BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1974

MÜNCHEN 1975

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Restgliedentwicklungen Stieltjesscher Art für asymptotische Darstellungen konfluenter hypergeometrischer Funktionen

Von **Ludwig Neckermann** in Würzburg

Vorgelegt von Herrn Hermann Schmidt am 7. Juni 1974

Die konfluente hypergeometrische Funktion

$$\Psi(a,c,x) = \frac{1}{\Gamma(a)\,(e^{2\pi i a}-1)} \int_{\infty e^{i\varphi}}^{(O+)} e^{-xt}\, t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\, dt \tag{1}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi < \vartheta = \operatorname{arc} x < \frac{\pi}{2}-\varphi;\ -\pi < \varphi = \operatorname{arc} t < \pi\right)$$

(Tricomi [26], S. 57), die von zwei komplexen Parametern $a = \alpha' + i\alpha''$, $c = \gamma' + i\gamma''$ ($\alpha', \alpha'', \gamma', \gamma'' \in \boldsymbol{R}$) abhängt, ge nügt der Funktionalrelation

$$\Psi(a,c,x) = x^{1-c}\quad \Psi(a-c+1,\, 2-c,\, x) \tag{2}$$

([26], S. 67) und gestattet für $x \to \infty$ in $|\operatorname{arc} x| < \frac{3\pi}{2}$ bei festen a und c die Poincarésche asymptotische Entwicklung

$$\Psi(a,c,x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\,(a)_{\nu}\,(a-c+1)_{\nu}}{\nu!}\, x^{-\nu-a} \tag{3}$$

([26], S. 106) bzw. die asymptotische Darstellung

$$\Psi(a,c,x) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{(-1)^{\nu}\,(a)_{\nu}\,(a-c+1)_{\nu}}{\nu!}\, x^{-\nu-a} + R_N(x) \tag{4}$$

mit dem Rest

$$R_N(x) = O(x^{-N-a}). \tag{5}$$

Die Fälle $a = -k$ und $(a-c+1) = -k$ $(1+k \in \boldsymbol{N})$, in denen die asymptotische Entwicklung (3) abbricht, führen auf folgenden Zusammenhang mit Laguerreschen Polynomen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \Psi(-k, \alpha+1, x) = (-1)^k\, k!\, L_k^{(\alpha)}(x) \\ \Psi(\alpha-k, \alpha+1, x) = (-1)^k\, k!\, x^{-\alpha} L_k^{(-\alpha)}(x). \end{cases} \qquad (\alpha \in \boldsymbol{C})$$

Von den vielen weiteren, durch spezielle Wahl der Parameter zu gewinnenden Sonderfällen von $\Psi(\mathrm{a}, c, x)$ (vgl. z. B. Tafel in [28], S. 510) seien hier nur zwei genannt, die für die historische Entwicklung der Theorie der Restgliedentwicklung bedeutsam sind, nämlich die unvollständige Gammafunktion 2. Art

$$(7)\quad \Gamma(\alpha, x) = e^{-x} x^{\alpha} \Psi(1, \alpha+1, x) = e^{-x} \Psi(1-\alpha, 1-\alpha, x)\ (\alpha \in \boldsymbol{C})$$

und das Exponentialintegral

$$(8)\qquad E_1(x) = \Gamma(0, x) = e^{-x}\, \Psi(1, 1, x).$$

Abschätzungen des Fehlers (5) im Komplexen geben Olver [16] (in der Whittakerschen Schreibweise) und Hille [8] für $x \to \infty$ in $|\operatorname{arc} x| < \frac{3\pi}{2}$ durch Herleitung einer Integrodifferentialgleichung für den Rest, Verfasser [12] durch direkte Abschätzung der Integraldarstellung (12) nach einer Methode von Whittaker-Watson [27], wo aber keine numerische Schranken angegeben werden.

Der Fehlerbetrag kann demnach hier – wie auch ganz allgemein für asymptotische Darstellungen auf Grund einer Relation des Typs (5) – bei festgehaltener Anzahl N der berücksichtigten Glieder (und im Komplexen: nach Auswahl eines geeigneten Winkelraums der Zahlenebene), zwar für $|x| > X_\varepsilon$ unter eine beliebige Schranke $\varepsilon > 0$ heruntergedrückt werden, aber für $|x| \leq X_\varepsilon$ ist damit nichts gewonnen. Man wird daher versuchen bei gegebenem x durch passende Wahl von $N = N(x)$ eine möglichst gute Annäherung zu erzielen, wenn diese auch nicht notwendig beliebig gut gemacht werden kann, wie es bei konvergenten Reihen der Fall ist. Es liegt nahe, zu versuchen, $N(x)$ so zu wählen, daß das letztberücksichtigte Glied möglichst kleinen Betrag hat, so daß bei Überschreitung desselben die Beträge wieder anwachsen; in vielen Fällen ist dann auch der Fehler höchstens von diesem Betrag, oder er läßt sich mit seiner Hilfe abschätzen; vielfach ist $N(x) = O(|x|)$. (Mit der Existenz und

Größe solcher Minimalglieder beschäftigt sich Pittnauer [18]). Allgemein kommt man auf die Aufgabe, den Fehler $R_N(x)$ in Abhängigkeit von beiden Veränderlichen x, N ($\in \boldsymbol{N}$) zu studieren; bei passender Kopplung zwischen diesen wird es dann um das asymptotische Verhalten von $R_{N(x)}(x)$ bzw. $R_N(x(N))$ gehen. Allgemeiner wird man dann einen geeigneten Grenzübergang im Sinn von Herm. Schmidt [20] durchzuführen haben, man kommt zu asymptotischen Fragen bei Abhängigkeit von mehreren Parametern, wofür die folgende Untersuchung ein Muster ist.

Die Frage nach $N = N(x)$ ist wohl zuerst von Stieltjes [24] aufgeworfen, seither öfters auf mehr heuristischem Wege behandelt worden, wie durch formale Summation der nicht berücksichtigten Glieder der asymptotischen Entwicklung (Airey [1], [2]), bzw. durch Weiterentwicklung solcher Reste, z. B. mit Hilfe von miteinander gekoppelten (zum Teil nur näherungsweise erfüllten) Differential- und Differenzengleichungen (Miller [11], Slater [22], [23]) bzw. mittels formaler Entwicklung von Integraldarstellungen nach „basic convergent factors", die bis auf einen Faktor mit unvollständigen Gammafunktionen 2. Art übereinstimmen (Dingle [4], [5]).

Exakte Fehlerschranken für Restgliedentwicklungen finden sich wohl erstmalig im Fall $\Gamma(\alpha, x)$ bei Rosser [19]. Neuhaus [13], [14] knüpft an die Originalarbeit von Stieltjes [24] an, bringt u. a. dort fehlende Beweise für den Fall des Exponentialintegrals und ordnet die Stieltjessche Restgliedentwicklungen in die Theorie asymptotischer Potenzreihen mit beschränkten Koeffizientenfunktionen (vgl. Herm. Schmidt [20]) ein; auch stellt er, etwa im Fall $E_1(x)$, einen Zusammenhang zwischen den von ihm gefundenen „Konvergenzfaktoren" und denen von Airey her. Auf eine im folgenden entscheidende Beziehung der Neuhausschen Konvergenzfaktoren zu Laguerreschen Polynomen (vgl. z. B. (36)) und auf eine Verallgemeinerung auf unvollständige Gammafunktionen 2. Art für $\operatorname{Re} x \to +\infty$ in einem Parallelstreifen zur reellen Achse machten Herm. Schmidt und Verfasser [21] aufmerksam. In der vorliegenden Arbeit wird ebenfalls von einer Integraldarstellung des Restes $R_N(x)$ ausgegangen, die hypergeometrische Funktion im Integranden von

$R_N(x)$ in (12) – analog zur Neuhausschen Entwicklung von $(1+t)^{-1}$ um 1 – um $t = e^{i\varphi}$ ($|\varphi| < \pi$) weiterentwickelt und der neu entstehende Rest $D_{N,m}(xe^{i\varphi})$ in (33) als dreifach iteriertes Integral dargestellt, das schrittweise abgeschätzt werden kann. Dieses Verfahren stellt eine Fortentwicklung des vom Verfasser in [12] benutzten Beweisverfahrens dar und führt ohne die bei asymptotischen Untersuchungen sonst meist üblichen Hilfsmittel, wie Laplacesche Methode, Watsonsches Lemma oder Sattelpunktsmethode, zum Ziel. Über eine genauere Untersuchung von Laguerreschen Polynomen des Typs $L_n^{(y+\zeta)}(y)$ (vgl. *Hilfssätze 3–6*) mit beschränktem ζ oder $\zeta = \zeta(y) = o(y)$ für $y \to \infty$ gelangt man zur, oben schon erwähnten asymptotischen Untersuchung des Restes $R_N(x)$ in Abhängigkeit von beiden Variablen x und N, u. zw. bei komplexen Parameter a und c im Winkelraum $|\operatorname{arc} x| < \frac{3\pi}{2}$ (vgl. *Satz*); die im *Satz* auftretenden Entwicklungskoeffizienten werden explizit dargestellt und asymptotisch untersucht für $N \to \infty$ (*Hilfssatz 1*).

Abschließend sei hier noch erwähnt, daß bei formalen Reihenlösungen von Differentialgleichungen bzw. bei der asymptotischen Untersuchung von Laplacetransformationen eine numerische Verbesserung für den Rest $R_N(x)$ asymptotischer Potenzreihen dadurch erzielt werden kann, daß – entgegen der Stieltjesschen Auffassung – N festgehalten wird und weitere Koeffizienten durch eine Minimalforderung bezüglich einer geeigneten Norm modifiziert werden (Mainardus [10], Pittnauer [17], Luke II ([9]).

1. Konvergenzfaktor: Eine für die Herleitung von Restgliedentwicklungen (in den nicht auf Laguerresche Polynome führenden Fällen: $1 - a \notin \boldsymbol{N}$, $c - a \notin \boldsymbol{N}$) geeignete Integraldarstellung für den Rest $R_N(x)$ in (4) gewinnen wir, indem wir in den Integranden des Schleifenintegrals (1) die Taylorsche Darstellung

$$(1+t)^{c-a-1} = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{(-1)^\nu (a-c+1)_\nu}{\nu!} t^\nu +$$

$$+ (-1)^N (a-c+1)_N t^N r_N(t)$$

mit

$$(9) \qquad r_N(t) = N \int_0^1 (1-v)^{N-1} (1+tv)^{c-a-N-1} \, dv$$
$$= F(a-c+N+1, 1; N+1; -t)$$

einsetzen, wobei sich im Sonderfall $a = c$ der unvollständigen Gammafunktion (7) die hypergeometrische Funktion ([9], I, S. 57) auf

$$(9') \qquad r_N(t) = (1+t)^{-1}$$

reduziert. Zur Gewinnung des Näherungspolynoms der rechten Seite von (4) wird dabei auf die bekannte Integraldarstellung der Γ-funktion

$$(10) \quad \Gamma(b)\, x^{-b} = \frac{1}{(e^{2\pi i b}-1)} \int_{\infty e^{i\varphi}}^{(0+)} e^{-xt}\, t^{b-1}\, dt \quad (1-b \notin \boldsymbol{N})$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi < \operatorname{arc} x < \frac{\pi}{2} - \varphi;\ -\pi < \varphi = \operatorname{arc} t < \pi\right)$$

zurückgegriffen. Aus Konvergenzgründen wählen wir

$$(11) \qquad N \geq \gamma' - \alpha' - 1 \quad \text{und} \quad N > -\alpha'.$$

Für den Rest $R_N(x)$ in (4) erhalten wir damit die Darstellung

$$(12) \quad R_N(x) = \frac{(-1)^N (a-c+1)_N}{N!} \frac{1}{\Gamma(a)} L_{x;\varphi}\left[t^{a+N-1} r_N(t)\right] \quad (1-a \notin \boldsymbol{N})$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi < \vartheta = \operatorname{arc} x < \frac{\pi}{2} - \varphi;\ -\pi < \varphi = \operatorname{arc} t < \pi\right)$$

als Laplacetransformierte längs $\operatorname{arc} t = \varphi$.

Diese läßt sich nun vermöge

$$t =: u\, e^{i\varphi}$$

unter Benutzung von $\Gamma(a+N) = (a)_N\, \Gamma(a)$ auch als Laplacetransformierte längs $\operatorname{arc} u = 0$ in die Form

$$(12') \quad R_N(x) = \frac{(-1)^N (a)_N (a-c+1)_N}{N!} x^{-a-N}\, C_N(x\, e^{i\varphi})$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi < \vartheta < \frac{\pi}{2} - \varphi;\ -\pi < \varphi < \pi\right)$$

umschreiben. Der Faktor $C_N(x\,e^{i\varphi})$ wird im Anschluß an Airey ([1]), [2]) – den zugrundeliegenden Sachverhalt nicht ganz treffend kennzeichnend – „*Konvergenzfaktor*" genannt; er ist für $z = x\,e^{i\varphi}$ durch

$$(13)\quad C_N(z) := \frac{z^{a+N}}{\Gamma(a+N)}\, L_z[u^{a+N-1}\, r_N(u\,e^{i\varphi})] \quad (1-a-N \notin \boldsymbol{N})$$

in der rechten Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ erklärt.

Da in Spezialfällen, z. B. beim Exponentialintegral, der Sattelpunkt des Integranden bei $u = \frac{N}{|z|}$ liegt und die Wahl $N = [|z|] + const.$ sich als günstig erweist, liegt es nahe, auch im Allgemeinfall (13) den Faktor $r_N(u\,e^{i\varphi})$ im Integranden nach Potenzen von $(u-1)$ zu entwickeln. Dieses Verfahren wird dann auch zu den gesuchten Restgliedentwicklungen führen. Wegen der Darstellung (9) von $r_N(u\,e^{i\varphi})$ als hypergeometrische Funktion sind allerdings zuvor gewisse Hilfsuntersuchungen über hypergeometrische Funktionen vonnöten.

2. Hilfsformeln über hypergeometrische Funktionen: Mit Hilfe der Ableitungsformel für hypergeometrische Funktionen ([9], I, S. 44) ergibt sich für $r_N(u\,e^{i\varphi})$ die Taylorsche Darstellung um $u = 1$ mit Integralrest

$$(14)\quad r_N(u\,e^{i\varphi}) = F(a-c+N+1, 1; N+1; -u\,e^{i\varphi}) =$$
$$= \sum_{\mu=0}^{m-1} A_\mu(a-c+1, N, \varphi)\, e^{i\mu\varphi}(1-u)^\mu + \varrho_m(u\,e^{i\varphi})$$

mit

$$(15)\quad A_\mu(a-c+1, N, \varphi) :=$$
$$:= \frac{(a-c+N+1)_\mu}{(N+1)_\mu} F(a-c+N+1+\mu, 1+\mu; N+1+\mu; -e^{i\varphi})$$

und

$$(16)\quad \varrho_m(u\,e^{i\varphi}) := \frac{m(a-c+N+1)_m}{(N+1)_m} e^{i\varphi m}(1-u)^m$$
$$\int_0^1 (1-\sigma)^{m-1} F(a-c+N+1+m, 1+m; N+1+m;$$
$$-e^{i\varphi}(1+\sigma[u-1]))\, d\sigma.$$

Hierin ist wiederum ([9], I, S. 57)

$$(17)\quad F(a-c+N+1+m, 1+m; N+1+m;$$
$$-e^{i\varphi}(1-\sigma+\sigma u)) =$$
$$\frac{(N+m)!}{m!\,(N-1)!}\int\limits_0^1 \lambda^m(1-\lambda)^{N-1}(1+\lambda e^{i\varphi}(1-\sigma+\sigma u))^{c-a-N-1-m}\,d\lambda,$$

worin nach (11) $\gamma'-\alpha'-N-1-m\leq 0$ ist.

In (17) ist nun für $0\leq\sigma\leq 1$, $0\leq\lambda\leq 1$ und $u\geq 0$ stets

$$(18)\qquad \tau := \lambda(1-\sigma+\sigma u)\geq 0$$

und

$$(19)\qquad |(1+\tau e^{i\varphi})^{c-a-N-1-m}| =$$
$$= |1+\tau e^{i\varphi}|^{\gamma'-\alpha'-N-1-m}\, e^{(\alpha''-\gamma'')\operatorname{arc}(1+\tau e^{i\varphi})}.$$

Da gleichmäßig für alle $\tau\geq 0$

$$|1+\tau e^{i\varphi}|\geq 1 \quad \text{für } |\varphi|\leq\frac{\pi}{2} \text{ und}$$

$$|1+\tau e^{i\varphi}|^2 = (\tau+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi\geq\sin^2\varphi$$

für $\frac{\pi}{2}\leq|\varphi|<\pi$ ist, folgt für den ersten Faktor der rechten Seite von (19) wegen der Wahl von $N\geq\gamma'-\alpha'-1$ in (11) mit $m+1\in\boldsymbol{N}$ die Abschätzung

$$(20)\qquad |1+\tau e^{i\varphi}|^{\gamma'-\alpha'-N-1-m}\leq$$
$$\leq K_1(\varphi) := \begin{cases} 1 & \left(|\varphi|\leq\frac{\pi}{2}\right)\\[1ex] |\sin\varphi|^{\gamma'-\alpha'-N-1-m} & \left(\frac{\pi}{2}\leq|\varphi|<\pi\right)\end{cases}$$

gleichmäßig für alle $\tau\geq 0$.

Für den zweiten Faktor der rechten Seite von (19) gilt offenbar gleichmäßig für alle $\tau\geq 0$ die Abschätzung

$$e^{(\alpha''-\gamma'')\operatorname{arc}(1+\tau e^{i\varphi})}\leq K_2(\varphi) := \operatorname{Max}\{1, e^{(\alpha''-\gamma'')\varphi}\}.$$

Mit

$$K(\varphi) := K_1(\varphi)\, K_2(\varphi) \tag{21}$$

gilt dann nach (18) – (21) für (17) die Abschätzung

(22)

$$|F(a-c+N+m+1, 1+m; N+1+m; -e^{i\varphi}(1-\sigma+\sigma u))| \leq$$

$$\leq \frac{K(\varphi)(N+m)!}{m!(N-1)!} \int_0^1 \lambda^m (1-\lambda)^{N-1}\, d\lambda = K(\varphi),$$

mit der dann sofort aus (16) die für uns entscheidende Abschätzung

$$|\varrho_m(u\, e^{i\varphi})| \leq K(\varphi) \frac{|(a-c+N+1)_m|}{(N+1)_m} |1-u|^m \tag{23}$$

folgt.

In diesem Zusammenhang sei hier noch wegen des später erfolgenden Grenzübergangs $N \to \infty$ näher auf das asymptotische Verhalten der durch (15) erklärten Entwicklungskoeffizienten $A_\mu(a-c+1, N, \varphi)$ für $N \to \infty$ eingegangen. Aufgrund einer Funktionalrelation für hypergeometrische Funktionen ([9], I, S. 67) gilt mit

$$\beta := \frac{e^{i\varphi}}{1+e^{i\varphi}} = \frac{1}{2}\left(1 + i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) \tag{24}$$

zunächst

$$F(a-c+N+1+\mu, 1+\mu; N+1+\mu; -e^{i\varphi}) = \tag{25}$$

$$= e^{-i(\mu+1)\varphi} \beta^{\mu+1} F(c-a, 1+\mu; N+1+\mu; \beta)$$

$$\left(|\varphi| < \pi \text{ bzw. } \operatorname{Re} \beta = \frac{1}{2}\right);$$

weiter gilt für die hypergeometrische Funktion rechts die Taylorsche Darstellung mit Rest ([9], I, S. 235)

$$F(c-a, 1+\mu; N+1+\mu; \beta) = \tag{26}$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \frac{(c-a)_\varkappa (1+\mu)_\varkappa}{(N+1+\mu)_\varkappa\, \varkappa!} \beta^\varkappa + S_k(N; \beta)$$

mit

(27) $$S_k(N;\beta):=\frac{(N+\mu)!\,\Gamma(c-a+k)}{(N-1)!\,\mu!\,(k-1)!\,\Gamma(c-a)}\,\beta^k$$
$$\int_0^1\int_0^1 \tau^{\mu+k}(1-\tau)^{N-1}(1-\beta\tau\sigma)^{a-c-k}(1-\sigma)^{k-1}\,d\tau\,d\sigma$$
$$\left(\operatorname{Re}\beta=\frac{1}{2};\ |\beta|<\infty\right).$$

Hierfür gilt, da längs $\operatorname{Re}\beta=\frac{1}{2}$ für $|\beta|<\infty$

$|1-\beta\tau\sigma|\geq\frac{1}{2}$ (gleichmäßig für $0\leq\tau\leq 1$, $0\leq\sigma\leq 1$) und

$$0\leq-(\operatorname{sg}\varphi)\operatorname{arc}(1-\beta\tau\sigma)<\frac{\pi}{2}\text{ ist, mit}$$

(28) $$K^*(\varphi):=\operatorname{Max}\left\{1,\ e^{(\alpha''-\gamma'')\frac{\pi}{2}\operatorname{sg}\varphi}\right\}$$

für $k\geq\alpha'-\gamma'$ die Abschätzung

(29) $$|S_k(N;\beta)|\leq\frac{|(c-a)_k|\,(\mu+1)_k}{(N+\mu+1)_k\,k!}\,K^*(\varphi)\,|\beta|^k\,2^{k-\alpha'+\gamma'}.$$

Für festes $|\beta|<\infty$, d. h. $|\varphi|<\pi$, stellt somit die hypergeometrische Reihe (26) als Funktion von N ($\in\boldsymbol{N}$) eine asymptotische Entwicklung nach der Skala $\{\chi_\varkappa(N)\}$ mit $\chi_\varkappa(N)=(N+\mu+1)_\varkappa$ ($\varkappa=0,1,2,\ldots$) dar, die durch Skalentransformation (vgl. [20]) leicht in eine solche nach Potenzen von N^{-1} übergeführt werden kann; wegen (29) ist es zweckmäßig,

(30) $$N\geq 2\,|\beta|$$

zu wählen. Für festes $|\beta|<1$, d. h. für $|\varphi|<\frac{2\pi}{3}$, stellt übrigens (26) sogar eine absolut und für große Werte von N schnell konvergierende Fakultätenreihe dar.

Als Zwischenergebnis halten wir fest

Hilfssatz 1: *Die durch (15) erklärten Entwicklungskoeffizienten $A_\mu(a-c+1,N,\varphi)$ lassen sich durch*

(31) $$A_\mu(a-c+1,N,\varphi)=\frac{(a-c+N+1)_\mu}{(N+1)_\mu}\,e^{-i(\mu+1)\varphi}\,\beta^{\mu+1}$$
$$F(c-a,\,1+\mu;\,N+1+\mu;\,\beta)$$

mit $\beta=\frac{e^{i\varphi}}{1+e^{i\varphi}}=\frac{1}{2}\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\quad(|\varphi|<\pi)$

darstellen. Das asymptotische Verhalten dieser Koeffizienten wird für $N \to \infty$ (bei festen β, μ, a, c) mit Hilfe von (25)–(30) beschrieben.

Zusatz: *Im Sonderfall der unvollständigen Gammafunktion 2. Art (vgl. (7) für $a = c = 1 - \alpha$) wird*

$$A_\mu(1, N, \varphi) = e^{-i(\mu+1)\varphi} \beta^{\mu+1}, \tag{31'}$$

insbesondere

$$A_\mu(1, N, 0) = 2^{-\mu-1}. \tag{31''}$$

3. Herleitung einer Restgliedentwicklung für den Konvergenzfaktor $C_N(z)$: Setzen wir (14)—(15) in (13) ein, so erhalten wir für den Konvergenzfaktor $C_N(z)$ die Darstellung

$$C_N(z) = \frac{z^{a+N}}{\Gamma(a+N)} \sum_{\mu=0}^{m-1} A_\mu(a - c + 1, N, \varphi) e^{i\mu\varphi}$$
$$L_z[u^{a+N-1}(1-u)^\mu] + D_{N,m}(z) \qquad (\operatorname{Re} z > 0) \tag{32}$$

mit dem noch abzuschätzenden Rest

$$D_{N,m}(z) = \frac{z^{a+N}}{\Gamma(a+N)} L_z[u^{a+N-1} \varrho_m(u e^{i\varphi})], \tag{33}$$

die sich im Sonderfall $a = c$ vereinfacht zu

$$C_N(z) = \frac{z^{a+N}}{\Gamma(a+N)} \sum_{\mu=0}^{m-1} e^{i\mu\varphi}(1 + e^{i\varphi})^{-\mu-1}$$
$$L_z[u^{a+N-1}(1-u)^\mu] + D_{N,m}(z). \tag{32'}$$

Für die Laplaceintegrale in (32) ergibt sich mit Hilfe des binomischen Satzes und mittels Benutzung der Integraldarstellung von $\Gamma(b)\, x^{-b}$ (nach (10)) unter Berücksichtigung von (3) und (6)

$$\frac{z^{a+N}}{\Gamma(a+N} L_z[u^{a+N-1}(1-u)^\mu] = \tag{34}$$
$$= z^{a+N} \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \frac{(-\mu)_\varkappa (a+N)_\varkappa z^{-a-N-\varkappa}}{\varkappa!} =$$
$$= (-1)^\mu z^{-\mu} \Psi(-\mu, 1-a-N-\mu, -z) =$$
$$= \mu!\, z^{-\mu} L_\mu^{(-a-N-\mu)}(-z) \qquad (\operatorname{Re} z > 0),$$

also ein Zusammenhang mit gewissen Laguerreschen Polynomen, die wir bald noch näher untersuchen werden. Machen wir die Substitution

$$(35)\qquad z = x\,e^{i\varphi} = |x|\,e^{i(\vartheta+\varphi)}$$

rückgängig, so erhalten wir für (32) die Darstellung

$$(36)\qquad C_N(x\,e^{i\varphi}) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \mu!\,A_\mu(a-c+1, N, \varphi)$$
$$x^{-\mu}\,L_\mu^{(-a-N-\mu)}(-x\,e^{i\varphi}) + D_{N,m}(x\,e^{i\varphi}),$$

u. zw. nun im Winkelraum $\left\{\left(-\frac{3\pi}{2} <\right) -\frac{\pi}{2} - \varphi < \vartheta = \operatorname{arc} x < \frac{\pi}{2} - \varphi \left(< \frac{3\pi}{2}\right); -\pi < \varphi < \pi\right\}$.

Für arc $x = \vartheta$ mit $|\vartheta| < \pi$ erweist sich offenbar die Wahl $\varphi = -\vartheta$ als zweckmäßig. Die Darstellung (36) geht dann über in

$$(36')\qquad C_N(|x|) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \mu!\,A_\mu(a-c+1, N, -\vartheta)$$
$$x^{-\mu}\,L_\mu^{(-a-N-\mu)}(-|x|) + D_{N,m}(|x|) \qquad (|\vartheta| < \pi).$$

Als nächstes schätzen wir hier den Rest (33) ab.

Nach (33) ist

$$|D_{N,m}(z)| \leq \frac{|z|^{\alpha'+N}}{|\Gamma(a+N)|}\,e^{-\alpha''\operatorname{arc} z}$$
$$\left|L_{\operatorname{Re} z}\left[u^{\alpha'+N-1}\,|\varrho_m(u\,e^{i\varphi})|\right]\right| \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Es sei von nun an m stets gerade.

Wegen (23) ist dann

$$|D_{N,m}(z)| \leq \frac{|z|^{\alpha'+N}\,e^{-\alpha''\operatorname{arc} z}}{|\Gamma(a+N)|}\;\frac{K(\varphi)\,|(a-c+N+1)_m|}{(N+1)_m}$$
$$L_{\operatorname{Re} z}\left[u^{\alpha'+N-1}(1-u)^m\right] \qquad (\operatorname{Re} z > 0);$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (34) die Abschätzung

$$|D_{N,m}(z)| \leq \frac{K(\varphi)\,|(a-c+N+1)_m|}{(N+1)_m}\,\frac{\Gamma(\alpha'+N)}{|\Gamma(a+N)|}$$
$$m!\,(\operatorname{Re} z)^{-m}\left(\frac{|z|}{\operatorname{Re} z}\right)^{\alpha'+N} e^{-\alpha''\operatorname{arc} z}$$
$$L_m^{(-\alpha'-N-m)}(-\operatorname{Re} z) \qquad (\operatorname{Re} z > 0)$$

oder mittels (35) die Abschätzung

$$(37) \quad |D_{N,m}(x\,e^{i\varphi})| \leq \frac{K(\varphi)\,|(a-c+N+1)_m|}{(N+1)_m}\,\frac{\Gamma(\alpha'+N)}{|\Gamma(a+N)|}$$
$$m!\,(|x|\cos(\vartheta+\varphi))^{-m}\,(\cos(\vartheta+\varphi))^{-\alpha'-N}$$
$$e^{-\alpha''(\vartheta+\varphi)}\,L_m^{(-\alpha'-N-m)}(-|x|\cos(\vartheta+\varphi))$$
$$\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi < \vartheta < -\frac{\pi}{2}+\varphi;\ -\pi < \varphi < \pi\right).$$

Für $\operatorname{arc} x = \vartheta$ mit $|\vartheta| < \pi$ folgt hieraus speziell wiederum durch die Wahl $\varphi = -\vartheta$ die einfachere Abschätzung

$$(37') \qquad |D_{N,m}(|x|)| \leq \frac{K(-\vartheta)\,|(a-c+N+1)_m|}{(N+1)_m}\,m!$$
$$\frac{\Gamma(\alpha'+N)}{|\Gamma(a+N)|}\,|x|^{-m}\,L_m^{(-\alpha'-N-m)}(-|x|) \qquad (|\vartheta| < \pi).$$

Abschließend sei hier noch darauf aufmerksam gemacht, daß es für numerische Zwecke manchmal nützlich ist, den Quotienten in (37) bzw. (37′)

$$\frac{\Gamma(\alpha'+N)}{\Gamma(a+N)} = B(\alpha'+N,\,1+i\alpha'')\,\frac{a+N}{\Gamma(1+i\alpha'')}$$

mit

$$B(\alpha'+N,\,1+i\alpha'') = \int_0^1 u^{\alpha'+N-1}\,(1-u)^{i\alpha''}\,du$$

wegen

$$|B(\alpha'+N,\,1+i\alpha'')| \leq \frac{1}{\alpha'+N}$$

und

$$|\Gamma(i\,\alpha'')|^2 = \frac{\pi}{\alpha''\operatorname{sh}\pi\,\alpha''}$$

([28], S. 256) durch

$$\frac{\Gamma(\alpha'+N)}{|\Gamma(a+N)|} \leq \left|\frac{a+N}{\alpha'+N}\right| \left(\frac{\operatorname{sh}\pi\alpha''}{\pi\alpha''}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

abzuschätzen.

Zusammenfassend ergibt sich

Hilfssatz 2: *Der durch (13) definierte Konvergenzfaktor* $C_N(x\,e^{i\varphi})$ $(N \in \boldsymbol{N})$ *läßt sich im Winkelraum*

$$\left\{\left(-\frac{3\pi}{2} <\right) -\frac{\pi}{2} - \varphi < \vartheta = \operatorname{arc} x < \frac{\pi}{2} - \varphi \left(< \frac{3\pi}{2}\right); \quad -\pi < \varphi < \pi\right\}$$

durch (36) als Linearkombination von $x^{-\mu} L_\mu^{(-a-N-\mu)}(-x\,e^{i\varphi})$ $(\mu = 0, 1, \ldots, m-1)$ *darstellen; die Güte der Approximation ist bei geradem* m *durch (37) beschrieben.*

4. **Hilfssätze über Laguerresche Polynome** $L_m^{(b-m)}(y)$ **mit** $b = b(y)$**:** Die in der Entwicklung (36) des Konvergenzfaktors $C_N(x\,e^{i\varphi})$ auftretenden Laguerreschen Polynome des Typs $L_m^{(b-m)}(y)$ $(b \in \boldsymbol{C}, y \in \boldsymbol{C}; m+1 \in \boldsymbol{N})$ besitzen nach (6) und (1) die Integraldarstellung

$$L_m^{(b-m)}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} e^{-yt}(1+t)^b\, t^{-m-1}\, dt; \tag{39}$$

sie sind also Entwicklungskoeffizienten der erzeugenden Funktion

$$f(t; y, b) = e^{-yt}(1+t)^b = \sum_{\mu=0}^{\infty} L_\mu^{(b-\mu)}(y)\, t^\mu \quad (|t| < 1) \tag{40}$$

und hängen für $y > 0$ und $b \geq 0$ mit den in der Statistik vorkommenden *Poisson-Charlierschen Polynomen*

$$p_m(b) := b^{-\frac{m}{2}} (m!)^{\frac{1}{2}} L_m^{(b-m)}(y)$$

(vgl. z. B. Szegö [25]) zusammen.

Mittels logarithmischer Ableitung der erzeugenden Funktion (40) nach t ergibt sich der (auch für numerische Zwecke nützliche)

Hilfssatz 3: *Die von* $y \in \boldsymbol{C}$ *und* $b \in \boldsymbol{C}$ *abhängigen Laguerreschen Polynome* $L_m^{(b-m)}(y)$ *genügen der Rekursionsformel*

$$(41)\quad (m+1)\,L_{m+1}^{(b-m-1)}(y) = (b-y-m)\,L_m^{(b-m)} - \\ - y\,L_{m-1}^{(b-m+1)}(y) \qquad (m \geq 1)$$

mit den Anfangswerten

$$(41')\quad \begin{cases} L_0^{(b)}(y) = 1,\ L_1^{(b-1)}(y) = b-y, \\ 2\,L_2^{(b-2)}(y) = (b-y)^2 - b, \\ 6\,L_3^{(b-3)}(y) = (b-y)^3 - 2(b-y)^2 - (b+2y)(b-y) + \\ \qquad + 2b, \ldots . \end{cases}$$

Durch vollständige Induktion nach dem Grad folgt aus (41) mit (41′) im Sonderfall $b = y$ für $L_m^{(y-m)}(y)$ als Polynom in y

Hilfssatz 4:

$$(42)\qquad \textit{Grad}\ L_m^{(y-m)}(y) \leq \left[\frac{m}{2}\right],$$

$$(42')\qquad \textit{Grad}\ L_{2k}^{(y-2k)}(y) = k \qquad (m = 2k).$$

Für

$$(43)\qquad b =: y - \zeta$$

ergibt sich aus (40)

$$f(t;\, y-\zeta,\, y) = e^{-yt}(1+t)^y(1+t)^{-\zeta} = \\ = f(t;\, y,\, y)\,(1+t)^{-\zeta}$$

und hieraus durch Reihenmultiplikation die für die nachfolgenden Aussagen grundlegende Beziehung

$$(44)\qquad L_m^{(y-\zeta-m)}(y) = \sum_{\mu=0}^{m} L_\mu^{(y-\mu)}(y)\,\frac{(\zeta)_{m-\mu}}{(m-\mu)!}.$$

Aus (44) und Hilfssatz 4 zusammen folgt sofort

Hilfssatz 5: *Für beschränkte ζ gilt für $y \to \infty$*

$$(45)\qquad L_m^{(y-\zeta-m)}(y) = O\left(y^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)$$

und

$$(46)\qquad y^k = O\left(L_{2k}^{(y-\zeta-2k)}(y)\right) \qquad (m = 2k),$$

u. zw. gleichmäßig in ζ.

Im folgenden sei nun $\zeta = \zeta(y)$, und es werde mit Konstanten $\varrho\,(0 \leq \varrho \leq 1)$ und $M > 0$ in einem Winkelraum W der y-Ebene

$$(47)\qquad \zeta = \zeta(y) = \xi(y) + i\,\eta(y) := \omega(y)\,y^{\varrho} \quad (\xi, \eta \in \boldsymbol{R})$$

gesetzt mit

$$(48)\qquad \begin{cases} |\omega(y)| \leq M & (\varrho = 0) \\ \omega(y) \neq 0 \text{ für } |y| \geq y_0 & (0 < \varrho \leq 1) \\ \omega(y) = o(1) \text{ für } y \to \infty & (0 < \varrho \leq 1). \end{cases}$$

Dann läßt sich (44) für $|\zeta| \geq \delta > 0$ umschreiben in die Form

$$(44')\qquad \begin{aligned} L_m^{(y-\zeta-m)}(y) = y^{m\varrho} \sum_{\mu=0}^{m} \Big\{ & [y^{-\left[\frac{\mu}{2}\right]} L_\mu^{(y-\mu)}(y)] \\ & [\zeta\,\omega^{-1}\,y^{-\varrho}]^{m-\mu} \left[\frac{(\zeta)_{m-\mu}}{\zeta^{m-\mu}}\right] \Big\}\, y^{-\frac{\mu}{2}(2\varrho-1)} \\ & y^{-\left(\frac{\mu}{2}-\left[\frac{\mu}{2}\right]\right)} \frac{\omega^{m-\mu}}{(m-\mu)!}. \end{aligned}$$

Aufgrund von Hilfssatz 4 und den Voraussetzungen über die Hilfsfunktion $\omega = \omega(y)$ ist der Ausdruck in der geschweiften Klammer für $y \to \infty$ in W beschränkt, falls

$$|\zeta(y)| = |\omega(y)\,y^{\varrho}| \geq \delta > 0$$

ist. Ferner gilt für $1 \leq \mu \leq m - 1$

$$y^{-\left(\frac{\mu}{2}-\left[\frac{\mu}{2}\right]\right)}\,(\omega(y))^{m-\mu} = o(1) \qquad (y \to \infty;\, y \in W).$$

Dies und Hilfssatz 5 führen auf

Hilfssatz 6: *In der Bezeichnung von (47) und (48) gelten für* $y \to \infty\,(y \in W)$:

$$(49)\qquad \begin{cases} L_{2k}^{(y-\zeta-2k)}(y) = O(y^k) \\ y^k = O(L_{2k}^{(y-\zeta-2k)}(y)), \end{cases} \qquad \left(0 \leq \varrho \leq \tfrac{1}{2}\right)$$

$$(50)\qquad L_{2k+1}^{(y-\zeta-2k-1)}(y) = \begin{cases} O(y^k) & (\varrho = 0) \\ o(y^{k+\varrho}) & \left(0 < \varrho \leq \tfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

und

$$(51)\qquad L_m^{(y-\zeta-m)}(y) = O\left(y^{m\varrho}\,[\omega(y)]^m\right) \qquad \left(\tfrac{1}{2} < \varrho \leq 1\right).$$

Diese Wachstumsaussagen sind entscheidend für die nun folgende Herleitung asymptotischer Entwicklungen für den Konvergenzfaktor $C_N(x\,e^{i\varphi})$.

5. Asymptotische Entwicklungen für $C_N(xe^{i\varphi})$: Für die nachfolgende asymptotische Untersuchung ist es vorteilhaft, die Darstellung (36) des Konvergenzfaktors $C_N(xe^{i\varphi})$ bei geradem $m = 2\,k$ in die Form

$$\begin{aligned}(52)\qquad C_N(xe^{i\varphi}) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \{&(2\,\varkappa)!\, A_{2\varkappa}(a-c+1, N, \varphi)\, x^{-2\varkappa} \\ &L_{2\varkappa}^{(-a-N-2\varkappa)}(-x e^{i\varphi}) + \\ &(2\varkappa+1)!\, A_{2\varkappa+1}(a-c+1, N, \varphi)\, x^{-2\varkappa-1} \\ &L_{2\varkappa+1}^{(-a-N-2\varkappa-1)}(-x e^{i\varphi})\} + D_{N,2k}(x e^{i\varphi}) =: \\ =: \sum_{\varkappa=0}^{k-1} B_\varkappa(&a, a-c+1, \varphi; N, -x e^{i\varphi}) + D_{N,2k}(x e^{i\varphi})\end{aligned}$$

umzuschreiben; dabei bezeichnet in $B_\varkappa(a, a-c+1, \varphi; N, -x e^{i\varphi})$ das erste Argument den Parameter a der Laguerreschen Polynome und das zweite den Parameter $(a-c+1)$ der Koeffizienten $A_\mu(a-c+1, N, \varphi)$. Weiter setzen wir in der Restabschätzung (37) für $D_{N,2k}(x e^{i\varphi})$

$$(53)\qquad y := -|x|\cos(\vartheta+\varphi) \qquad \left(|\vartheta| < \frac{3\pi}{2}\,;\quad |\vartheta+\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta,\ 0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(54)\qquad N := -y + \zeta^* - a,$$

wobei $|\zeta^*| \leq |\zeta|$ und $\zeta = \zeta(y)$ die Forderungen (47), (48) erfüllen soll.

Die Abschätzung (37) geht in dieser Bezeichnung mit einer geeigneten von y, ϑ und φ unabhängigen Konstanten S_k über in

$$(55)\qquad |D_{N,2k}(xe^{i\varphi})| \leq S_k\, y^{-2k} |L_{2k}^{(y-\xi-2k)}(y)|$$
$$\left(|\vartheta+\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta;\ y \leq y_0 < 0\right),$$

da ja, wie die Ersetzung von ζ durch ζ^* in (44′) zeigt, die Aussagen der Hilfssätze 5 und 6 auch für ζ^* statt ζ gelten, wenn $|\zeta^*| \leq |\zeta| = |\zeta(y)|$ ist. Hiernach ist dann bei dem nachfolgend beschriebenen Grenzübergang

$$(56)\qquad D_{N,2k}(xe^{i\varphi}) = \begin{cases} O(y^{-k}) & \left(0 \leq \varrho \leq \frac{1}{2}\right) \\ O\left(y^{-2(1-\varrho)k}\,(\omega(y))^{2k}\right) & \left(\frac{1}{2} < \varrho \leq 1\right), \end{cases}$$

wobei der Fall des Hilfssatzes 5 durch $\varrho = 0$ miterfaßt wird.

Im folgenden wird nun für $(x, N) \to (\infty, \infty)$ ein *verallgemeinerter Grenzübergang* (vgl. Herm. Schmidt [20], S. 631, und Nöbeling [15]) in $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{N}$, wo $\boldsymbol{F}$ die Riemannsche Fläche von $\log x$ bezeichnet, *bezüglich des Rasters*

$$(57)\qquad R := \{U_\sigma \mid \sigma > 0\}$$

in $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{N}$ *durchgeführt. Es sei*

α) *für* $|\vartheta| < \pi$

$$N = |x| - a + \zeta^*,\ |\zeta^*| \leq |\zeta|,$$

β) *zur Erfassung von* $|\vartheta| < \frac{3\pi}{2}$ *mit einem in* $|\varphi| < \pi$ *zu wählenden Parameter* $\varphi = \varphi(\vartheta)$

$$N = |x| \cos(\vartheta + \varphi) - a + \zeta^*,\ |\zeta^*| \leq |\zeta|,$$
$$-\frac{\pi}{2} + \delta - \varphi \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} - \delta - \varphi \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right),$$

wobei ζ *den Forderungen (47), (48) genügt und*

$$-y := \begin{cases} |x| & \textit{im Fall } \alpha) \\ |x| \cos(\vartheta + \varphi) & \textit{im Fall } \beta) \end{cases} \qquad \textit{ist;}$$

dann ist

$$(57')\qquad U_\sigma = \{(|x| e^{i\vartheta}, N) \mid -y > \sigma\}.$$

Ferner sei für $y \to -\infty$ eine *Skala* $\{\Phi_\varkappa(y)\}$ vorgegeben durch die Definition

$$(58)\qquad \Phi_\varkappa(y) := \begin{cases} y^{-\varkappa} & \left(0 \leq \varrho \leq \frac{1}{2}\right) \\ & (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots) \\ y^{-2(1-\varrho)\varkappa}\,(\omega(y))^{2\varkappa} & \left(\frac{1}{2} < \varrho \leq 1\right). \end{cases}$$

(56) besagt dann:

$$(59)\qquad D_{N,2\varkappa}(xe^{i\varphi}) = O\left(\Phi_\varkappa(y)\right) \text{ bezüglich } R.$$

Zusammen ergibt sich aus (52) und (59): Der Konvergenzfaktor $C_N(xe^{i\varphi})$ gestattet bezüglich des Rasters R und der Skala $\{\Phi_\varkappa(y)\}$ die *verallgemeinerte asymptotische Entwicklung* (vgl. Herm. Schmidt [20], van der Corput [4], Erdélyi – Wyman [7])

$$(60)\qquad C_N(xe^{i\varphi}) \sim \sum_{\varkappa=0}^{\infty} B_\varkappa(a, a-c+1, \varphi; N, -xe^{i\varphi})$$

$$\left(|\vartheta| = |\operatorname{arc} x| < \frac{3\pi}{2}, \ |\varphi| < \pi, \ |\vartheta+\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \right.$$
$$\left. 0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad (\text{Fall } \beta))$$

bzw.

$$(60')\qquad C_N(|x|) \sim \sum_{\varkappa=0}^{\infty} B_\varkappa(a, a-c+1, -\vartheta; N, -|x|)$$
$$(|\vartheta| < \pi) \qquad\qquad (\text{Fall } \alpha)).$$

Im letzteren Fall gilt auch für die Funktionen $B_\varkappa(a, a-c+1, -\vartheta; N, -|x|)$ aufgrund der Hilfssätze 5 und 6 für $|x| \to \infty$ eine zu (59) analoge Wachstumsaussage, nämlich

$$(61)\qquad B_\varkappa(a, a-c+1, -\vartheta; N, -|x|) = O\left(\Phi_\varkappa(-|x|)\right).$$

Die asymptotische Entwicklung (60') geht somit speziell in eine asymptotische Entwicklung mit beschränkten Koeffizientenfunktionen (vgl. Herm. Schmidt [20]) der Form

$$(62)\qquad C_N(|x|) \sim \sum_{\varkappa=0}^{\infty} B_\varkappa^*(a, a-c+1, -\vartheta; N, -|x|)\,\Phi_\varkappa(-|x|)$$

mit

$$(63)\quad B_\varkappa^*(a, a-c+1, -\vartheta; N, -|x|) = \\ = (\Phi_\varkappa(-|x|))^{-1} B_\varkappa(a, a-c+1, -\vartheta; N, -|x|)$$

über, u. zw. bezüglich des durch (57) im Fall α) definierten Rasters R und der durch (58) erklärten Skala $\{\Phi_\varkappa(-|x|)\}$. Hierin läßt sich übrigens im Fall $0 \leq \varrho \leq \frac{1}{2}$ wegen (42′) und der Hilfssätze 5 und 6, wenn der Koeffizient $A_{2\varkappa}(a-c+1, N, -\vartheta) \neq 0$ ist, mit einer geeigneten Konstanten M^* auch eine Abschätzung nach unten

$$0 < M^* \leq |B_\varkappa^*(a, a-c+1, -\vartheta; N, -|x|)|$$

angeben.

Abschließend sei hier noch darauf aufmerksam gemacht, daß sich auf Grund der Funktionalrelation (2) neue asymptotische Entwicklungen für den Konvergenzfaktor ergeben, die aus den hier abgeleiteten (60) und (62) durch Ersetzung von a durch $(a-c+1)$ in den Laguerreschen Polynomen $L_\mu^{(-a-N-\mu)}(-xe^{i\varphi})$ und von $(a-c+1)$ durch a in den Koeffizienten $A_\mu(a-c+1, N, \varphi)$ hervorgehen; diese sind demnach bezüglich des Rasters R und der Skala $\{\Phi_\varkappa(y)\}$ durch

$$(64)\quad C_N(xe^{i\varphi}) \sim \sum_{\varkappa=0}^{\infty} B_\varkappa(a-c+1, a, \varphi;\ N, -xe^{i\varphi})$$

$$\left(|\vartheta| < \frac{3\pi}{2},\ |\vartheta+\varphi| < \frac{\pi}{2} - \delta,\ |\varphi| < \pi,\ 0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$(65)\quad C_N(|x|) \sim \sum_{\varkappa=0}^{\infty} B_\varkappa^*(a-c+1, a, -\vartheta; N, -|x|)\, \Phi_\varkappa(-|x|) \qquad (|\vartheta| < \pi)$$

gegeben. Auch sind dann in den jeweils zutreffenden Restabschätzungen, wie etwa in (37), a durch $(a-c+1)$ und $(a-c+1)$ durch a zu ersetzen.

Zusammenfassend haben wir als Ergebnis erhalten:

Satz: *Der durch* (12′) *für* $|\vartheta| = |\text{arc}\, x| < \frac{3\pi}{2}$ *definierte Konvergenzfaktor* $C_N(xe^{i\varphi})$ (*mit* $|\vartheta+\varphi| < \frac{\pi}{2}$ *und* $|\varphi| < \pi$)

im Rest $R_N(x)$ *gestattet bezüglich des durch* (57) *erklärten Grenzübergangs und bezüglich der durch* (58) *gegebenen Skala die asymptotischen Entwicklungen* (60) *und* (62). *Diese führen speziell im Fall* $|\vartheta| < \pi$ *auf die asymptotischen Potenzreihen* (62) *und* (65).

Zusatz: *Fehlerabschätzungen für aus* (60) *bzw.* (62) *folgende asymptotische Darstellungen k-ter Ordnung ergeben sich aus* (37) *bzw.* (37'); *entsprechendes gilt für* (64) *bzw.* (65) *bei Ersetzung von* a *durch* $(a - c + 1)$ *in den Laguerreschen Polynomen und von* $(a - c + 1)$ *durch* a *in den konstanten Faktoren von* (37) *bzw.* (37'). N *und* x *sind dabei passend durch eine der Bedingungen* (54) *zu koppeln.*

6. Bemerkungen: 1. Bei unserem Grenzübergang ist in der Darstellung (12') des Restes $R_N(x)$ nach dem soeben hergeleiteten Satz der Konvergenzfaktor $C_N(xe^{i\varphi})$ beschränkt; weiter gilt auf Grund der Stirlingschen Formel bei der Wahl $N = |x|\,(\cos(\vartheta + \varphi) + o(1))$ für $|x| \to \infty$ in (54) für den in (12') auftretenden Faktor

$$\frac{(a)_N (a-c+1)_N}{N!}\, x^{-a-N} = O\left(e^{-[1+\log(\cos(\vartheta+\varphi))]N}\right)$$

für $N \to \infty$. Es ist also in diesem Fall

$$R_N(x(N)) = O\left(e^{-[1+\log(\cos(\vartheta+\varphi))]N}\right) \tag{66}$$

für $N \to \infty$; (66) ist numerisch brauchbar, sofern

$$0 < 1 + \log(\cos(\vartheta + \varphi)) \leq 1 \tag{67}$$

ist.

Der Vergleich von $O(e^{-[1+\log(\cos(\vartheta+\varphi))]N})$ (in (66)) unter der Bedingung (67) bei unserem Grenzübergang mit $O(x^{-N-a})$ (in (5)) bei festem N für $x \to \infty$ zeigt den Vorteil gegenüber der Ausgangsentwicklung.

2. Die konfluenten hypergeometrischen Funktionen

$$y_1 = \Psi(a, c, x) \quad \text{und} \quad y_2 = e^x\, \Psi(c - a, c, e^{-\varepsilon\pi i} x)$$

(mit $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$) sind linear unabhängige Lösungen der Kummerschen Differentialgleichung

$$xy'' + (c - x)\, y' - ay = 0$$

bei beliebigen a und c; für die Kummersche Reihenlösung gilt

$$_1F_1(a, c, x) = \frac{e^{\varepsilon a \pi i}\, \Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\, y_1 + \frac{e^{\varepsilon (a-c)\pi i}\, \Gamma(c)}{\Gamma(a)}\, y_2 \quad (1 - c \notin \boldsymbol{N}).$$

Zur asymptotischen Untersuchung dieser in x ganzen Funktionen $_1F_1(a, c, x)$ für $x \to \infty$ in einer Vollumgebung von ∞ (speziell schon für reelle x) mit unserer Methode ist offenbar die Kenntnis von asymptotischen Darstellungen im obigen Satz in Winkelräumen $|\operatorname{arc} x| < 2\pi + \delta$ $\left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$ vonnöten.

Übrigens stellt der Rest $R_N(x)$ aus (4) eine partikuläre Lösung der inhomogenen Kummerschen Differentialgleichung

$$xy'' + (c - x)\, y' - ay = \frac{(-1)^N (a)_N (a - c + 1)_N}{(N-1)!}\, x^{-N-a}$$

dar, hängt also mit einem Sonderfall der von Babister ([3], S. 121 ff.) untersuchten Klasse von Lösungen inhomogener Kummerscher Differentialgleichungen zusammen.

3. Nach Fertigstellung der Arbeit ist das Buch von F. W. J. Olver über „*Asymptotics and Special Functions*" (*Acad. Press, New York–London*, 1974) erschienen, in dem er sich im letzten Kapitel auch mit Restgliedentwicklungen im Fall des Exponentialintegrals und der konfluenten hypergeometrischen Funktion $\Psi(a, c, x)$ bei reellen a (> 0) und c in $|\operatorname{arc} x| \leq \pi - \delta$ $(0 < \delta < \pi)$ befaßt, wobei er $N = |x| - \zeta$ mit beschränktem ζ wählt. Abgesehen von diesen Einschränkungen für a, c, ζ und $\operatorname{arc} x$ entspricht sein Verfahren zur Gewinnung von Restgliedentwicklungen für einen zu (13) verwandten Konvergenzfaktor methodisch anfangs dem hier benutzten. Bei Olver finden sich nicht die für die vorliegende asymptotische Untersuchung entscheidenden Zusammenhänge der Entwicklungskoeffizienten mit hypergeometrischen Funktionen und Laguerreschen Polynomen $L_m^{(b-m)}(y)$ (samt der hier stets angegebenen expliziten numerischen Fehlerabschätzungen) und die hier wichtige Untersuchung von $L_m^{(b-m)}(y)$ im Fall $b = b(y) = y + o(y)$ (einschließlich der für numerische Zwecke nützlichen Rekursionsformel (41)). Statt

dessen werden in diesem Zusammenhang auftretende Integrale zumeist mit der Laplaceschen Methode bzw. dem Watsonschen Lemma asymptotisch untersucht.

Literatur

[1] J. R. Airey: The calculation of the exponential, sine and cosine integrals and other functions from their asymptotic expansions. Arch. d. Math. u. Phys. 22 (1914), 213–225.

[2] J. R. Airey: The „converging factor" in asymptotic series and the calculation of Bessel, Laguerre and other functions. Philos. Mag. [7], 24 (1937), 521–552.

[3] A. W. Babister: Transcendental functions satisfying nonhomogeneous linear differential equations. MacMillan New York-London, 1967.

[4] J. G. van der Corput: Asymptotic developments I. Fundamental theorems of asymptotics. J. Analyse Math. 4 (1956), 341–418.

[5] R. B. Dingle: Asymptotic expansions and converging factors I–VI. Proc. Roy. Soc. London Ser. A 244 (1958), 456–490, Ser. A 249 (1959), 270–295.

[6] R. B. Dingle: Asymptotic expansions: Their derivation and interpretation. Acad. Press London - New York, 1973.

[7] A. Erdélyi-M. Wyman: The asymptotic evaluation of certain integrals. Arch. Rat. Mech. An. 14 (1963), 217–260.

[8] E. Hille: Lectures on ordinary differential equations. Addison-Wesley London, 1969 (S. 346ff.).

[9] Y. L. Luke: The special functions and their approximations I, II. Acad. Press New York - London, 1969.

[10] G. Mainardus: Über die Approximation asymptotischer Entwicklungen I. Computing 1 (1966), 39–49.

[11] J. C. P. Miller: A method for the determination of converging factors, applied to the asymptotic expansions for the parabolic cylinder functions. Proc. Cambridge Phil. Soc. 48 (1952), 243–254.

[12] L. Neckermann: Zur Abschätzung des Restes $R_N(x)$ der asymptotischen Darstellung der konfluenten hypergeometrischen Funktion $\Psi\,(a,c,x)$ im Komplexen. Tagungsbericht 5 (Spezielle Funktionen) Oberwolfach 1973, 11–12.

[13] W. Neuhaus: Stieltjessche Restgliedentwicklungen asymptotischer Potenzreihen von Laplaceintegralen. Diss. Clausthal-Zellerfeld (1971), 63 S.

[14] W. Neuhaus: Restgliedentwicklungen asymptotischer Potenzreihen spezieller Funktionen und ihrer Fehlerschranken. Tagungsbericht 5 (Spezielle Funktionen) Oberwolfach 1973, 12–13.

[15] G. Nöbeling: Über eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffs. Sitz. Ber. Bay. Ak. Wiss. München, Math.-nat. Klasse 1950, 133–141.

[16] F. W. Olver: On the asymptotic solutions of second – order differential equations, having an irregular singularity of rank one, with an application to Whittaker Functions. J. SIAM, Num. An. Ser. B 2 (1965), 225–243.

[17] F. Pittnauer: Eine Methode zur Bestimmung günstiger Konvergenzfaktoren für asymptotische Entwicklungen. Computing 2 (1967), 246–256.

[18] F. Pittnauer: Eine Bemerkung über das Minimalglied asymptotischer Potenzreihen. Computing 7 (1971), 353–356.

[19] J. B. Rosser: Explicit remainder terms for some asymptotic series. J. Rat. Mech. Math. 4 (1955), 595–626.

[20] Herm. Schmidt: Beiträge zu einer Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen. Math. Ann. 113 (1937), 629–656.

[21] Herm. Schmidt-L. Neckermann: Zur Neuhausschen Restgliedentwicklung der asymptotischen Darstellung des Exponentialintegrals. Tagungsbericht 6 (Spezielle Funktionen) Oberwolfach 1974, 6–7.

[22] L. J. Slater: On the evaluation of the confluent hypergeometric functions. Proc. Cambridge Phil. Soc. 49 (1953), 612–622.

[23] L. J. Slater: Confluent Hypergeometric Functions. Univ. Press Cambridge, 1960.

[24] Th. Stieltjes: Recherches sur quelques séries semiconvergentes. Ann. Sci. de l'Éc. Norm. Sup. (3), 3 (1886), 201–258.

[25] G. Szegö: Orthogonal polynomials. Rev. ed. AMS New York, 1959 (S. 34f.).

[26] F. G. Tricomi: Funzioni ipergeometriche confluenti. Ed. Cremonese Roma, 1954.

[27] E. T. Whittaker-G. N. Watson: A course of modern analysis. 4. Ed. Univ. Press Cambridge, 1960.

[28] Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables (ed. by M. Abramowitz-I. A. Stegun) Dover Publ. New York, 1965.