nun X'_k, wie soeben bemerkt wurde, gleichfalls linear durch die $X_1 \ldots X_N$ darstellbar ist, so folgt

$$X'_k = \Sigma \alpha_{kl} X_l$$

und hieraus

$$X_k = \Sigma \alpha_{kl} X'_l$$

oder

$$X_k = \Sigma \alpha_{kl} \alpha_{lm} X_m,$$

woraus wegen der Unabhängigkeit der X_k

$$\Sigma \alpha_{kl} \alpha_{lm} = \delta_{km}$$

und $\delta_{km} = 0$ für $k \neq m$, $\delta_{kk} = 1$ für $k, m = 1 \ldots N$ zu nehmen ist.

---

[1]) Vgl. die vorhergehende Arbeit Ueber die Anzahl der cogredienten und adjungirten Transformationen etc. S. 220.

Die Coefficienten α_{kl} bilden also ein System, dessen charakteristische Function N^{ten} Grades p einfache Elementartheiler $\varrho - 1$ und q einfache Elementartheiler $\varrho + 1$ hat.

Bei beiden Zahlen p und q lassen sich leicht mit Hülfe der Elementartheiler der charakteristischen Function von S bestimmen. Geht man von der Gleichung 1) zu der äquivalenten Gleichung

$$2) \qquad V' S (V')^{-1} V' X V = V' X V V^{-1} S' V$$

über, so zeigt sich, dass man durch contragrediente Transformation S in jede äquivalente Form transformiren kann, ohne dass die beiden Zahlen p und q sich ändern, da hierbei X nur eine cogrediente Transformation erfährt.

Aus den Sätzen, welche Herr Frobenius in seiner Arbeit über bilineare Formen[1]) entwickelt hat, und die ich bereits in einer in diesen Berichten veröffentlichten Note[2]) zu einer ähnlichen Betrachtung benutzt habe, ergiebt sich:

Ist die Form S zerlegbar in Formen, deren charakteristische Functionen keinen Theiler gemeinsam haben, so ist jede Lösung X in derselben Weise zerlegbar.

Auf Grund dieser Bemerkung bezeichne man in der durch contragrediente Transformation bewirkten Weierstrass'schen Normalform von S mit a_i eine n_i fache Wurzel der charakteristischen Function von S, deren zugehörige Elementartheiler der Grösse nach geordnet,

$$e_1^i \geqq e_2^i \geqq \ldots \geqq e_{m_i}^i$$

seien. Dann besitzt die Normalform von S den Bestandtheil

---

[1]) Journal für Mathematik, Bd. 84, S. 27 u. f.

[2]) Ueber die mit einer bilinearen Form vertauschbaren bilinearen Formen, Sitzgsber. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 1889, S. 293.

$$S_i = a_i(x_1 y_1 + \dots x_{n_i} y_{n_i})$$
$$+ (x_1 y_2 + \dots x_{e_1^i - 1} y_{e_1^i})$$
$$+ (x_{e_1^i + 1} y_{e_1^i + 2} + \dots x_{e_1^i + e_2^i - 1} y_{e_1^i + e_2^i}) + \dots$$

und es kommt nun darauf an, die Gleichung

3) $$S_i X_i = X_i S_i'$$

zu befriedigen, wobei der mit a_i multiplicirte Bestandtheil in S_i fortgelassen werden kann. Die Lösungen von 3) aber lassen sich unmittelbar anschreiben. Bezeichnet man nämlich mit a_{ik}, x_{lm} die Coefficienten der Formen S und X in 1), so hat man das System

$$\sum_l a_{il} x_{lk} = \sum_l x_{il} a_{kl}, \qquad i, k, l = 1 \dots n$$

zu befriedigen; man erhält dasselbe aber, wenn man in den beiden Determinantenproducten

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdot & \cdot & x_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_{11} & \cdot & \cdot & x_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & \cdot & \cdot & x_{nn} \end{vmatrix}$$

die Multiplication jedesmal so vollzieht, dass die Horizontalreihen i des ersten Factors mit den Horizontalreihen k des zweiten Factors combinirt und die so entstehenden Elemente $(i\,k)$ in beiden Resultaten einander gleich gesetzt werden. Bringt man diese Regel auf die Gleichung 3) zur Anwendung, so ergiebt sich folgendes Verfahren.

Sind die zu a_i gehörigen Elementartheiler der Grösse nach geordnet

$$e_1^i \geqq e_2^i \dots \geqq e_{k'}^i, 1 \dots 1,$$

so dass k Elementartheiler grösser als 1 und s^i gleich 1 sind und

$$n_i = e_1^i + \ldots e_k^i + s^i$$

die Multiplicität der Wurzel a_i ist, so haben die zugehörigen Coefficienten x_{lm}^i; $l, m = 1 \ldots n_i$ die aus dem folgenden Schema zu entnehmenden Werthe:

I)

	s^i	e_1^i	e_2^i		e_k^i
s^i	$s^i\, s^i$	$s^i\, e_1^i$	$s^i\, e_2^i$		$s^i\, e_k^i$
e_1^i	$e_1^i\, s^i$	$e_1^i\, e_1^i$	$s_1^i\, e_2^i$		$e_1^i\, e_k^i$
e_2^i	$e_2^i\, s^i$	$e_2^i\, e_1^i$	$e_2^i\, e_2^i$		$e_2^i\, e_k^i$
e_k^i	$e_k^i\, s^i$	$e_k^i\, e_1^i$	$e_k^i\, e_2^i$		$e_k^i\, e_k^i$

Dabei vertritt jedes Feld, z. B. $e_\lambda^i\, e_\mu^i$ im ganzen $\lambda\mu$ Coefficienten $x_{\lambda\mu}^i$. Die Werthe, welche denselben zu geben sind, ersieht man am einfachsten aus einem bestimmten Beispiele, etwa $s^i = 3$, $e_1^i = 4$, $e_2^i = 4$, $e_3^i = 3$, $e_4^i = 2$; jeder Coefficient x_{lm} soll dabei einfach durch (l, m) bezeichnet werden, so dass gleiche Symbole (l, m) je ein und denselben völlig willkürlichen Parameter repräsentiren (in der Tabelle S. 278 ist der Einfachheit halber die Klammer ( ) weggelassen).

	$s^i = 3$			$e_1^i = 4$				$e_2^i = 4$				$e_3^i = 3$			$e_4^i = 2$	
$s^i = 3$	1,1	1,2	1,3	1,4	0	0	0	1,8	0	0	0	1,12	0	0	1,15	0
	2,1	2,2	2,3	2,4	0	0	0	2,8	0	0	0	2,12	0	0	2,15	0
	3,1	3,2	3,3	3,4	0	0	0	3,8	0	0	0	3,12	0	0	3,15	0
$e_1^i = 4$	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	4,10	4,11	4,12	4,13	4,14	4,15	4,16
	0	0	0	4,5	4,6	4,7	0	4,9	4,10	4,11	0	4,13	4,14	0	4,16	0
	0	0	0	4,6	4,7	0	0	4,10	4,11	0	0	4,14	0	0	0	0
	0	0	0	4,7	0	0	0	4,11	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_2^i = 4$	8,1	8,2	8,3	8,4	9,4	10,4	11,4	8,8	8,9	8,10	8,11	8,12	8,13	8,14	8,15	8,16
	0	0	0	9,4	10,4	11,4	0	8,9	8,10	8,11	0	8,13	8,14	0	8, 16	0
	0	0	0	10,4	11,4	0	0	8,10	8,11	0	0	8,14	0	0	0	0
	0	0	0	11,4	0	0	0	8,11	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_3^i = 3$	12,1	12,2	12,3	12,4	13,4	14,4	0	12,8	13,8	14,8	0	12,12	12,13	12,14	12,15	12,16
	0	0	0	13,4	14,4	0	0	13,8	14,8	0	0	12,13	12,14	0	12,16	0
	0	0	0	14,4	0	0	0	14,8	0	0	0	12,14	0	0	0	0
$e_4^i = 2$	15,1	15,2	15,3	15,4	16,4	0	0	15,8	16,8	0	0	15,12	16,12	0	15,15	15,16
	0	0	0	16,4	0	0	0	16,8	0	0	0	16,12	0	0	15,16	0

Wie man sieht, erfolgt die Angabe der Coefficienten durch ein mechanisches Verfahren, indem diejenigen Elemente jedes Feldes $e^i_\lambda e^i_\mu$ — und analog dazu die der Felder $s^i e^i_\lambda$ —, welche von Null verschieden gewählt werden können, ein gleichseitig rechtwinkliges Dreieck von der Höhe $\mu\,(\mu \overline{<} \lambda)$ ausmachen und alle in derselben Diagonale stehenden Elemente den nämlichen willkürlichen Werth erhalten.

Damit nun die Coefficienten einem symmetrischen System angehören, hat man festzusetzen, dass jedes Symbol $(l\,m)$ in der Tabelle denselben Parameter wie $(m\,l)$ bedeute; zur Entstehung alternirender Formen aber hat man $(l\,m) = -(m\,l)$, insbesondere also alle Elemente in den zu $(e^i_1\, e^i_1)$, $(e^i_2\, e^i_2) \,.\,.\, (e^i_4\, e^i_4)$ gehörigen Feldern gleich Null zu setzen. Nach diesen Bestimmungen kann man die Anzahl der Formen einfach an dem Schema I) abzählen. Dasselbe ist, da es sich nur um symmetrische und alterne Formen handeln soll, durch die Hauptdiagonale[1]) in ein rechts von derselben liegendes Dreieck mit Feldern zerlegt, welche von der Form

$$s^i s^i \quad s^i e^i_\lambda \quad e^i_\lambda e^i_\lambda \quad e^i_\lambda e^i_\mu \quad \mu \overline{<} \lambda$$

sind. Nun kommen, wie leicht zu sehen,

auf das Feld $s^i s^i$: $\frac{1}{2} s^i (s^i + 1)$ Parameter einer symmetrischen Form
" " " $s^i e^i_\lambda$: s^i " " " "
" " " $e^i_\lambda e^i_\lambda$: e^i_λ " " " "
" " " $e^i_\lambda e^i_\mu$: e^i_μ " " " "

und es ergeben sich im ganzen

$$p_i = \frac{1}{2} s^i (s^i + 1) + k\, s^i + e^i_1 + 2\, e^i_2 + 3\, e^i_3 + \,.\,.\, k\, e^i_k$$

völlig willkürliche Parameter einer symmetrischen Function.

---

[1]) Dieselbe ist im Druck durch ✳ hervorgehoben.

Dagegen findet man ebenso für

das Feld	$s^i s^i$:	$\frac{1}{2} s^i (s^i - 1)$	Parameter einer alternen Form
„ „	$s^i e^i_\lambda$:	s^i	„ „ „ „
„ „	$e^i_\lambda e^i_\lambda$:	0	„ „ „ „
„ „	$e^i_\lambda e^i_\mu$:	e^i_μ	„ „ „ „

also im ganzen

$$q^i = \frac{1}{2} s^i (s^i - 1) + k s^i + e^i_2 + 2 e^i_3 + \ldots (k-1) e^i_k.$$

Bezeichnet man jetzt die Multiplicität des Factors $\varrho - a_i$ in den ersten, zweiten, . . σ^{ten} Unterdeterminanten der charakteristischen Function von S mit n^i_σ, $\sigma = 1, 2 \ldots k + s^i - 1$, so ist

$$n^i = s^i + e^i_1 + e^i_2 + \ldots e^i_k$$
$$n^i_{l-1} = s^i + e^i_l + \ldots e^i_k, \quad l = 2, \ldots k$$
$$n^i_{k+h} = s^i - h; \quad h = 1, \ldots s^i - 1,$$

also wird

$$p_i = n^i + n^i_1 + n^i_2 + \ldots n^i_{k+s_i}$$
$$q_i = \qquad n^i_1 + n^i_2 + \ldots n^i_{k+s_i}$$

mithin

$$p = \Sigma p_i = n + \Sigma n_\varkappa$$
$$q = \Sigma q_i = \qquad \Sigma n_\varkappa,$$

wobei $n_\varkappa$ den grössten gemeinsamen Theiler der $\varkappa^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten der charakteristischen Function von S bedeutet. Dabei ist

$$p + q = N = n + 2 \Sigma n_\varkappa,$$

wie zu erwarten war.

Man kann die hiemit beantwortete Frage auch so stellen: Man soll alle symmetrischen (alternen) Formen finden, welche mit einer Form S durch Multiplication zusammengesetzt eine symmetrische (alterne) Form liefern.

Die symmetrischen Formen kann man stets so wählen, dass für keine derselben die Determinante verschwindet, wie der blosse Anblick des Schemas auf S. 278 zeigt. Die alternen Formen dagegen müssen bei ungeradem n immer eine verschwindende Determinante haben. Soll aber bei geradem n eine alterne Form X von nicht verschwindender Determinante vorhanden sein, so ist

$$SX = A$$

wieder eine alterne Form, also

$$S = AX^{-1},$$

d. h. die charakteristische Function von S

$$|A + \varrho X|$$

ist das Quadrat einer rationalen Function von ϱ und verschwindet für jede ihrer Wurzeln sicher mit den ersten Unterdeterminanten. Die Anzahl der Formen X beträgt also hier mindestens $\frac{1}{2}n$.

Ebenso kann jede Form S auf p^{∞} Arten durch das Produkt von zwei symmetrischen Formen dargestellt werden, von denen mindestens eine eine nicht verschwindender Determinante ist. Dagegen kann eine analoge Darstellung durch zwei alternirende Formen nur unter gewissen Bedingungen erfolgen, welche im vorigen für den Fall, dass die Determinante von S nicht Null ist, angegeben sind.

Berichtigung.

In der Arbeit „Ueber die cogrediente Transformation der bilinearen Formen in sich selbst“ (diese Sitzgsb. Januar 1896) muss die Formel S. 22, Z. 8 v. o. heissen:

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-\mu)(n-\mu+1)}{2}.$$
