BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1974

MÜNCHEN 1975

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Charakterisierung minkowskischer Ebenen durch Beweglichkeitsaxiome

Herrn Professor Dr. Johannes Weissinger zum 60. Geburtstag

Von **Rolf Lingenberg** in Karlsruhe

Stellt man das zweidimensionale Raum-Zeit-Kontinuum der speziellen Relativitätstheorie als $x\,t$-Ebene dar, so bedeutet eine Lorentz-Transformation

$$(1)\qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v_2}{c^2}}}$$

(c Lichtgeschwindigkeit) je nach Auffassung eine Änderung des Bezugssystems, oder eine Kollineation der Ebene. Diese läßt die quadratische Form $x^2 - c^2t^2$ invariant. Damit tritt der euklidischen Geometrie der reellen Ebene mit der quadratischen Form $x^2 + y^2$ ein neuer Typ metrischer Geometrie der reellen Ebene mit der quadratischen Form $x^2 - c^2y^2$ an die Seite. Die reelle Ebene mit der neuen Metrik nennt man die reelle minkowskische Ebene – nach H. Minkowski, der als erster auf die Möglichkeit hingewiesen hat, das Raum-Zeit-Kontinuum der speziellen Relativitätstheorie als neuen Typ metrischer Geometrie zu behandeln. In dieser Auffassung ist die Lorentz-Gruppe eine Untergruppe der Bewegungsgruppe der reellen minkowskischen Ebene. Umgekehrt bestimmt die Lorentz-Gruppe die minkowskische Bewegungsgruppe, da jede Bewegung der reellen minkowskischen Ebene aus den Spiegelungen an zwei zueinander senkrechten Geraden mit Hilfe der Elemente der Lorentz- und der Translationsgruppe gewonnen werden kann (vgl. [7]).

Heute läßt sich über jedem Körper eine minkowskische Ebene definieren (vgl. 2). Die Theorie der minkowskischen Ebenen ist nicht nur im Rahmen der metrischen Geometrie der Ebene als vierter (und letzter) Typ neben der euklidischen, der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie interessant. Es sei etwa auf den erst kürzlich gefundenen Beweis eines rein projektiven Satzes verwiesen („In einer projektiven Ebene gilt der Satz von Pappus-Pascal schon dann, wenn er für alle Sechsecke als richtig vorausgesetzt wird, die auf zwei festen Geraden liegen"), der erst bei Verwendung der Theorie der minkowskischen Ebenen durchsichtig wird.

Es liegen heute mehrere Kennzeichnungen der minkowskischen Ebenen vor (vgl. u. a. [8] und [2] – s. auch 3). Alle diese Charakterisierungen stützen sich wesentlich auf die von Spiegelungen erzeugte Bewegungsgruppe und den Satz von den drei Spiegelungen.

Ziel der vorliegenden Note ist es, eine axiomatisch-synthetische Kennzeichnung der minkowskischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$ zu geben, welche nur gewisse Beweglichkeitsforderungen an die Ebene stellt (vgl. 4.).*) Damit stehen unsere Untersuchungen in dem allgemeinen Rahmen der Frage nach der Tragweite von Transitivitätsforderungen in der metrischen Geometrie. Während in der affinen und projektiven Geometrie eine Fülle schöner Resultate über Charakterisierungen von affinen und projektiven Ebenen durch Transitivitätseigenschaften vorliegen, gibt es kaum Aussagen über die Kennzeichnung metrischer Ebenen durch Beweglichkeitsforderungen (vgl. lediglich nur [6] und [4]). Die Behandlung der minkowskischen Ebenen bietet sich in diesem Zusammenhang wegen ihrer besonderen Transitivitätseigenschaften an. Es sei bemerkt, daß auch in [7] Transitivitätseigenschaften der Lorentz-Gruppe eine wichtige Rolle spielen.

Da wir bei unserem Ansatz auf die gruppentheoretische Formulierung verzichten müssen (diese würde Existenz und Eindeutigkeit der Spiegelungen sowie den Satz von den drei Spiegelungen voraussetzen) verlieren wir an Kürze, gewinnen aber vielleicht an geometrischer Unmittelbarkeit.

1. Metrische Inzidenzstrukturen

Seien G eine mindestens aus zwei Elementen bestehende Menge und $\varkappa$ eine dreistellige Äquivalenzrelation in G (vgl. [1], S. 64 f.),

* Der Fall der Charakteristik 2 ließe sich ohne Mühe durch Ändern von Axiom M 7 in 4 mit einbegreifen, aber wir verzichten darauf, da die zwar analogen, aber doch eigenständigen Überlegungen für Char. 2 nicht unwesentlich mehr Raum erfordern.

also $\varkappa \subset G \times G \times G$. Dann heißt $I = (G, \varkappa)$ eine *Inzidenzstruktur* und jedes Element aus G eine *Gerade*. Geraden bezeichnen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben. Drei Geraden a, b, c heißen *kopunktal*, wenn $(a, b, c) \in \varkappa$ gilt. Zu $\varkappa$ gehören die Teilmengen

$$G(a, b) := \{x \mid (a, b, x) \in \varkappa\} \qquad \text{für } a \neq b \text{ aus } G.$$

Jede solche Menge heißt ein *Punkt* von I. Punkte bezeichnen wir kurz mit großen lateinischen Buchstaben. Eine Gerade a heißt *inzident* mit dem Punkt B, wenn $a \in B$ gilt. Nach den Eigenschaften einer dreistelligen Äquivalenzrelation gelten: 1. Aus $a, b \in A, B$ folgt $a = b$ oder $A = B$. 2. Zu jedem Punkt A gibt es zwei voneinander verschiedene mit A inzidente Geraden. 3. Genau dann sind die Geraden a, b, c kopunktal, wenn es einen Punkt A mit $a, b, c \in A$ gibt. Diese drei Aussagen werden wir im Folgenden stets ohne Zitat verwenden.

Zwei Punkte A, B heißen *verbindbar*, wenn es eine Gerade a mit $a \in A, B$ gibt. Für $A \neq B$ bezeichnet (A, B) die eindeutig bestimmte Gerade v mit $v \in A, B$ (wenn diese vorhanden ist). Ein Punkt A heißt *dreiseitverbindbar*, wenn für jedes Tripel paarweise verbindbarer, verschiedener Punkte B, C, D der Punkt A mit mindestens einem der Punkte B, C, D verbindbar ist.

Seien $(G, \varkappa)$ eine Inzidenzstruktur und ω eine symmetrische, irreflexive zweistellige Relation in G, also $\omega \subset G \times G$. Dann heißt $(G, \varkappa, \omega)$ eine *metrische Inzidenzstruktur*. Zwei Geraden a, b heißen zueinander *senkrecht* oder *orthogonal*, geschrieben $a \perp b$, wenn $(a, b) \in \omega$ gilt. Für eine Gerade g heißt die Menge

$$g^{\perp} := \{x \mid x \perp g\}$$

die *Lotmenge* von g. Ein Punkt A heißt ein *Lotbüschel* der Geraden g, wenn A mit mindestens zwei zu g senkrechten Geraden inzidiert. Ein Punkt heißt ein *Orthogonalenschnitt*, wenn er mit zwei zueinander senkrechten Geraden inzidiert. Ein Tripel a, b, c aus drei Geraden heißt ein *Polardreiseit*, wenn a, b, c paarweise zueinander senkrecht und nicht kopunktal sind.

Unter einem *Isomorphismus* einer metrischen Inzidenzstruktur $(G, \varkappa, \omega)$ auf eine metrische Inzidenzstruktur $(G', \varkappa', \omega')$ verstehen wir eine bijektive Abbildung α von G auf G' mit

$$(a,b,c) \in \varkappa \Leftrightarrow (a\alpha, b\alpha, c\alpha) \in \varkappa'$$
$$(a,b) \in \omega \Leftrightarrow (a\alpha, b\alpha) \in \omega'.$$

Ist $(G,\varkappa,\omega) = (G',\varkappa',\omega')$, so heißt α ein *Automorphismus* oder auch eine *orthogonale Kollineation.*

Eine involutorische orthogonale Kollineation σ einer metrischen Inzidenzstruktur $(G,\varkappa,\omega)$ heißt eine *Spiegelung an der Geraden* g, bezeichnet mit σ_g, wenn $g\sigma = g$ ist, und wenn gilt

$$(a,g,a\sigma) \in \varkappa \qquad \text{für alle } a \text{ aus } G,$$
$$a\sigma = a \text{ und } a \neq g \Leftrightarrow (a,g) \in \omega.$$

Offenbar läßt eine Spiegelung an der Geraden g die Gerade g punktweise und die Lotmenge $g^{\perp}$ der Geraden g geradenweise fest.

Zwei Geraden a,b bzw. zwei Punkte A,B heißen ineinander *spiegelbar*, wenn es eine Spiegelung σ an einer Geraden mit $a\sigma = b$ bzw. mit $A\sigma = B$ gibt.

Jedes Produkt von Spiegelungen heißt eine *Bewegung* der metrischen Inzidenzstruktur. Zwei Geraden a,b bzw. zwei Punkte A,B heißen ineinander *beweglich*, wenn es eine Bewegung α mit $a\alpha = b$ bzw. mit $A\alpha = B$ gibt.

Ist A ein Punkt, der nicht Lotbüschel ist, und sind σ_a, σ_b Spiegelungen an Geraden a,b aus A, so heißt das Produkt $\sigma_a\sigma_b$ eine *Drehung* um A.

Im Folgenden geben wir als Beispiele von metrischen Inzidenzstrukturen die minkowskischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$ und – allgemeiner – die S-Gruppenebenen an.

2. Minkowskische Ebenen von Charakteristik $\neq 2$

Seien K ein Körper von Charakteristik $\neq 2$ und $V = K^2$ der zweidimensionale Vektorraum über K. Den von einem Vektor A aus V mit $A \neq O$ (O Nullvektor in V) erzeugten eindimensionalen Teilraum bezeichnen wir mit $\langle A \rangle$ und die Restklassen nach den eindimensionalen Teilräumen mit $A + \langle B \rangle$ für A und $B \neq O$ aus V. Zwei Restklassen nach dem gleichen eindimensionalen Teilraum wollen wir *parallel* nennen. Sei endlich k ein Element aus K, für welches $-k$ nicht Quadrat in K ist, dann definieren wir ein Skalarprodukt in V gemäß

(2) $$X \circ X' = xx' - kyy' \qquad \text{für } X = (x,y) \text{ und } X' = (x',y') \text{ aus } V.$$

Wir setzen

$$G := \{A + \langle B \rangle \mid B \circ B \neq 0\}$$

$$\varkappa := \{(a,b,c) \mid a,b,c \in G \text{ und } a \cap b \cap c \neq \varnothing \text{ oder } a,b,c \text{ parallel}\}$$

$$\omega := \{(a,b) \mid a,b \in G \text{ und } B \circ B' = 0 \text{ für } a = A + \langle B \rangle,\ b = A' + \langle B' \rangle\}.$$

Dann ist $M := (G, \varkappa, \omega)$ eine metrische Inzidenzstruktur. Sie heißt eine *minkowskische Ebene* (über K) *von Charakteristik* $\neq 2$.*) Offenbar ist G eine Teilmenge der Geraden der affinen Ebene über K, und drei Geraden aus G kopunktal in M, wenn sie als Geraden der affinen Ebene einen Punkt gemeinsam haben oder parallel sind. Die Orthogonalität ist in Analogie zu dem Senkrechtstehen in der euklidischen Ebene definiert (ist K der reelle Zahlkörper $\boldsymbol{R}$ und $k = -1$ in (2) – was ja für eine minkowskische Ebene zu setzen nicht erlaubt ist – so ist die dann entstehende Relation ω die Orthogonalität in der euklidischen Ebene über den reellen Zahlkörper).

An jeder Geraden der minkowskischen Ebene M gibt es genau eine Spiegelung. Seien $S(M)$ die Menge der Spiegelungen an Geraden von M und $B(M)$ die von $S(M)$ erzeugte Gruppe. Dann heißt $B(M)$ die Bewegungsgruppe der minkowskischen Ebene.

Schreibt man für $K = \boldsymbol{R}$ die Vektoren aus V in der Form (x, t) mit $x, t \in \boldsymbol{R}$ und setzt $k = c^2$ (c Lichtgeschwindigkeit), so sind die Lorentz-Transformationen (1) Elemente von $B(M)$. Sie lassen offenbar das Skalarprodukt (2) invariant.

3. S-Gruppen und S-Gruppenebenen

Seien G eine Gruppe und S ein Erzeugendensystem von G, welches nur involutorische Elemente enthält. Kleine lateinische Buchstaben sollen in diesem Abschnitt Elemente von S bedeuten.

---

* Man kann zeigen, daß es bis auf Isomorphie nur eine minkowskische Ebene über dem Körper K gibt.

J sei die Menge aller Involutionen aus G. Das Paar (G, S) heißt eine *S-Gruppe*, wenn gilt

Axiom S. *Aus* $a \neq b$ *und* $abx, aby, abz \in J$ *folgt* $xyz \in S$.

Man bestätigt leicht, daß die Relation $\varkappa := \{(a,b,c) \mid abc \in J\}$ eine dreistellige Äquivalenzrelation in S ist, und daß die Menge $\omega := \{(a,b) \mid ab \in J\}$ eine zweistellige, irreflexive und symmetrische Relation in S ist. Enthält also S mindestens zwei Elemente, so ist $(S, \varkappa, \omega)$ eine metrische Inzidenzstruktur, die wir die *Gruppenebene* der S-Gruppe (G, S) nennen und mit $E(G, S)$ bezeichnen wollen. Für festes a ist die Abbildung

$$\sigma : \begin{cases} S \to S \\ x \mapsto axa \end{cases}$$

eine Spiegelung der metrischen Inzidenzstruktur $E(G, S)$ an der Geraden a oder die Identität. Axiom S läßt sich dann als der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen interpretieren.

Ist M eine minkowskische Ebene von Charakteristik $\neq 2$, so ist $(B(M), S(M))$ eine S-Gruppe, deren Gruppenebene $E(B(M), S(M))$ zu M isomorph ist (vgl. etwa [2]).

Zur Kennzeichnung der minkowskischen Ebenen unter den S-Gruppenebenen kann man die folgenden Axiome für eine S-Gruppe (G, S) – genauer für die Gruppenebene $E(G, S)$ der S-Gruppe – heranziehen:

Axiom D. *Jeder Punkt ist dreiseitverbindbar.*

Axiom L. *Es gibt zwei zueinander senkrechte Geraden.*

Axiom M. *Je zwei verschiedene Lotbüschel sind unverbindbar; es gibt unverbindbare Punkte, welche keine Lotbüschel sind.*

Axiom C. *Es gibt nicht kopunktale Geraden* a, b, g *für die* a, b *zu* g *senkrecht sind.*

Das Axiom C trennt dabei den Fall der Charakteristik $\neq 2$ von dem der Charakteristik 2.

Im Anschluß an [2], § 7 und [3] gilt dann nach [5], § 12 der

Hauptsatz. *Die minkowskischen Ebenen von Charakteristik* $\neq 2$ *sind bis auf Isomorphie die Gruppenebenen sämtlicher S-Gruppen, für die die Axiome* D, L, M *und* C *gelten.*

4. Axiomensystem für die minkowskischen Ebenen mit Beweglichkeitsaxiomen

Seien $I = (G, \varkappa, \omega)$ eine metrische Inzidenzstruktur und N die Menge aller Punkte von I, welche nicht Lotbüschel sind. Für I mögen die folgenden Axiome gelten:

M 1. *Jede Gerade ist in mindestens zwei Punkten aus N enthalten.*

M 2. *Jedes Lotbüschel ist dreiseitverbindbar; es gibt einen nicht mit allen Punkten aus N verbindbaren, dreiseitverbindbaren Punkt aus N.*

M 3. *Je zwei verbindbare Punkte aus N sind ineinander spiegelbar.*

M 4. *Je zwei Geraden einer Lotmenge sind durch eine orthogonale Kollineation ineinander überführbar.*

M 5. *Sind A, B, C paarweise unverbindbare Punkte aus N, so gibt es eine Drehung α um A mit $B\alpha = C$. Zwei Drehungen um einen Punkt A aus N stimmen überein, wenn sie in einem mit A unverbindbaren Punkt aus N übereinstimmen.*

M 6 (Starrheit der Bewegungen). *Läßt eine Bewegung α einen Orthogonalenschnitt A und eine Gerade b aus A fest, so ist α die Identität oder eine Spiegelung an b oder eine Spiegelung an einer zu b senkrechten Geraden durch A oder ein Produkt $\sigma_b \sigma_{b'}$ von Spiegelungen an b und einer zu b senkrechten Geraden b' durch A.*

M 7. *Für Geraden a, g, b gilt: Aus $(a, g), (b, g) \in \omega$ und $(a, g, b) \in \varkappa$ folgt $a = b$.*

Man kann leicht zeigen (vgl. etwa [5], § 12 oder [2]), daß in einer minkowskischen Ebene von Charakteristik $\neq 2$ die Axiome M 1 bis M 7 gelten.*)

Wir wollen nun umgekehrt zeigen, daß auch nur die minkowskischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$ dem eben angegebenen Axiomensystem genügen. Sei also in den folgenden Abschnitten

---

* Verlangt man im zweiten Teil von M 2 lediglich, daß N einen dreiseitverbindbaren Punkt enthält, so genügen auch die euklidischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$ den Axiomen. Die minkowskischen Ebenen werden dann durch die zusätzliche Forderung ausgesondert, daß es in N unverbindbare Punkte gibt.

5. bis **12.** stets eine metrische Inzidenzstruktur I zugrundegelegt, für welche die Axiome M 1 bis M 7 gelten.

5. Existenz einer Spiegelung

Lemma 1. *Sind σ_g eine Spiegelung an einer Geraden g und α eine orthogonale Kollineation, so ist $\alpha^{-1}\sigma_g\alpha$ eine Spiegelung an der Geraden $g\alpha$.*

Der Beweis dieses Lemmas ergibt sich sofort aus den eingeführten Definitionen für eine metrische Inzidenzstruktur.

Satz 1. *An jeder Geraden gibt es mindestens eine Spiegelung.*

Beweis: Sei g eine Gerade. Nach M 1 gibt es zwei verschiedene Punkte A, B aus N mit $g \in A, B$. Nach M 3 gibt es eine Spiegelung σ_s mit $A\sigma_s = B$. Dann ist $g\sigma_s = (A,B)\sigma_s = (A\sigma_s, B\sigma_s) = (A,B) = g$, also $g \perp s$ wegen $g \neq s$ (sonst wäre $A\sigma_s = A \neq B$).

Analog gibt es zu s eine Spiegelung σ_t mit $t \perp s$. Dann ist $g, t \perp s$. Nach M 4 gibt es eine orthogonale Kollineation α mit $t\alpha = g$. Nach Lemma 1 ist dann $\alpha^{-1}\sigma_t\alpha$ eine Spiegelung an der Geraden g.

6. Lotmengen und Spiegelungen

Lemma 2. *Für einen Punkt A und eine Gerade g gilt: Aus $A\sigma_g = A$ folgt $g \in A$ oder $A \subset g^{\perp}$.*

Beweis. Sei $g \notin A$. Für x aus A ist dann $x \neq g$, und für $B := G(x,g)$ gilt $A \neq B$ und $x = (A,B)$. Wegen $B\sigma_g = B$ ist dann $x\sigma_g = x$, also $x \in g^{\perp}$. Mithin folgt $A \subset g^{\perp}$.

Folgerung. Aus $A \in N$ und $A\sigma_g = A$ folgt $g \in A$.

Lemma 3. *Aus $a \neq b$ und $a, b \in g^{\perp}$ folgt $G(a,b) \subset g^{\perp}$.*

Beweis: Nach M 7 ist $g \notin G(a,b)$ und nach Satz 1 existiert eine Spiegelung σ_g an der Geraden g. Dann gilt $G(a,b)\sigma_g = G(a\sigma_g, b\sigma_g) = G(a,b)$ und nach Lemma 2 $G(a,b) \subset g^{\perp}$.

Lemma 4. *Jede Lotmenge enthält mindestens zwei Geraden.*

Beweis: Der Beweis von Satz 1 lehrt, daß eine Lotmenge $g^{\perp}$ mindestens eine Gerade a enthält.

Wir setzen $A := G(a,g)$.

Ist A ein Lotbüschel der Geraden b, so gilt nach Lemma 3 $b \perp a, g$, und a, b sind zwei verschiedene Geraden aus $g^{\perp}$. Ist A kein Lotbüschel, also $A \in N$, so gibt es nach M 1 einen von A verschiedenen Punkt B aus N auf g und nach M 3 eine Spiegelung σ_b mit $A\sigma_b = B$. Wie im Beweis zu Satz 1 folgt $b \perp g$. Wegen $A\sigma_b = B \neq A$ ist $b \neq a$, also sind a, b zwei verschiedene Geraden aus $g^{\perp}$.

Folgerung: *Zu jeder Geraden gibt es mindestens ein Lotbüschel der Geraden.*

Lemma 5. *Ist α_a eine orthogonale Kollineation, die die Gerade a punktweise fix läßt, so hat $\alpha_a = \sigma_b$ zur Folge $a = b$. Insbesondere gilt: Aus $\sigma_a = \sigma_b$ folgt $a = b$.*

Beweis: Wir nehmen an, es wäre $a \neq b$. Dann gäbe es nach M 1 einen Punkt A aus N mit $A \neq G(a,b)$ und $a \in A$, und es gilt $A\sigma_b = A\alpha_a = A$, also nach Lemma 2, Folgerung $b \in A$ und damit $A = G(a,b)$, im Widerspruch zur Wahl von A.

7. Freie Beweglichkeit

Satz 2. *Je zwei Punkte aus N sind ineinander beweglich.*

Beweis: Nach M 3 gilt

(i) *Gibt es zu X, Y aus N einen „Streckenzug" von X nach Y, also Punkte $A_1, \ldots, A_n$ aus N und Geraden $a_1, \ldots, a_n$ mit $a_1 \in X, A_1$, $a_i \in A_{i-1}, A_i$ für $i = 2, \ldots, n-1$, und $a_{n+1} \in A_n$, so ist X in Y beweglich.*

Sei nun zunächst A ein dreiseitverbindbarer Punkt und B ein beliebiger Punkt. Dann wählen wir unter Verwendung von M 1 nacheinander ein b aus B, auf b einen von A verschiedenen Punkt C aus N, aus C eine von b verschiedene Gerade c, auf c einen von C verschiedenen Punkt D aus N. Ist A mit B oder mit C oder mit D verbindbar, so ist nach (i) A in B beweglich. Ist aber A mit B, C, D unverbindbar, so sind B, D wegen der Dreiseitverbindbarkeit von A unverbindbar, und A ist nach M 5 in B beweglich.

Seien nun A, B beliebige Punkte aus N. Dann gibt es nach M 2 einen dreiseitverbindbaren Punkt C aus N. Nach dem eben Bewiesenen ist A in C und C in B beweglich, also A in B beweglich.

Lemma 6. *Jeder Punkt ist dreiseitverbindbar.*

Beweis: Nach M 2 existiert ein dreiseitverbindbarer Punkt aus N, mithin sind nach Satz 2 alle Punkte aus N dreiseitverbindbar. Da nach M 2 auch alle Lotbüschel dreiseitverbindbar sind, gilt Lemma 6.

Lemma 7. *Es gibt kein Polardreiseit.*

Beweis: Gäbe es ein Polardreiseit, so wäre die metrische Inzidenzstruktur I nach M 1, Lemma 6, M 7, M 3, M 4, M 6 eine hyperbolisch-metrische Ebene im Sinne von [4], und nach [4], Satz 6 wären je zwei Punkte aus N verbindbar, was M 2 widerspricht.

Lemma 8. *N ist die Menge der Orthogonalenschnitte.*

Beweis: a) Sei $G(a,b)$ ein Orthogonalenschnitt. Wäre $G(a,b) \notin N$, so gäbe es g, u, v mit $u \neq v$ und $u, v \in G(a,b)$, $g^{\perp}$, also wäre nach Lemma 3 $G(a,b) \subset g^{\perp}$, und damit a, b, g ein Polardreiseit, im Widerspruch zu Lemma 7. Also ist $G(a,b) \in N$.

b) Sei $A \in N$. Wir wählen eine Gerade a aus A. Dann gibt es nach Lemma 4 ein b mit $b \in a^{\perp}$, und wir haben die Schlußkette: Nach a) ist $G(a,b) \in N \Rightarrow$ es existiert nach M 3 ein s mit $A\sigma_s = G(a,b) \Rightarrow b\sigma_s \in a^{\perp}, A \Rightarrow A = G(a, b\sigma_s)$ und $a \perp b\sigma_s \Rightarrow A$ ist ein Orthogonalenschnitt.

Folgerung: *Auf jeder Geraden läßt sich in jedem Punkt aus N eine Senkrechte errichten.*

8. Lotbüschel

Satz 3. *Für jede Gerade g ist $g^{\perp}$ ein Punkt.*

Beweis: Nach Lemma 4 enthält $g^{\perp}$ mindestens zwei Geraden a, b, und nach Lemma 3 ist $G(a,b) \subset g^{\perp}$.

Wir zeigen umgekehrt: Aus $c \in g^{\perp}$ folgt $c \in G(a,b)$. Wir nehmen an, es wäre $(a,b,c) \notin \varkappa$. Es gilt nach Lemma 7:

(i) *Aus* $u, v \in g^{\perp}$ *und* $u \neq v$ *folgt* $u\sigma_v \neq u, v$.

Also ist $a\sigma_b \neq a, b$ und $b\sigma_c \neq b, c$. Ferner ist $(c, a\sigma_b, b\sigma_c) \notin \varkappa$, denn sonst wäre $a\sigma_b \in G(b\sigma_c, c) = G(b, c)$ und damit $a\sigma_b, b \in G(b,c)$, $G(a,b)$ und $a\sigma_b \neq b$ und $G(b,c) \neq G(a,b)$, Widerspruch. Wir setzen $A := G(a,g)$, $B := G(c, a\sigma_b)$, $C := G(a\sigma_b, b\sigma_c)$, $D := G(b\sigma_c, c)$. Nach Lemma 6 ist A dreiseitverbindbar. Mithin ist A mit mindestens einem der drei Punkte B, C, D durch eine Gerade d verbindbar. Wegen $c, a\sigma_b, b\sigma_c \in g^{\perp}$ ist nach Lemma 3 $B, C, D \subset g^{\perp}$, also gilt $d \in g^{\perp}$. Aus $a, d \in g^{\perp}$ und $(a, g, d) \in \varkappa$ folgt $a = d$ nach M 7. Also ist $a \in B$ oder $a \in C$ oder $a \in D$. Alle drei Fälle führen auf den Widerspruch $(a,b,c) \in \varkappa$: Im letzten Fall ergibt sich dies unmittelbar wegen $D = G(b,c)$. Im zweiten Fall gilt $a, a\sigma_b \in C, G(a,b)$ und $a \neq a\sigma_b$, also $C = G(a,b)$, mithin $b, b\sigma_c \in C$, $G(b,c)$ und $b \neq b\sigma_c$, also $G(a,b) = C = G(b,c)$ und damit $(a,b,c) \in \varkappa$. Im ersten Fall endlich ist $a, c \in B, G(a,c)$ und $a \neq c$, also $B = G(a,c)$, mithin $a\sigma_b, a \in G(a,c)$, $G(a,b)$ und $a\sigma_b \neq a$, also $G(a,c) = G(a,b)$ und damit $(a,b,c) \in \varkappa$.

Somit ist unsere Annahme, es wäre $c \notin G(a,b)$ auf einen Widerspruch geführt. Also gilt $g^{\perp} \subset G(a,b)$ und damit $g^{\perp} = G(a,b)$, womit Satz 3 bewiesen ist.

Lemma 9. *Zwei verschiedene Lotbüschel sind unverbindbar.*

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe zwei verschiedene, durch eine Gerade g verbindbare Lotbüschel L, L'. Nach Satz 3 gibt es Geraden a, b mit $L = a^{\perp}$ und $L' = b^{\perp}$. Dann ist $a \neq b$ und $a, b \in g^{\perp}$. Nach Satz 1 existiert die Spiegelung an der Geraden a. Es gilt $b\sigma_a \in g^{\perp}$ und nach (i) im Beweis zu Satz 3 $b\sigma_a \neq a, b$.

Da aus $y \in g^{\perp}, x^{\perp}$ für $x \in g^{\perp}$ folgte, daß x, y, g ein Polardreiseit bilden, im Widerspruch zu Lemma 7, muß $g^{\perp}$ mit $a^{\perp}$, $b^{\perp}$, $(b\sigma_a)^{\perp}$ unverbindbar sein. Da $g^{\perp}$ nach M 2 dreiseitverbindbar ist, gilt $a^{\perp} = b^{\perp}$ oder $a^{\perp} = (b\sigma_a)^{\perp}$ oder $b^{\perp} = (b\sigma_a)^{\perp}$. Da auch das zweite auf $b^{\perp} = (b\sigma_a)^{\perp}\sigma_a = a^{\perp}\sigma_a = a^{\perp}$ und auch das dritte wegen $(b^{\perp})\sigma_a = b^{\perp}$ und $a \notin b^{\perp}$ nach Lemma 2 auf $b^{\perp} = a^{\perp}$ führte, ergibt sich in jedem Fall der Widerspruch $L = L'$. Damit ist Lemma 9 bewiesen.

Rechtseitsatz. *Aus* $a, b \perp c$ *und* $a \perp d$ *folgt* $b \perp d$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $c \in a^{\perp}, b^{\perp}$, also nach Lemma 9 $a^{\perp} = b^{\perp}$ und wegen $d \in a^{\perp}$ dann $d \in b^{\perp}$, also $b \perp d$.

9. Punktspiegelungen und Eindeutigkeit der Spiegelungen an einer Geraden

Hilfssatz. *Das Produkt zweier Spiegelungen an einer Geraden g ist entweder die Identität oder eine Spiegelung an g.*

Beweis: Seien σ_g, σ'_g Spiegelungen an g. Nach Lemma 4 gibt es ein a mit $a \perp g$. Setzen wir $A := G(a,g)$, so ist $A\sigma_g\sigma'_g = A$ und $g\sigma_g\sigma'_g = g$. Also gibt es nach M 6 nur die folgenden Möglichkeiten:

$$\sigma_g\sigma'_g = 1; \quad \sigma_g\sigma'_g = \sigma''_g; \quad \sigma_g\sigma'_g = \sigma_h; \quad \sigma_g\sigma'_g = \sigma''_g\sigma_h$$

Dabei ist $h \perp g$ und $h \in A$.

Die Fälle 1 und 2 ergeben die Behauptung; die Fälle 3 und 4 sind nicht möglich, da dann $\sigma_g\sigma'_g$ bzw. $\sigma''_g\sigma_g\sigma'_g$ orthogonale Kollineationen wären, die g punktweise festhalten, also nach Lemma 5 $g = h$ wäre, entgegen der Aussage $g \perp h$.

Lemma 10. *Für $a \perp b$ ist $\sigma_a\sigma_b$ eine involutorische Bewegung, die den Punkt $G(a,b)$ geradenweise und die Menge der Lotbüschel punktweise festläßt.*

Beweis: Zunächst überlegen wir

(i) *$\sigma_a\sigma_b$ ist involutorisch.*

Denn nach Lemma 5 ist $\sigma_a \neq \sigma_b$, also $\sigma_a\sigma_b \neq 1$. Nach Lemma 1 ist $\alpha = (\sigma_a\sigma_b\sigma_a)\sigma_b = \sigma_a(\sigma_b\sigma_a\sigma_b)$ Produkt zweier Spiegelungen an b und auch Produkt zweier Spiegelungen an a. Nach dem Hilfssatz und Lemma 5 ist $\alpha = 1$, also $\sigma_a\sigma_b = \sigma_b\sigma_a$ und $\sigma_a\sigma_b$ involutorisch.

(ii) *Aus $A\sigma_a\sigma_b = A$ und $A \in N$ folgt $A = G(a,b)$.*

Wir nehmen an, es wäre $A \neq G(a,b)$ und $A\sigma_a\sigma_b = A$ für $A \in N$.

Sind $A, G(a,b)$ durch eine Gerade s verbindbar, so ist $s\sigma_a\sigma_b = s$ wegen $G(a,b)\sigma_a\sigma_b = G(a,b)$ und $A\sigma_a\sigma_b = A$. Da A nach Lemma 8 ein Orthogonalenschnitt ist, gibt es nach M 6 nur folgende Möglichkeiten:

$$\sigma_a\sigma_b = 1; \quad \sigma_a\sigma_b = \sigma_s; \quad \sigma_a\sigma_b = \sigma_t; \quad \sigma_a\sigma_b = \sigma_s\sigma_t.$$

Dabei ist $t \perp s$ und $t \in A$. Das erste widerspricht (i). Das zweite ergibt $a\sigma_s = a\sigma_a\sigma_b = a$ und entsprechend $b\sigma_s = b$, also $a = s$ oder $b = s$ (aus $a \neq s \neq b$ folgte $a, b \perp s$, also nach M 7 $a = b$, im Widerspruch zur Voraussetzung). O.B.d.A. sei $a = s$. Dann gilt $A\sigma_b = A\sigma_a\sigma_b = A$, also nach Lemma 2, Folgerung $b \in A$ und damit $A = G(a,b)$, Widerspruch. Das dritte ergibt entsprechend wie im zweiten Fall $A = G(a,b)$, Widerspruch. Im vierten Fall ist $G(a,b)\sigma_t = G(a,b)\sigma_s\sigma_t = G(a,b)\sigma_a\sigma_b = G(a,b)$, also nach Lemma 8 und Lemma 2, Folgerung $t \in G(a,b)$, mithin wegen $s \neq t$ und $s, t \in A, G(a,b)$ dann ebenfalls $A = G(a,b)$, Widerspruch.

Seien nun $A, G(a,b)$ unverbindbar. Nach M 5 folgt aus $A\sigma_a\sigma_b = A$ und $A, G(a,b) \in N$ dann $\sigma_a\sigma_b = 1$, im Widerspruch zu (i). Unsere Annahme ist damit falsch, und (ii) bewiesen.

(iii) *Für eine Gerade* x *mit* $x \notin G(a,b)$ *ist* $x \neq x\sigma_a\sigma_b$ *und* $L = G(x, x\sigma_a\sigma_b)$ *ein Lotbüschel, welches bei* $\sigma_a\sigma_b$ *fix ist.*

Denn wäre $x = x\sigma_a\sigma_b$ für $x \notin G(a,b)$, so wäre $x \neq a, b$. Aus $x, x\sigma_a = x\sigma_b \in G(a,x), G(b,x)$ und $G(x,a) \neq G(b,x)$ folgte $x = x\sigma_a = x\sigma_b$ und damit $x \perp a, b$, also wäre $G(a,b)$ ein Lotbüschel, entgegen Lemma 8. Mithin ist $x \neq x\sigma_a\sigma_b$.

Für $L = G(x, x\sigma_a\sigma_b)$ gilt nach *(i)* $L\sigma_a\sigma_b = G(x, x\sigma_a\sigma_b)\sigma_a\sigma_b = G(x\sigma_a\sigma_b, x) = L$, also ist L fix bei $\sigma_a\sigma_b$.

Wäre $L \in N$, so wäre nach *(ii)* $L = G(a,b)$, also $x \in G(a,b)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $G(x, x\sigma_a\sigma_b)$ ein Fixpunkt von $\sigma_a\sigma_b$.

(iv) *Jedes Lotbüschel ist Fixpunkt von* $\sigma_a\sigma_b$.

Sei L ein Lotbüschel, dann existiert nach Satz 3 ein x mit $L = x^\perp$. Sei y aus L so gewählt, daß $y \notin G(a,b)$ ist (dies ist möglich, da $G(a,b) \neq L$ nach Lemma 8 ist). Nach (iii) ist $y \neq y\sigma_a\sigma_b$ und $G(y, y\sigma_a\sigma_b)$ ein Lotbüschel, also wegen $y \in L, G(y, y\sigma_a\sigma_b)$ nach Lemma 9 dann $L = G(y, y\sigma_a\sigma_b)$, und L ist fix nach (iii).

(v) *Aus* $x \in G(a,b)$ *folgt* $x\sigma_a\sigma_b = x$.

Denn nach Lemma 8, Folgerung gibt es ein y mit $y \in G(a,b), x^\perp$, und wir haben die Schlußkette: $x \in G(a,b), y^\perp \Rightarrow$ nach (iv)

$x\sigma_a\sigma_b \in y^\perp \Rightarrow x, x\sigma_a\sigma_b \in y^\perp, G(a,b)$ und $y^\perp \neq G(a,b) \Rightarrow x = x\sigma_a\sigma_b$.

Mit (i), (iv) und (v) sind alle Aussagen von Lemma 10 bewiesen. – Ist $a \perp b$, so heißt die involutorische Bewegung $\sigma_a\sigma_b$ eine *Spiegelung an dem Punkte* $G(a,b)$.

Satz 4. *An jeder Geraden existiert genau eine Spiegelung.*

Beweis: Wir brauchen nach Satz 1 nur noch die Eindeutigkeit zu beweisen.

Seien σ_g, σ'_g Spiegelungen an der Geraden g. Nach Lemma 4 gibt es Geraden a, b mit $a, b \perp g$ und $a \neq b$. Nach M 1 existiert ein A mit $A \in N$ und $b \in A$ und $g \notin A$. Nach Lemma 2, Folgerung ist $A\sigma_g, A\sigma'_g \neq A$. Aus $A\sigma_g = A\sigma'_g$ folgt $A\sigma_g\sigma'_g = A$, also nach dem Hilfssatz und Lemma 2, Folgerung $\sigma_g\sigma'_g = 1$, und damit $\sigma_g = \sigma'_g$, wie behauptet. Der Fall $A\sigma_g \neq A\sigma'_g$ ist nicht möglich, denn sonst wäre $G(a,b)$ nach Lemma 8 und Lemma 6 mit A oder mit $A\sigma_g$ oder mit $A\sigma'_g$ verbindbar, also in jedem Fall mit A durch eine Gerade s verbindbar. Nach Lemma 10 ist $s\sigma_a\sigma_g = s$ und $s\sigma_a\sigma'_g = s$, also $s\sigma_g = s\sigma_a = s\sigma'_g$ und damit $A\sigma_g = G(b,s)\sigma_g = G(b\sigma_g, s\sigma_g) = G(b\sigma'_g, s\sigma'_g) = G(b,s)\sigma'_g = A\sigma'_g$, im Widerspruch zur Annahme. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Folgerung: $\sigma_a = \sigma_b \Leftrightarrow a = b$.

10. Existenz des Lotes.

Satz 5 (Existenz des Lotes). *Zu jedem Punkt A aus N und jeder Geraden g existiert ein Lot von A auf g*

Beweis: Wir nehmen an, es seien $A, g^\perp$ unverbindbar. Wir wählen dann eine Gerade a aus A, eine Gerade h aus $g^\perp$ und eine Gerade b aus $a^\perp$ (dies ist nach Lemma 4 möglich). Da $g^\perp$ mit $b^\perp$ nach Lemma 9 unverbindbar ist, gilt $G(a,h) \neq b^\perp$. Da $a \in b^\perp$ und a nach Lemma 10 in keinem von $b^\perp$ verschiedenen Lotbüschel enthalten ist, gilt $G(a,h) \in N$. Also existiert nach Lemma 8, Folgerung ein s mit $s \in G(a,h), h^\perp$. Nach Lemma 10 gilt $a\sigma_s\sigma_h = a$, also $a \in A\sigma_s\sigma_h$. Mit $A, g^\perp$ sind auch $A\sigma_s\sigma_g, g^\perp\sigma_s\sigma_h = g^\perp$ unverbindbar. Damit ist der dreiseitverbindbare Punkt $g^\perp$ mit den drei a enthaltenden Punkten $b^\perp, A, A\sigma_s\sigma_h$ unverbindbar.

Wegen $b^{\perp} \neq A, A\sigma_s\sigma_h$ muß dann $A\sigma_s\sigma_h = A$ gelten. Dies widerspricht (ii) aus dem Beweis von Lemma 10.

Unsere Annahme, es wären A und $g^{\perp}$ unverbindbar, ist damit auf einen Widerspruch geführt und somit Satz 5 bewiesen.

Folgerung: *Zwei Punkte aus N sind genau dann verbindbar, wenn sie ineinander spiegelbar sind.*

Denn die eine Richtung ergibt sich aus M 3; und sind A, B aus N ineinander spiegelbar durch eine Spiegelung σ_s, so existiert nach Satz 5 ein a mit $a \in A, s^{\perp}$. Damit ist $a\sigma_s = a$ und $a \in B$, also sind A, B durch a verbindbar.

11. Der Satz von den drei Spiegelungen

Sind a, b, c drei kopunktale Geraden, so gibt es eine mit a, b, c kopunktale Gerade d mit $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$.

Beweis: Wir dürfen voraussetzen, daß die Geraden a, b, c voneinander verschieden sind, denn ist $a = b$ oder $b = c$, so ist nach Satz 4 $\sigma_a = \sigma_b$ bzw. $\sigma_b = \sigma_c$, und die Behauptung gilt mit $d := c$ bzw. $d := a$. Ist aber $a = c$, so gilt nach Lemma 1 $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_{b\sigma_a}$ also mit $d := b\sigma_a$ die Behauptung.

Wir setzen nun $O := G(a,b)$.

a) Sei O ein Lotbüschel, also $O = g^{\perp}$. Wir setzen dann $A := G(a,g)$. Dann ist $g \in A\sigma_a\sigma_b\sigma_c$, und es gibt nach M 3 ein d mit $A\sigma_d = A\sigma_a\sigma_b\sigma_c$. Ist $A = A\sigma_a\sigma_b\sigma_c$, so können wir für d die Gerade a wählen. Ist $A \neq A\sigma_a\sigma_b\sigma_c$, so ist $g = (A, A\sigma_a\sigma_b\sigma_c) = (A, A\sigma_d) \perp d$, also $d \in O$. Die Behauptung des Satzes gilt, wenn wir zeigen, daß $\alpha = \sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = 1$ ist.

Sei h eine beliebige Senkrechte $\neq g$ auf a, dann ist nach dem Rechtseitsatz $g^{\perp} = h^{\perp}$. Wegen $g\alpha = g$ ist $(g^{\perp})\alpha = g^{\perp}$. Aus $a, a\alpha \in g^{\perp}, A$ und $A \neq g^{\perp}$ folgt $a\alpha = a$. Wegen $a, b, c, d \in h^{\perp}$ ist $h\alpha = h$, also $G(a,h)\alpha = G(a,h)$.

Sei $B := G(a,h)$. Nach M 6 und Satz 4 ist wegen $B\alpha = B$ und $a\alpha = a$ dann $\alpha = 1$ oder $\alpha = \sigma_a$ oder $\alpha = \sigma_h$ oder $\alpha = \sigma_a\sigma_h$.

Im letzten Fall wäre $g = g\alpha = g\sigma_a\sigma_h = g\sigma_h$, also $A\sigma_h = G(a,g)\sigma_h = G(a\sigma_h, g\sigma_h) = G(a,h) = A$, also $h \in A$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Im vorletzten Fall wäre $g = g\alpha = g\sigma_h$, also $g \perp h$, und g, h, a wären ein Polardreiseit, entgegen Lemma 7.

Im drittletzten Fall ergäbe sich $\sigma_b\sigma_c\sigma_d = 1$. Sei $C := G(c,g)$, dann gilt $C\sigma_d = C\sigma_c\sigma_d = C\sigma_b = (C\sigma_d)\sigma_c$, also nach Lemma 2, Folgerung $c \in C\sigma_d$. Also haben wir $c,g \in C, C\sigma_d$ und $c \neq g$, also $C = C\sigma_d$, und damit nach Lemma 2, Folgerung $d \in C$. Aus $c,d \in g^\perp$ und $c,d,g \in C$ folgt nach M 7 dann $c = d$, also nach Satz 4, Folgerung $\sigma_c = \sigma_d$ und damit $\sigma_b = \sigma_d\sigma_c = 1$, was nicht geht.

Also bleibt nur der Fall $\alpha = 1$ übrig, wie behauptet.

b) Sei $O \in N$. Nach M 2 und Satz 2 ist O ein dreiseitverbindbarer Punkt, und es existiert ein mit O unverbindbarer Punkt A aus N. Wir zeigen zunächst:

(i) Für $x,y \in O$ und $x \neq y$ sind $A, A\sigma_x\sigma_y$ unverbindbar.

Wären $A, A\sigma_x\sigma_y$ verbindbar, so wären nach Satz 5, Folgerung $A, A\sigma_x$, $A\sigma_x\sigma_y$ drei paarweise verbindbare und auch voneinander verschiedene Punkte: Aus $A = A\sigma_x$ folgte $x \in O, A$, Widerspruch; aus $A\sigma_x = A\sigma_x\sigma_y$ folgte $y \in O, A\sigma_x$, also $y\sigma_x \in \in O, A$, Widerspruch; aus $A = A\sigma_x\sigma_y$ folgte $x,y \in O, (A, A\sigma_x)^\perp$ und $O \neq (A, A\sigma_x)^\perp$, also $x = y$, Widerspruch. Da O mit $A, A\sigma_x$, $A\sigma_x\sigma_y$ unverbindbar ist, ist dies ein Widerspruch zur Dreiseitverbindbarkeit von O. Also sind $A, A\sigma_x\sigma_y$ unverbindbar.

Wir setzen nun $B := A\sigma_a\sigma_b\sigma_c$.

Sind A, B durch eine Gerade verbindbar, so existiert nach Satz 5 das Lot d von O auf u. Es ist $A\sigma_d \neq B$, da A, A_d, B drei d enthaltende, mit dem dreiseitverbindbaren Punkt O unverbindbare Punkte sind, und da $A \neq B, A\sigma_d$ gilt: Aus $A = B$ folgte $A\sigma_a\sigma_b = A\sigma_c$, also nach Satz 5, Folgerung, daß $A, A\sigma_a\sigma_b$ verbindbar wären – im Widerspruch zu (i). Aus $A = A\sigma_d$ folgte nach Lemma 8, Folgerung $d \in A$, also $d \in O, A$, im Widerspruch zur Wahl von A.

Also gilt $A\sigma_a\sigma_b = A\sigma_d\sigma_c$, und damit nach M 5 $\sigma_a\sigma_b = \sigma_d\sigma_c$, also $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$, wie behauptet.

Der Fall, daß A, B unverbindbar sind, ist nicht möglich: Anderenfalls fälle man gemäß Satz 5 das Lot e von A auf die Verbindungsgerade s von $A\sigma_a\sigma_b$ und B. Der gleiche Schluß wie eben führt auf $(A\sigma_a\sigma_b)\sigma_e = B$, also auf $(A\sigma_a\sigma_b)\sigma_e\sigma_c = A\sigma_a\sigma_b$ und

$c, e \perp s$. Nach Lemma 8, Folgerung existiert ein r mit $r \in A\sigma_a\sigma_b$, $s^\perp$, und wir haben die Schlußkette: nach a) existiert ein t mit $\sigma_e\sigma_c = \sigma_r\sigma_t$ und $t \in s^\perp \Rightarrow (A\sigma_a\sigma_b)\sigma_e\sigma_c = (A\sigma_a\sigma_b)\sigma_r\sigma_t = (A\sigma_a\sigma_b)\sigma_t = A\sigma_a\sigma_b \Rightarrow$ nach Lemma 2, Folgerung $t \in A\sigma_a\sigma_b$ $\Rightarrow r, t \in A\sigma_a\sigma_b, s^\perp$ und $A\sigma_a\sigma_b \neq s^\perp \Rightarrow r = t \Rightarrow$ nach Satz 4, Folgerung $\sigma_r = \sigma_t \Rightarrow \sigma_c = \sigma_e \Rightarrow$ nach Lemma 5 $c = e \Rightarrow$ $c \in A, O$, Widerspruch.

Damit gilt der Satz von den drei Spiegelungen.

Umkehrung des Satzes von den drei Spiegelungen: *Aus* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$ *folgt* $(a, b, c) \in \varkappa$.

Beweis: Wie schon oben überlegt, gilt:

(i) *Aus* $U\sigma_u\sigma_v = U$ *und* $u, v \perp w$ *für* $U \in N$ *folgt* $u = v$.

Sei $\sigma_a\sigma_b = \sigma_d\sigma_c$. Wir nehmen an, es wäre $(a, b, c) \notin \varkappa$. Dann ist $a \neq b$ und $d \neq c$. Wir setzen $A := G(a, b)$ und $B := G(d, c)$.

Sind A, B Lotbüschel $s^\perp$ bzw. $t^\perp$, so ist $s \neq t$, und für $C := G(s, t)$ gilt $C \in N$ (anderenfalls wäre nach dem Rechtseitsatz $s^\perp = t^\perp$, also $A = B$) und $C\sigma_a\sigma_b = G(s\sigma_a\sigma_b, t\sigma_a\sigma_b) = G(s\sigma_a\sigma_b, t\sigma_d\sigma_c) = G(s, t) = C$. Nach (i) folgt $a =$ b, Widerspruch.

Ist einer der beiden Punkte, etwa A, ein Lötbüschel, und der andere, also B, ein Punkt aus N, so gilt $B\sigma_a\sigma_b = B\sigma_d\sigma_c = B$, also nach (i) $a = b$, Widerspruch.

Sind endlich beide Punkte A, B aus N, so erschließt man, wenn A, B durch eine Gerade s verbindbar sind, den Widerspruch wie folgt: Nach dem Satz von den drei Spiegelungen existieren Geraden t, u aus A bzw. B mit $\sigma_a\sigma_b\sigma_s = \sigma_t$ und $\sigma_s\sigma_c\sigma_d = \sigma_u$, und wir haben die Schlußkette: Es ist $\sigma_t\sigma_u = \sigma_a\sigma_b\sigma_s\sigma_s\sigma_c\sigma_d = 1 \Rightarrow \sigma_t = \sigma_u \Rightarrow$ nach Lemma 5 $t = u \Rightarrow t \in A, B \Rightarrow s, t \in A, B$ und $A \neq B \Rightarrow s = t \Rightarrow$ nach Satz 4 $\sigma_s = \sigma_t \Rightarrow \sigma_a\sigma_b = \sigma_t\sigma_s = 1 \Rightarrow a = b$, Widerspruch.

Sind aber A, B unverbindbare Punkte aus N, so ist $B\sigma_a\sigma_b = B\sigma_d\sigma_c = B$, also nach M 5 $\sigma_a\sigma_b = 1$, woraus wiederum $a = b$, also ein Widerspruch folgt.

Damit ist die Umkehrung des Satzes von den drei Spiegelungen bewiesen.

Lemma 11. *Ist* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ *involutorisch, so ist* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ *eine Geradenspiegelung.*

Beweis: Sei $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ involutorisch. Wir führen die Annahme, es wäre $(a,b,c) \notin \varkappa$ auf einen Widerspruch.

Nach Lemma 9 kann o. B. d. A. angenommen werden, daß $G(a,b) \in N$ ist. Nach Satz 5 existiert ein Lot b' von $G(a,b)$ auf c und nach dem Satz von den drei Spiegelungen ein a' mit $\sigma_a\sigma_b\sigma_{b'} = \sigma_{a'}$ und $a' \in G(a,b)$. Es ist $a' \notin G(b',c)$, denn sonst ist $a',b' \in G(a,b), G(b',c)$ und $G(a,b) \neq G(b',c)$ wegen $c \notin G(a,b)$, also $a' = b'$ und damit $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_{a'}\sigma_{b'}\sigma_c = \sigma_c$ und (a,b,c) wären nach der Umkehrung des Satzes von den drei Spiegelungen kopunktal, im Widerspruch zu unserer Annahme. Aus $a'\sigma_{b'}\sigma_c = a'\sigma_{a'}\sigma_{b'}\sigma_c = a'\sigma_a\sigma_b\sigma_c = a'\sigma_c\sigma_b\sigma_a = a'\sigma_c\sigma_{b'}\sigma_{a'} = (a'\sigma_{b'}\sigma_c)\sigma_{a'}$ folgt $a'\sigma_{b'}\sigma_c = a'$ oder $a'\sigma_{b'}\sigma_c \perp a'$. Im ersten Fall ist $G(a',b')\sigma_c = G(a',b')\sigma_{b'}\sigma_c = G(a'\sigma_{b'}\sigma_c, b'\sigma_{b'}\sigma_c) = G(a', b')$ und $G(a,b) = G(a',b')$. Nach Lemma 2, Folgerung ist $G(a',b') = c^{\perp}$, also $G(a,b) \notin N$, Widerspruch. Im zweiten Fall ist $a' \neq a'\sigma_{b'}\sigma_c$, also nach (iii) im Beweis zu Lemma 10 dann $G(a',a'\sigma_{b'}\sigma_c) \notin N$ und nach Lemma 8 $G(a',a'\sigma_{b'}\sigma_c) \in N$, Widerspruch.

Mithin gilt $(a,b,c) \in \varkappa$, und nach dem Satz von den drei Spiegelungen ist $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ eine Geradenspiegelung.

12. Die Bewegungsgruppe

Seien I eine metrische Inzidenzstruktur, die den Axiomen M 1 bis M 7 genügt, und $S(I)$ die Menge aller Spiegelungen an Geraden aus I, endlich $B(I)$ die von $S(I)$ erzeugte Gruppe und J die Menge aller Involutionen aus $B(I)$.

Für das Paar $(B(I), S(I))$ aus der Gruppe $B(I)$ und dem nur aus involutorischen Elementen bestehenden Erzeugendensystem $S(I)$ von $B(I)$ gilt Axiom S: Aus $\sigma_a \neq \sigma_b$ und $\sigma_a\sigma_b\sigma_x, \sigma_a\sigma_b\sigma_y, \sigma_a\sigma_b\sigma_z \in J$ folgt nach Lemma 11 und der Umkehrung des Satzes von den drei Spiegelungen $(a,b,x),(a,b,y),(a,b,z) \in \varkappa$, also wegen $a \neq b$ dann $x,y,z \in G(a,b)$ und somit nach dem Satz von den drei Spiegelungen $\sigma_x\sigma_y\sigma_z \in S(I)$. Also ist $(B(I), S(I))$ eine S-Gruppe. Ihre Gruppenebene $E(B(I), S(I))$ ist zu I isomorph: Die Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} G \rightarrow S(I) \\ a \mapsto \sigma_a \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus der metrischen Inzidenzstruktur I auf die metrische Inzidenzstruktur $E(B(I), S(I)) = (S(I), \varkappa', \omega')$, denn nach Satz 4 ist φ bijektiv, und nach Lemma 11 und dem Satz von den drei Spiegelungen und seiner Umkehrung gilt für Geraden a, b, c

$$(*) \qquad (a,b,c) \in \varkappa \Leftrightarrow \sigma_a \sigma_b \sigma_c \in J,$$

also haben wir: $(a,b,c) \in \varkappa \Leftrightarrow (a\varphi, b\varphi, c\varphi) \in \varkappa'$. Ferner gilt

$$(**) \qquad (a,b) \in \omega \Leftrightarrow \sigma_a \sigma_b \in J,$$

denn ist $(a,b) \in \omega$, so ist nach Lemma 10 $\sigma_a \sigma_b \in J$, und ist umgekehrt $\sigma_a \sigma_b \in J$, so gilt nach Lemma 1 $\sigma_b = \sigma_a \sigma_b \sigma_a = \sigma_{b\sigma_a}$, also nach Satz 4 $b = b\sigma_a$ und wegen $\sigma_a \sigma_b \neq 1$, also nach Satz 4 $a \neq b$ dann $(a,b) \in \omega$. Mithin haben wir auch: $(a,b) \in \omega \Leftrightarrow (a\varphi, b\varphi) \in \in \omega'$.

Wegen der Isomorphie von I zu der Gruppenebene $E(B(I), S(I))$ gilt für diese Axiom D nach Lemma 6, und Axiom L nach Lemma 4, und Axiom M nach Lemma 9 und M 2, und endlich Axiom C nach Satz 3. Nach dem Hauptsatz aus 3 ist dann $E(B(I), S(I))$ bis auf Isomorphie eine minkowskische Ebene von Charakteristik $\neq 2$, also auch I.

13. Als Hauptergebnis ist in den Abschnitten 4 bis 12 folgendes Theorem enthalten:

Theorem: *Die minkowskischen Ebenen von Charakteristik* $\neq 2$ *sind bis auf Isomorphie die sämtlichen metrischen Inzidenzstrukturen, für die die Axiome* M 1 *bis* M 7 *gelten.*

Literatur

[1] Bachmann, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin usw. 1959.

[2] Lingenberg, R.: Kennzeichnung der ternären orthogonalen Gruppen. Journ. f. d. r. u. a. Math. 209, 105–143 (1962).

[3] Lingenberg,R.: Metrische Ebenen mit dreiseitverbindbaren Punkten I, II. Math. Z. 100, 314–372 (1967).

[4] Lingenberg, R: Hyperbolisch-metrische Ebenen mit freier Beweglichkeit. Symposia Mathematica XI, 397–412 (1973).

[5] Lingenberg, R.: Grundlagen der Geometrie, Vorlesung, gehalten im SS 1972 an der Universität Karlsruhe. Als Manuskript vervielfältigt.

[6] Marasigan, J. A.: Kennzeichnung metrischer Ebenen durch Beweglichkeitsaxiome. Diss. Darmstadt 1971.

[7] Pickert, G.: Galilei- und Lorentz-Gruppen in affinen Ebenen. Math. Z. 117, 83–96 (1970).

[8] Wolff, H.: Minkowskische und absolute Geometrie I, II. Math. Ann. 171, 144–193 (1967).