BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zwerch-Assoziativität und verbandsähnliche Algebren.[1]

Von Henner Kröger in München

§ 1. Einleitung

An Ansätzen zur Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes hat es nicht gefehlt: besondere Beachtung verdienen die Untersuchungen von F. Klein-Barmen, P. Jordan und S.-I. Matsushita. In neuerer Zeit hat sich u. a. M. D. Gerhardts mit der Erforschung solcher verbandsähnlicher Algebren beschäftigt, wobei die Schrägverbände von P. Jordan wohl die bekannteste Klasse bilden. In diesem Zusammenhang sollte man auch die zahlreichen Arbeiten über Halbgruppen – besonders idempotente Halbgruppen – sehen.

Fast allen diesen Untersuchungen ist jedoch gemeinsam, daß das Assoziativgesetz

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{As}$$

für die betrachteten Verknüpfungen gefordert wird. Während die Theorie der Halbgruppen unlösbar mit der Assoziativität verbunden scheint, scheint die Verbandstheorie – insbesondere, wenn sie als geordnete Menge (mit gewissen Axiomen) interpretiert wird – weniger darauf angewiesen zu sein. Daß in dem allgemein üblichen – auf R. Dedekind zurückgehenden – Axiomensystem für Verbände das Assoziativgesetz (As) einen wesentlichen Platz einnimmt, liegt einmal in der Entwicklungsgeschichte (Verbände als Dualgruppen), zum anderen in der Einfachheit des Gesetzes und nicht zuletzt in der Bequemlichkeit, die (As) als Klammernersparungsregel liefert.

---

[1] Der Aufsatz gibt (umgearbeitet und ergänzt) einen Teil der Dissertation des Verfassers wieder. Herrn Prof. Dr. F. L. Bauer sei bei dieser Gelegenheit für Anregung und Förderung der Arbeit herzlich gedankt.

Man kann aber Axiomensysteme für Verbände angeben, bei denen das Assoziativgesetz (As) nicht in Erscheinung tritt. Besondere Bedeutung haben dabei gewisse „assoziativ-ähnliche" Gesetze. W. Felscher [57] gibt etwa ein Axiomensystem an, in dem statt (As) ein Autodistributivgesetz der Gestalt

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot (b \cdot c) \tag{AD}$$

benutzt wird (vergleiche auch M. D. Gerhardts [67]). Bei R. Padmanabhan [66] wird ein gewissermaßen zyklisches Assoziativgesetz gefordert, nämlich

$$(a \cdot b) \cdot c = (b \cdot c) \cdot a, \tag{ZA}$$

das zusammen mit der Idempotenz

$$a \cdot a = a \tag{I}$$

die Kommutativität

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{K}$$

bewirkt. Eine weitere Variante bietet das (rechtsseitige) Zwerch-Assoziativgesetz (ZWA), das folgende Gestalt hat:

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot (b \cdot c). \tag{ZWA}$$

Je nachdem, welche zusätzlichen Axiome gefordert werden, ist mal diese, mal jene Form der Assoziativität die stärkere. Es gilt etwa

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{ZA}) \Rightarrow (\mathrm{I}) + (\mathrm{As}) \Rightarrow (\mathrm{I}) + (\mathrm{ZWA}), \tag{1}$$

$$(\mathrm{K}) + (\mathrm{As}) \Leftarrow (\mathrm{K}) + (\mathrm{ZWA}). \tag{2}$$

Für (2) siehe auch A. Monteiro [55] S. 155, für (ZWA) siehe auch S. Kochen and E. Specker [65] S. 185. Keine der angeführten Implikationen ist allgemein umkehrbar.

In Abhängigkeit von dem für die Verbandsstruktur benutzten Axiomensystem kann man daher die verschiedensten verbandsähnlichen Strukturen erhalten. Von besonderem Interesse sind nun verbandsähnliche Algebren, in denen – entsprechend dem verbandstheoretischen Modell – eine Ordnungsrelation oder wenigstens eine Quasiordnung definiert werden kann; zugleich sollen diese Algebren bei Hinzunahme der Kommutativität zu Verbänden werden. Für die hier behandelte Struktur soll (ZWA) als zentrales Axiom benutzt werden. Die Rechtfertigung dieser Wahl ist einerseits durch (1), (2) gegeben. Zum anderen findet man im Zusammenhang mit der „Quantenlogik" ein interessantes Anwendungsgebiet der einzuführenden Struktur, denn jedem orthomodularen Verband kann man umkehrbar eindeutig und in natürlicher Weise einen – die Definition folgt später – Boole'schen Zwerchverband zuordnen.

§ 2. Halbstruktur

Definition 2.1: Eine Algebra $(M, \cdot)$ vom Typ $\langle 2 \rangle$ heißt genau dann Zwerchhalbgruppe – genauer rechtsseitige Zwerchhalbgruppe – wenn die Verknüpfung das Zwerch-Assoziativgesetz

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \qquad \text{(ZWA)}$$

erfüllt. Man spreche genau dann von einer idempotenten Zwerchhalbgruppe, wenn die Verknüpfung außerdem idempotent ist. Eine idempotente Zwerchhalbgruppe heißt genau dann (in natürlicher Weise) geordnet, wenn

$$a \cdot (b \cdot a) = b \cdot a \qquad \text{(NO)}$$

gilt. In Zwerchhalbgruppen werde durch

$$a \sigma b :\Leftrightarrow a = a \cdot b \qquad (1)$$

eine Relation σ definiert. –

Satz 2.2: In geordneten Zwerchhalbgruppen ist σ eine Ordnung. Es gilt

$$a \sigma b \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a. – \qquad (2)$$

Beweis:

Wegen der Idempotenz (I) ist σ reflexiv.

Mit (ZWA) folgt die Transitivität von σ folgendermaßen:

Sei $a = a \cdot b$ und $b = b \cdot c$, so folgt

$$a = a \cdot b = (a \cdot b) \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot c.$$

Mit (NO) erhält man die Antisymmetrie:

Aus $a = a \cdot b$ und $b = b \cdot a$ folgt nämlich

$$a = a \cdot b = a \cdot (b \cdot a) = b \cdot a = b.$$

Außerdem läßt sich (2) mit (NO) herleiten:

Aus $a = a \cdot b$ folgt

$$b \cdot a = b \cdot (a \cdot b) = a \cdot b. -$$

Verzichtet man auf (I) beziehungsweise (NO), so muß σ keine Ordnungsrelation sein, ist wegen (ZWA) aber transitiv. Außerdem gilt schon in Zwerchhalbgruppen

$$a \sigma b \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c). \tag{3}$$

Beweis:

Mit der Definition von σ gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c). -$$

Deshalb gilt in Zwerchhalbgruppen mit der Eigenschaft

$$(a \cdot b)\, \sigma\, b \tag{4}$$

auch das Monotoniegesetz oder Verträglichkeitsgesetz

$$a\, \sigma\, b \Rightarrow (a \cdot x)\, \sigma\, (b \cdot x). \tag{5}$$

Durch $a \cdot a := b$, $a \cdot b := b$, $b \cdot a := a$, $b \cdot b := a$ ist eine Zwerchhalbgruppe gegeben, in der (5) gilt, obwohl (4) verletzt ist. Setzt man in (Rechts-) Zwerchhalbgruppen dagegen

$$a\, \varrho\, b :\Leftrightarrow a = b \cdot a, \tag{6}$$

so muß ϱ nicht einmal eine Ordnungsrelation sein, wenn (I) und (NO) gelten.

§ 3. Vollstruktur

Wie in der Theorie der Verbände und Halbverbände sollen nun zwei Zwerchhalbgruppen $(M, \wedge)$ und $(M, \vee)$ mit gleicher Trägermenge M zu einer Algebra $(M, \wedge, \vee)$ zusammengefaßt werden. Die Verzahnung der beiden Zwerchhalbgruppen erfolgt durch Absorptionsaxiome, von denen – wegen der nicht geforderten Kommutativität von $\wedge$, $\vee$ – acht Varianten zur Auswahl stehen:

$$a \wedge (b \vee a) = a, \tag{Ab$^\wedge$}$$

$$a \vee (b \wedge a) = a, \tag{Ab$^\vee$}$$

$$(b \vee a) \wedge a = a, \tag{Ab1}$$

$$(b \wedge a) \vee a = a, \tag{Ab2}$$

$$(a \vee b) \wedge a = a, \tag{Ab3}$$

$$(a \wedge b) \vee a = a, \tag{Ab4}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a, \tag{Ab5}$$

$$a \vee (a \wedge b) = a. \tag{Ab6}$$

Um das Dualitätsprinzip der Verbandstheorie übernehmen zu können, genügt es nicht, mit jedem Axiom auch das duale zu fordern ($\wedge$ durch $\vee$ sowie $\vee$ durch $\wedge$ ausgewechselt) – das führt nur zu einem algebraischen Dualitätsbegriff – sondern man muß noch

$$a = a \wedge b \Leftrightarrow b = b \vee a \tag{7}$$

verlangen, damit auch ein ordnungstheoretischer Dualitätsbegriff zur Verfügung steht. (7) kann man aus (Ab$^\wedge$) und (Ab$^\vee$) herleiten. Umgekehrt gelte in zwei Zwerchhalbgruppen $(M, \wedge)$ und $(M, \vee)$ die Eigenschaft (4) von § 2 für $\wedge$ bzw. $\vee$. Verkettet man die beiden Algebren $(M, \wedge)$ und $(M, \vee)$ nun durch (7) zu einer Algebra $(M, \wedge, \vee)$, so erhält man dort auch die Gültigkeit von (Ab$^\wedge$) und (Ab$^\vee$). Das tatsächliche Bindeglied zwischen $(M, \wedge)$ und $(M, \vee)$ ist also (7). Trotzdem soll – um die Axiome möglichst in Gleichungen zu formulieren – nicht auf (4) von § 2 und (7) sondern auf die Absorptionsaxiome selbst zurückgegriffen werden. Demgemäß treffe man folgende Absprache:

Definition 3.1: Eine Algebra $(M, \wedge, \vee)$ heiße genau dann Zwerchverband – in H. Kröger [72] wurde stattdessen die Bezeichnung R-Schiefverband benutzt – wenn $(M, \wedge)$ sowie $(M, \vee)$ Zwerchhalbgruppen sind und die Axiome (Ab$^\wedge$) und (Ab$^\vee$) gelten. Ein Zwerchverband heiße genau dann idempotent, wenn beide Zwerchhalbgruppen idempotent sind. Ein Zwerchverband heiße geordnet, genau dann, wenn beide Zwerchhalbgruppen geordnet sind. In geordneten Zwerchverbänden setze man

$$a \leq b : \Leftrightarrow a = a \wedge b. - \tag{8}$$

Ab jetzt sollen nur noch geordnete Zwerchverbände betrachtet werden. In diesen gilt wegen ($Ab^{\wedge}$), ($Ab^{\vee}$), (7) und (8)

$$a \wedge b \leq b, \tag{9}$$

$$b \leq a \vee b. \tag{10}$$

Mit (2) von § 2 folgt nun die Gültigkeit von (Ab1) und (Ab2). Dagegen müssen (Ab3) und (Ab4) nicht gelten, sind aber in der später anzugebenden Klasse der Boole'schen Zwerchverbände erfüllt. (Ab5) und (Ab6) schließlich haben eine sehr trivialisierende Wirkung, wie man mit (7) bis (10) aus den nächsten Betrachtungen erkennt. Man beachte dazu auch den folgenden Paragraphen.

Zum Abschluß dieses Paragraphen seien noch einige Angaben zu Schrankenelementen, Infima und Suprema in geordneten Zwerchverbänden gemacht. In geordneten Zwerchverbänden gilt

$$x \leq a \text{ und } x \leq b \Rightarrow x \leq a \wedge b. \tag{11}$$

Wenn das Infimum inf (a, b) von a und b existiert, so gilt

$$\inf(a, b) \leq a \wedge b. \tag{12}$$

Als hinreichende Bedingung für die Existenz des Infimums je zweier Elemente erkennt man das Absorptionsaxiom (Ab6), denn

$$a \wedge b \leq a \Rightarrow \exists \inf(a, b) \text{ und } \inf(a, b) = a \wedge b. \tag{13}$$

Beweis:

Zu (11): $x \leq a$ und $x \leq b \Rightarrow$

$$x = x \wedge a \text{ und } x = x \wedge b \Rightarrow$$

$$x = x \wedge b = (x \wedge a) \wedge b = (x \wedge a) \wedge (a \wedge b) = x \wedge (a \wedge b),$$

also $x \leq a \wedge b$.

(12) und (13) sind nun trivial. –

Man merke jedoch, daß $a \wedge b = \inf(a, b)$ nicht notwendig auch $b \wedge a = \inf(\mathrm{a}, b)$ zur Folge hat.

Entsprechende Aussagen gelten für obere Schranken und Suprema.

§ 4. Zwerchverbände und Schrägverbände

Ein Zwerchverband ist eine Algebra $(M, \wedge, \vee)$ vom Typ $\langle 2,2\rangle$ mit folgenden Axiomen:

$$(a \wedge b) \wedge c = (a \wedge b) \wedge (b \wedge c), \tag{ZWA$^\wedge$}$$

$$(a \vee b) \vee c = (a \vee b) \vee (b \vee c), \tag{ZWA$^\vee$}$$

$$a \wedge (b \vee a) = a, \tag{Ab$^\wedge$}$$

$$a \vee (b \wedge a) = a. \tag{Ab$^\vee$}$$

Mit jeder Gleichung gilt daher auch die duale Gleichung.

Ein Schrägverband (P. Jordan [62]) ist eine Algebra $(M, \wedge, \veebar)$ vom Typ $\langle 2,2\rangle$ mit den Axiomen

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \tag{As$^\wedge$}$$

$$(a \veebar b) \veebar c = a \veebar (b \veebar c), \tag{As$^\veebar$}$$

$$a \wedge (b \veebar a) = a, \tag{1}$$

$$(a \wedge b) \veebar a = a. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) kann man schon die Idempotenz $(\mathrm{I}^\wedge)$ und $(\mathrm{I}^\veebar)$ herleiten.

In Schrägverbänden gilt mit jeder Gleichung zwar nicht notwendig die zugehörige duale, wohl aber die zugehörige dualsymmetrische Gleichung. Dies ist aber ein rein schreibtechnischer Unterschied. Setzt man

$$a \vee b := b \veebar a, \tag{3}$$

so kann man jedem Schrägverband umkehrbar eindeutig eine Algebra $(M, \wedge, \vee)$ vom Typ $\langle 2,2\rangle$ zuordnen, einen gewissermaßen konversen Schrägverband. In jedem konversen Schrägverband gelten nun die Axiome

$$(\mathrm{I}^\wedge), (\mathrm{I}^\vee), (\mathrm{As}^\wedge), (\mathrm{As}^\vee) \tag{4}$$

und als Absorptionsaxiome

$$a \wedge (a \vee b) = a, \tag{Ab5}$$

$$a \vee (a \wedge b) = a. \tag{Ab6}$$

Insbesondere gilt in konversen Schrägverbänden ein echtes (algebraisches) Dualitätsprinzip.

Bezüglich (4) beachte man die in der Einleitung genannte Beziehung (1) zwischen Assoziativität und Zwerch-Assoziativität. Unter Vernachlässigung der Absorptionsaxiome könnte man sagen, daß die Zwerchverbände eine Verallgemeinerung der konversen Schrägverbände sind. Aber gerade die Absorptionsaxiome machen beide Strukturen unvergleichbar (vgl. P. Jordan [62] S. 142).

§ 5. Beispiele

A) Sei $M \neq \emptyset$ eine durch $\leq$ geordnete Menge. Für je zwei $a, b \in M$ setze man

$$a \wedge b := \begin{cases} a \text{ falls } a \leq b \\ b \text{ sonst} \end{cases},$$

$$a \vee b := \begin{cases} a \text{ falls } b \leq a \\ b \text{ sonst} \end{cases}.$$

Mit dieser Festsetzung ist die Algebra $(M, \wedge, \vee)$ ein geordneter Zwerchverband. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

B) Sei $M \neq \emptyset$ eine durch $\leq$ geordnete Menge. Für je zwei $a, b \in M$ setze man

$$a \wedge b := \begin{cases} \inf(a, b) & \text{falls vorhanden} \\ b & \text{sonst} \end{cases},$$

$$a \vee b := \begin{cases} \sup(a, b) & \text{falls vorhanden} \\ b & \text{sonst} \end{cases}.$$

Mit dieser Festsetzung ist die Algebra $(M, \wedge, \vee)$ genau dann ein geordneter Zwerchverband, wenn für jedes Tripel (a, b, c) die folgenden beiden Bedingungen gelten:

$$\left.\begin{array}{l} \exists \inf(a, b) \\ \exists \inf(b, c) \\ \nexists \inf(\inf(a, b), \inf(b, c)) \end{array}\right\} \Rightarrow c \leq b, \tag{INF}$$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \sup(a, b) \\ \exists \sup(b, c) \\ \nexists \sup(\sup(a, b), \sup(b, c)) \end{array}\right\} \Rightarrow c \geq b. \tag{SUP}$$

Der Beweis sei dem Leser überlassen.

C) Einen dritten Typ geordneter Zwerchverbände findet man in Satz 8.3 angegeben. Dafür bedarf es aber einiger Vorbereitungen.

§ 6. Subjunktive Zwerchverbände

Definition 6.1: Ein geordneter Zwerchverband soll genau dann subjunktiver Zwerchverband heißen, wenn es zu je zwei Elementen $a, b \in M$ ein Element $a \dot{\curvearrowright} b \in M$ gibt mit der Eigenschaft

$$x \wedge a \leq b \gtrless x \leq a \dot{\curvearrowright} b. - \tag{1}$$

Wie in der Theorie der Verbände folgt sofort, daß jeder subjunktive Zwerchverband ein maximales Element 1 besitzt mit der Eigenschaft $x = x \wedge 1$ für jedes $x \in M$. Außerdem gilt

$$a \leq b \gtrless a \dot{\curvearrowright} b = 1. \tag{2}$$

Auch der Beweis der Monotonieeigenschaft

$$b \leq c \Rightarrow a \dot{\curvearrowright} b \leq a \dot{\curvearrowright} c \tag{3}$$

ergibt sich wie in der Verbandstheorie.

Die beiden Implikationen „$>$“ und „$<$“ in (1) können – wie im Fall subjunktiver Verbände – durch je eine Ungleichung (die auch zu einer Gleichung umgeschrieben werden kann) äquivalent ersetzt werden. Der Implikation „$>$“ in (1) entspricht

$$a \leq b \dot{\curvearrowright} (c \vee (a \wedge b)), \tag{1 a}$$

der Implikation „$<$“ in (1) entspricht

$$(a \dot{\curvearrowright} b) \wedge a \leq b. \tag{1 b}$$

Beweis:

Zu (1 a): Es gelte (1 a) und $a \wedge b \leq c$.
Dann ist $c = c \vee (a \wedge b)$ und daher $a \leq b \dot{\curvearrowright} c$.
Nun gelte „$>$“ in (1). Wegen (10) von § 3 gilt

$$a \wedge b \leq c \vee (a \wedge b).$$

Damit folgt (1 a).

Zu (1 b): Es gelte (1 b) und $a \leq b \dot{\curvearrowright} c$. Mit (5) von § 2 folgt

$$a \wedge b \leq (b \dot{\curvearrowright} c) \wedge b.$$

Mit (1 b) gilt dann $a \wedge b \leq c$.

Nun gelte „$<$“ in (1). Wegen $a \dot{\curvearrowright} b \leq a \dot{\curvearrowright} b$ erhält man sofort (1 b).

Den Zusammenhang zwischen (1 a) und „$>$“ von (1) findet man für Verbände in der Diplomarbeit (TU München 1971/72) von J. Weber, der Zusammenhang zwischen (1 b) und „$<$“ in (1) für Verbände ist allgemein bekannt. –

Bemerkenswerterweise ist jeder subjunktive Zwerchverband bezüglich der Ordnungsrelation $\leq$ ein Halbverband, im Fall endlicher Trägermengen also sogar ein Verband, denn

Satz 6.2: In subjunktiven Zwerchverbänden besitzen je zwei Elemente $a, b \in M$ eine gemeinsame größte untere Schranke, es gilt

$$\inf(a, b) = (a \dot{\curvearrowright} b) \wedge a. \text{ –}$$

Beweis:

Wegen (1 b) ist $(a \dot{\curvearrowright} b) \wedge a$ eine untere Schranke von b.
Mit (9) von § 3 gilt auch

$$(a \dot{\curvearrowright} b) \wedge a \leq a.$$

Je zwei Elemente a, b haben also $(a \dot{\curvearrowright} b) \wedge a$ als gemeinsame untere Schranke. Dies ist aber sogar die größte gemeinsame untere Schranke, denn aus

$$x \leq a \text{ und } x \leq b \text{ folgt } x \wedge a = x \leq b,$$

mit (1) gilt daher

$$x \leq a \dot{\curvearrowright} b,$$

mit (5) von § 2 erhält man

$$x \wedge a \leq (a \dot{\curvearrowright} b) \wedge a$$

und mit $x \leq a$ folgt schließlich

$$x \leq (a \dot{\curvearrowright} b) \wedge a. \text{ –}$$

In diesem Zusammenhang ist folgende Aussage interessant: Ein geordneter Zwerchverband vom Typ A (§ 5) ist genau dann subjunktiv, wenn zu je zwei Elementen a, b das Infimum $\inf(a, b)$ existiert und ein größtes Element 1 vorhanden ist. Und in subjunktiven Zwerchverbänden vom Typ A gilt:

$$a \mathbin{\dot{\curvearrowright}} b = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq b \\ \inf(a, b) & \text{sonst} \end{cases}.$$

§ 7. Komplementäre Zwerchverbände

$(M, \wedge, \vee)$ sei ein geordneter Zwerchverband. Gibt es in M ein größtes und ein kleinstes Element 1 und 0, so kann man den algebraischen Begriff des Komplementes wie in der Verbandstheorie einführen, muß jedoch die fehlende Kommutativität von $\wedge$, $\vee$ beachten: y heißt genau dann linksseitiges Komplement von x, wenn

$$y \wedge x = 0 \text{ und } y \vee x = 1$$

gilt. Und unter genau der gleichen Bedingung heißt x rechtsseitiges Komplement von y. Im Fall $a \leq x \leq b$ kann man auch relative Komplemente von x betrachten (vgl. § 9).

Nun liegt folgende Definition nahe:

Definition 7.1: Eine Algebra $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ vom Typ $\langle 2,2,0,0,1 \rangle$ heißt genau dann orthokomplementärer Zwerchverband, wenn $(M, \wedge, \vee)$ ein geordneter Zwerchverband ist und die folgenden Axiome gelten:

$$0 = 1', \tag{0}$$

$$x = x \wedge 1, \tag{1}$$

$$a \vee a' = 1, \tag{2}$$

$$a \wedge b = (a' \vee b')'. - \tag{3}$$

Mit der Idempotenz von $\wedge$, $\vee$ folgt aus (3) nämlich

$$a'' = a \tag{4}$$

und dann mit der Definition von $\leq$ in (7) und (8) von § 3

$$a \leq b \Rightarrow b' \leq a'. \tag{5}$$

Es scheint so, daß man für die Herleitung von (3) aus (4) und (5) jedoch wesentlich die Kommutativität benötigt. Mit (0), (4) folgt nun auch

$$a' \wedge a = 0$$

und sogar, daß a' beidseitiges Komplement von a ist.

Für die weiteren Ziele der Arbeit ist folgender Satz von Bedeutung (vgl. (1 b) von § 6):

Satz 7.2: In orthokomplementären Zwerchverbänden sind die folgenden drei Axiome paarweise äquivalent:

$$(a \vee b') \wedge b \leq a, \tag{6}$$

$$(a \wedge b') \vee b \geq a, \tag{7}$$

$$x \wedge a \leq b \asymp x \leq b \vee a'. - \tag{8}$$

Beweis:

Wegen (3), (4), (5) erhält man aus (6)

$$(a' \wedge b) \vee b' \geq a'.$$

Mit der Umbenennung der Variablen, was wegen (4) erlaubt ist, folgt (7). Ebenso gilt mit (7) auch (6).

Nun gelte

$$x \wedge a \leq b,$$

mit (5) von § 2 also

$$(x \wedge a) \vee a' \leq b \vee a'.$$

Mit (7) gilt dann aber

$$x \leq b \vee a'.$$

Daß mit (6) auch „$<$" in (8) und umgekehrt mit (8) auch (6) gilt, wurde schon in § 6 bei (1 b) gezeigt. –

Dieser Satz führt zu

Definition 7.3: Ein orthokomplementärer Zwerchverband heißt genau dann Boole'scher Zwerchverband, wenn eines der

Axiome (6), (7) oder (8) gilt. Jeder Boole'sche Zwerchverband ist insbesondere subjunktiv, wobei

$$a \mathrel{\dot{\curvearrowright}} b := b \vee a'. \text{ –}$$

Aus Satz 6.2 folgt daher

Satz 7.4: In Boole'schen Zwerchverbänden gibt es zu je zwei Elementen $a, b, \in M$ das Infimum und das Supremum, es gilt

$$\inf(a, b) = (a \vee b') \wedge b, \tag{9}$$

$$\sup(a, b) = (a \wedge b') \vee b. \text{ –} \tag{10}$$

Als – später benötigte – Orthomodularitätseigenschaft der Boole'schen Zwerchverbände gilt noch

$$a \leq b \Rightarrow (a \vee b') \wedge b = a, \tag{11}$$

$$a \leq b \Rightarrow (b \wedge a') \vee a = b. \tag{12}$$

Als weitere Analogieeigenschaft zum Begriff des Boole'schen Verbandes erkennt man

Satz 7.5: In Boole'schen Zwerchverbänden gibt es zu jedem Element a genau ein Komplement, nämlich a'. –

Beweis:

a) $a \wedge x = 0 \Rightarrow a \leq x' \Rightarrow x \leq a'.$
$a \vee x = 1 \Rightarrow a' \wedge x' = 0 \Rightarrow a' \leq x.$

Also gilt $x = a'$, wenn x rechtsseitiges Komplement von a ist.

b) $x \wedge a = 0 \Rightarrow x \leq a'.$
$x \vee a = 1 \Rightarrow x' \wedge a' = 0 \Rightarrow x' \leq a \Rightarrow a' \leq x.$

Also gilt $x = a'$, wenn x linksseitiges Komplement von a ist. –

Eine Unterscheidung zwischen „linksseitig" und „rechtsseitig" tritt in Boole'schen Zwerchverbänden erst bei echt relativen Komplementen auf (vgl. § 9).

§ 8. Boole'sche Zwerchverbände und orthomodulare Verbände

In diesem Abschnitt wird nicht nur eine Konstruktionsmöglichkeit für nicht-kommutative Boole'sche Zwerchverbände angegeben, sondern auch eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Boole'schen Zwerchverbänden und orthomodularen Verbänden aufgezeigt.

Definition 8.1: Eine Algebra $(M, \sqcap, \sqcup, 0, 1, {}')$ vom Typ $\langle 2,2,0,0,1 \rangle$ heißt genau dann orthomodularer Verband, wenn $(M, \sqcap, \sqcup)$ ein Verband ist und folgende Axiome gelten:

$$0 = 1', \tag{0}$$

$$x = x \sqcap 1, \tag{1}$$

$$a \sqcup a' = 1, \tag{2}$$

$$a \sqcap b = (a' \sqcup b')', \tag{3}$$

$$a = a \sqcap b \Rightarrow a \sqcup (a' \sqcap b) = b. - \tag{4}$$

G. Rose [64] zeigte, daß (4) durch die Bedingung

Zu keinem Element x gibt es ein Komplement $\bar{x} \neq x'$, das mit dem Orthokomplement x' von x bezüglich der Verbandsordnung echt vergleichbar ist. (4′)

äquivalent ersetzt werden kann.

Die erste Verbindung zwischen Boole'schen Zwerchverbänden und orthomodularen Verbänden liefert nun

Satz 8.2: Sei $(M, \wedge, \vee, 0, 1, {}')$ ein Boole'scher Zwerchverband mit zugehöriger Ordnung $\leq$ (vgl. (8) von § 3). Dann ist $(M, \leq)$ ein Verband mit

$$a \sqcap b := (a \vee b') \wedge b \tag{5}$$

als Infimum von a, b und

$$a \sqcup b := (a \wedge b') \vee b \tag{6}$$

als Supremum von a, b. Die so definierte Algebra $(M, \sqcap, \sqcup, 0, 1, {}')$ ist ein orthomodularer Verband. –

Beweis:

Mit Satz 7.4 folgt, daß $(M, \sqcap, \sqcup)$ ein Verband ist. Dabei gilt

$$a = a \wedge b \asymp a = a \sqcap b.$$

Wegen der Idempotenz von $\wedge, \vee$ ist der Verband sogar orthokomplementär.

Es bleibt noch der Nachweis von (4').

Aus $a \sqcap x = 0$ und $a \sqcup x = 1$ folgt mit (5) und (6)

$$(a \vee x') \wedge x = 0,$$

$$(a \wedge x') \vee x = 1.$$

Mit der Zwerch-Assoziativität gilt weiter

$$(a \vee x') \vee x = (a \vee x') \vee (x' \vee x) = (a \vee x') \vee 1 = 1$$

und entsprechend

$$(a \wedge x') \wedge x = 0.$$

Mit Satz 7.5 folgt nun aus der Eindeutigkeit des Komplementes in Boole'schen Zwerchverbänden

$$x = a' \wedge x \text{ sowie } x = a' \vee x.$$

Ist nun $x \leq a'$, so ist mit $a' = a' \vee x$ auch $a' = x$.
Ist nun $x \geq a'$, so ist mit $a' = a' \wedge x$ auch $a' = x$.

Damit ist der Beweis erbracht. –

Umgekehrt setze man in orthomodularen Verbänden in Analogie zu (5) und (6) – vgl. auch E. Richter [64] und J. Kotas [67] –

$$a \mathbin{\dot\wedge} b := (a \sqcup b') \sqcap b, \tag{7}$$

$$a \mathbin{\underset{\cdot}{\vee}} b := (a \sqcap b') \sqcup b. \tag{8}$$

Dann gilt

Satz 8.3: Die so definierte Algebra $(M, \dot\wedge, \underset{\cdot}{\vee}, 0, 1, ')$ ist ein Boole'scher Zwerchverband. –

Beweis:

Die Operationen $\dot\wedge, \underset{\cdot}{\vee}$ sind idempotent.

Zwerch-Assoziativgesetz:

$$(a \dot{\wedge} b) \dot{\wedge} (b \dot{\wedge} c) =$$

$$\big(((a \sqcup b') \sqcap b) \sqcup (b' \sqcap c) \sqcup c'\big) \sqcap (b \sqcup c') \sqcap c =$$

$$\big(((a \sqcup b') \sqcap b) \sqcup c'\big) \sqcap c = (a \dot{\wedge} b) \dot{\wedge} c,$$

da $((a \sqcup b') \sqcap b) \sqcup c' \leq b \sqcup c'$.

Entsprechend zeigt man die duale Aussage.

Ordnungsaxiom:

$$a \dot{\wedge} (b \dot{\wedge} a) = (a \sqcup (b' \sqcap a) \sqcup a') \sqcap (b \dot{\wedge} a) = b \dot{\wedge} a.$$

Entsprechend zeigt man die duale Aussage.

Absorptionsaxiom:

$$a \dot{\wedge} (b \underset{\cdot}{\vee} a) = \big(a \sqcup ((b' \sqcup a) \sqcap a')\big) \sqcap \big((b \sqcap a') \sqcup a\big) = a.$$

Entsprechend zeigt man die duale Aussage.

Die Axiome (0) bis (3) von § 7 prüft man leicht nach.

Nun ist (7) von § 7 zu zeigen beziehungsweise statt dessen

$$a = a \dot{\wedge} \big((a \dot{\wedge} b') \underset{\cdot}{\vee} b\big).$$

$$a \dot{\wedge} \big((a \dot{\wedge} b') \underset{\cdot}{\vee} b\big) =$$

$$\big(a \sqcup (((a' \sqcap b') \sqcup b) \sqcap b')\big) \sqcap \big(((a \sqcup b) \sqcap b') \sqcup b\big) =$$

$$\big(a \sqcup (a' \sqcap b')\big) \sqcap (a \sqcup b) = a. -$$

Auch bei der durch (7) und (8) bestimmten Transformation überträgt sich die Ordnungsrelation der alten Struktur auf die neue Struktur, denn

Satz 8.4: Mit den Voraussetzungen von Satz 8.3 gilt

$$a = a \sqcap b \Leftrightarrow a = a \dot{\wedge} b. -$$

Beweis:

Man sieht, daß in (4) sogar die Äquivalenz gilt. Damit erhält man aber

$$a = a \sqcap b \gtrless b = b \sqcup a \gtrless b' = b' \sqcap a' \gtrless$$
$$a' = (a' \sqcap b) \sqcup b' \gtrless a = (a \sqcup b') \sqcap b \gtrless a = a \dot\wedge b. –$$

Nun bleibt noch zu zeigen

Satz 8.5: Zu jedem orthomodularen Verband gibt es einen Boole'schen Zwerchverband, aus dem man den orthomodularen Verband durch (5) und (6) herleiten kann. Und umgekehrt gibt es zu jedem Boole'schen Zwerchverband einen orthomodularen Verband, aus dem man den Boole'schen Zwerchverband durch (7) und (8) herleiten kann. Die Transformationen (5), (6) einerseits und (7), (8) andererseits sind zueinander invers. –

Beweis:

a) Ist $(M, \sqcap, \sqcup, 0, 1, ')$ ein orthomodularer Verband, so gibt es dazu nach Satz 8.3 einen Boole'schen Zwerchverband $(M, \dot\wedge, \dot\vee, 0, 1, ')$ und zu diesem gibt es nach Satz 8.2 einen orthomodularen Verband $(M, \dot\sqcap, \dot\sqcup, 0, 1, ')$.

Alle drei Algebren stimmen bezüglich Trägermenge, Ordnungsrelation und der Operationen $0, 1, '$ überein. Demnach müssen auch $\sqcap, \sqcup$ mit $\dot\sqcap, \dot\sqcup$ übereinstimmen.

b) Sei nun $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ ein Boole'scher Zwerchverband. Zu diesem konstruiert man wieder nach Satz 8.2 einen orthomodularen Verband $(M, \sqcap, \sqcup, 0, 1, ')$. Und zu diesem konstruiert man nach Satz 8.3 einen Boole'schen Zwerchverband $(M, \dot\wedge, \dot\vee, 0, 1, ')$.

Alle drei Algebren stimmen bezüglich Trägermenge, Ordnungsrelation und der Operationen $0, 1, '$ überein. Außerdem gilt

$$a \dot\wedge b = (a \sqcup b') \sqcap b = (((a \wedge b) \vee b') \vee b') \wedge b = ((a \wedge b) \vee b') \wedge b$$

wegen (10) von § 3 und (8) und (7) von § 3.

Mit (9) von § 3 und (11) von § 7 folgt weiter

$$((a \wedge b) \vee b') \wedge b = a \wedge b,$$

das heißt aber

$$a \dot\wedge b = a \wedge b.$$

Da in beiden Boole'schen Zwerchverbänden die Operation $'$ dieselbe ist, folgt mit (3) von § 7 auch

$$a \veebar b = a \vee b.$$

c) Damit ist sogar eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Boole'schen Zwerchverbänden und orthomodularen Verbänden gefunden. –

§ 9. Relative Komplemente

Sei $(M, \wedge, \vee)$ ein geordneter Zwerchverband und außerdem $a \leq x \leq b$. Dann soll y genau dann rechtsseitiges relatives Komplement von x bezüglich des Intervalles $|\, a, b \,|$ heißen, wenn

$$x \wedge y = a \quad \text{und} \quad x \vee y = b.$$

Entsprechend heiße y genau dann linksseitiges relatives Komplement von x bezüglich $|\, a, b \,|$, wenn

$$y \wedge x = a \quad \text{und} \quad y \vee x = b.$$

Wegen (9) und (10) von § 3 ist jedes rechtsseitige relative Komplement von x bezüglich $|a, b|$ ebenfalls ein Element des Intervalles $|a, b|$. Für linksseitige relative Komplemente muß das nicht gelten. Die weiteren Untersuchungen seien auf Boole'sche Zwerchverbände beschränkt.

Satz 9.1: Sei $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ ein Boole'scher Zwerchverband. Sei $a \leq b$ und $I := \{x : a \leq x \leq b, \in M\}$. Für $x \in I$ sei

$$\bar{x} := a \vee (x' \wedge b).$$

Dann ist $(I, \wedge, \vee, a, b, \bar{\ })$ ebenfalls ein Boole'scher Zwerchverband. –

Beweis:

Sei $(M, \sqcap, \sqcup, 0, 1, ')$ der zu $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ gehörige orthomodulare Verband. Dann ist $(I, \sqcap, \sqcup, a, b, \bar{\ })$ ein orthomodularer Verband. Es gilt für $x \in I$

$$a \sqcup (x' \sqcap b) = (a \sqcup x') \sqcap b = \bar{x}.$$

Sei $(I, \barwedge, \veebar, a, b, ^-)$ der zu $(I, \sqcap, \sqcup, a, b, ^-)$ gehörige Boole'sche Zwerchverband (nur hier in diesem Beweis wird $\barwedge$, $\veebar$ in diesem Sinne benutzt). Nun gilt für $x, y \in I$

a) $x \veebar y = (x \sqcap \bar{y}) \sqcup y = (x \sqcap (a \sqcup y') \sqcap b) \sqcup y =$

$(x \sqcap (a \sqcup y')) \sqcup y \geq (x \sqcap y') \sqcup y = x \vee y.$

b) $x \vee \bar{y} = (x \sqcap \bar{y}') \sqcup \bar{y} = (x \sqcap a' \sqcap (y \sqcup b')) \sqcup a \sqcup (y' \sqcap b) =$

$(x \sqcap (y \sqcup b')) \sqcup (y' \sqcap b) \geq (x \sqcap y) \sqcup (y' \sqcap b) =$

$(x \sqcap y) \sqcup a \sqcup (y' \sqcap b) = (x \sqcap \bar{\bar{y}}) \sqcup \bar{y} = x \veebar \bar{y}.$

Ebenso zeigt man

$$x \barwedge y \leq x \wedge y \quad \text{und} \quad x \wedge \bar{y} \leq x \barwedge \bar{y}.$$

Da die Orthokomplementbildung $x \rightarrow \bar{x}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von I auf I ist, folgt

$$x \wedge y = x \barwedge y \quad \text{und} \quad x \vee y = x \veebar y$$

und so die Behauptung des Satzes. –

Wegen Satz 7.5 existiert folglich in $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ zu jedem $x \in I$ bezüglich I genau ein rechtsseitiges relatives Komplement, dies stimmt mit $\bar{x}$ überein und ist auch ein linksseitiges relatives Komplement von $x \in I$ bezüglich I. Die nichtrechtsseitigen relativen Komplemente – und es kann solche geben – sind dagegen extrem ausgeartet:

Satz 9.2: Es mögen die Voraussetzungen von Satz 9.1 gelten. Dann ist ein linksseitiges relatives Komplement y von $x \in I$ bezüglich I genau dann auch ein rechtsseitiges relatives Komplement von $x \in I$ bezüglich I, wenn $y \in I$ gilt. –

Beweis:

Ist y rechtsseitig, so wurde oben schon gezeigt, daß dann $y \in I$. Sei nun $y \in I$ und y sei linksseitig. Dann muß nach dem Beweis zu Satz 9.1 y das Komplement von x in $(I, \wedge, \vee, a, b, ^-)$ sein, wegen Satz 7.5, ist also auch rechtsseitig. –

Daß es durchaus mehrere linksseitige relative Komplemente von $x \in I$ bezüglich I geben kann, stellt man schon in den einfachsten Boole'schen Zwerchverbänden fest. Schließt man die ausgearteten linksseitigen relativen Komplemente vom Komplementbegriff aus – indem man etwa fordert, daß relative Komplemente in dem bezogenen Intervall liegen müssen – so stellt das rechtsseitige relative Komplement, dessen Existenz, Eindeutigkeit und Beidseitigkeit oben gezeigt wurde, das relative Komplement schlechthin dar.

Die linksseitigen relativen Komplemente bieten jedoch eine schöne Möglichkeit, die Boole'schen Zwerchverbände noch weiter zu klassifizieren.

Fall A: Keine zusätzlichen Bedingungen.

Fall B: Es gibt kein Intervall I und kein $x \in I$ derart, daß x zwei (verschiedene) miteinander vergleichbare linksseitige relative Komplemente bezüglich I hat. (Echt unvergleichbare linksseitige relative Komplemente.)

Fall C: Es gibt kein Intervall I und kein $x \in I$ derart, daß x zwei verschiedene linksseitige relative Komplemente bezüglich I hat.
(Eindeutig bestimmte linksseitige relative Komplemente.)

Sei $(M, \sqcap, \sqcap, 0, 1, ')$ der zum Boole'schen Zwerchverband $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ gehörige orthomodulare Verband und $x \in M$. Es gilt genau dann für ein $y \in M$

$$y \wedge x = a \quad \text{und} \quad y \vee x = b,$$

wenn für dasselbe y

$$y \sqcap x' = b \sqcap x' \quad \text{und} \quad y \sqcup x' = a \sqcup x'$$

gilt. Umgekehrt gilt genau dann für ein $y \in M$

$$y \sqcap x = a \quad \text{und} \quad y \sqcup x = b,$$

wenn für dasselbe y

$$y \wedge x' = b \wedge x' \quad \text{und} \quad y \vee x' = a \vee x'$$

gilt. Von den linksseitigen relativen Komplementen der Schiefstruktur kann man also auf die relativen Komplemente der zugehörigen kommutativen Struktur schließen und umgekehrt:

In $(M, \sqcap, \sqcup, 0, 1, ')$ sind die relativen Komplemente genau dann eindeutig bestimmt beziehungsweise genau dann echt unvergleichbar, wenn die linksseitigen relativen Komplemente in $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ eindeutig bestimmt beziehungsweise echt unvergleichbar sind. Demgemäß gilt

Satz 9.3: Sei $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ ein Boole'scher Zwerchverband mit zugehörigem orthomodularen Verband $(M, \sqcap, \sqcup, 0, 1, ')$. Dann ist $(M, \sqcap, \sqcup, 0, 1, ')$ genau dann modular, wenn gilt

$$\left.\begin{array}{l} y \leq z \\ y \wedge x = z \wedge x \\ y \vee x = z \vee x \end{array}\right\} \Rightarrow y = z. \tag{1}$$

$(M, \sqcap, \sqcup, 0, 1, ')$ ist genau dann distributiv – also sogar ein Boole'scher Verband, der dann mit $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ identisch ist – wenn gilt

$$\left.\begin{array}{l} y \wedge x = z \wedge x \\ y \vee x = z \vee x \end{array}\right\} \Rightarrow y = z. – \tag{2}$$

Man kann (1) und (2) als spezielle Kürzungsregeln ansehen, die mit (5) von § 2 in enger Verbindung stehen.

§ 10. Vertauschbarkeit von Elementen

Definition 10.1: In orthokomplementären Verbänden setze man

$$aCb :\Leftrightarrow a = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap b'). – \tag{1}$$

Diese Relation C erhält ihre wirkliche Bedeutung erst in orthomodularen Verbänden, denn dort gilt aCb genau dann, wenn der von a, b, a', b' erzeugte Teilverband ein Boole'scher Verband ist. Insbesondere gilt in orthomodularen Verbänden – und das ist ein Charakteristikum von ihnen (vgl. M. Nakamura [57]) –

$$aCb \Leftrightarrow bCa. \tag{2}$$

Satz 10.2: In orthomodularen Verbänden gilt (vgl. C. Piron [64]):

$$aCb \Leftrightarrow (a \sqcup b') \sqcap b \leq a. – \tag{3}$$

Beweis:

„$<$“: Es gilt offenbar

$$(a \sqcup b') \sqcap b \leq a \gtrless (a \sqcup b') \sqcap b = a \sqcap b.$$

Mit $b = ((a \sqcup b') \sqcap b) \sqcup (a' \sqcap b)$ erhält man aus der rechten Seite dieser Äquivalenz

$$b = (a \sqcap b) \sqcup (a' \sqcap b).$$

Also gilt $b\,C\,a$ und wegen (2) auch $a\,C\,b$.

„$>$“: Aus der Bemerkung nach Definition 10.1 folgt

$$a\,C\,b \Rightarrow (a \sqcup b') \sqcap b = a \sqcap b \Rightarrow (a \sqcup b') \sqcap b \leq a. -$$

Man kann die Relation C in den Boole'schen Zwerchverband $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$, der zu dem jeweils betrachteten orthomodularen Verband gehört, übernehmen. Wegen (3) gilt dort (vgl. E. Richter [64])

$$a\,C\,b \gtrless a \wedge b \leq a, \tag{4}$$

wegen (13) von § 3 gilt weiter

$$a\,C\,b \gtrless a \wedge b = a \sqcap b, \tag{5}$$

wegen der Symmetrie (2) der Relation C gilt sogar

$$a\,C\,b \gtrless a \wedge b = b \wedge a. \tag{6}$$

Ersetzt man auf der rechten Seite der Äquivalenzen (4) bis (6) die Zeichen $\wedge$, $\leq$, $\sqcap$ durch $\vee$, $\geq$, $\sqcup$, so erhält man wieder gültige Äquivalenzen, nämlich die zu (4) bis (6) gewissermaßen dualen Äquivalenzen, da auch

$$a\,C\,b \gtrless a\,C\,b' \tag{7}$$

gilt.

Die Relation C – in orthomodularen Verbänden zur Kennzeichnung Boole'scher Teilverbände benutzt – kennzeichnet in Boole'schen Zwerchverbänden die Vertauschbarkeit der Argumente bezüglich der Operationen $\wedge$, $\vee$. Eben diese Eigenart legt es nahe, die Relation C in Boole'schen Zwerchverbänden – unabhängig von den orthomodularen Verbänden – durch (6) zu definieren. So kann man den Begriff der Vertauschbarkeit sogar für geordnete Zwerchverbände einführen, muß dabei jedoch eine $\wedge$-Vertauschbarkeit und eine $\vee$-Vertauschbarkeit unterscheiden; in Boole'schen Zwerchverbänden fallen beide Begriffe zusammen.

Abschließend seien die Voraussetzungen von Satz 9.1 gegeben. Dann kann man für $x, y \in I$ sowohl eine Vertauschbarkeit C_I bezogen auf $(I, \wedge, \vee, a, b, {}^-)$ als auch eine Vertauschbarkeit C_M bezogen auf $(M, \wedge, \vee, 0, 1, {}')$ betrachten – sieht aber mit (5) oder (6) sofort, daß für $x, y \in I$

$$x C_I y \asymp x C_M y$$

gilt.

§ 11. Quantenlogik und Boole'sche Zwerchverbände

Bei geeigneter Interpretation des orthomodularen Verbandes $(M, \sqcap, \sqcup, 0, 1, {}')$ und seiner Trägermenge M kann man die Operation $\curlywedge$ mit $a \curlywedge b := (a \sqcup b') \sqcap b$ als Projektion von a in b interpretieren.

C. Piron [64] zeigte, daß die Logik der Quantenmechanik über den Begriff des Hilbertraumes durch orthomodulare Verbände dargestellt werden kann, indem

den Aussagen	die vollständigen Teilräume
dem logischen „und"	der mengentheoretische Durchschnitt
der Negation	die Orthokomplementbildung

entsprechen.

Dieser Darstellung kann man nun eine Interpretation durch Boole'sche Zwerchverbände gegenüberstellen, wobei

den Aussagen	die vollständigen Teilräume
dem logischen „und"	die Projektion eines Teilraumes in den anderen
der Negation	die Orthokomplementbildung

– wieder auf den Hilbertraum bezogen – entsprechen.

Bei dieser Interpretation verliert man zwar die Kommutativität von $\sqcap$, $\sqcup$. Aber man erhält durch $\wedge$, $\vee$ eine bessere Anpassung an den physikalischen Begriff der Vertauschbarkeit von Aussagen, denn

$$a \wedge b = b \wedge a \asymp aCb \asymp a \wedge b = a \sqcap b,$$
$$a \vee b = b \vee a \asymp aCb \asymp a \vee b = a \sqcup b.$$

Die Operationen $\wedge$, $\vee$ kann man in gewissem Sinn als „zeitabhängiges und" beziehungsweise als „zeitabhängiges oder" ansehen: bei $a \wedge b$ wird zunächst der Wert von a verarbeitet – wobei der Wert von b eventuell gestört wird – dann wird der Wert von b verarbeitet – wobei der Wert von a eventuell gestört wird, was für die Auswertung von $a \wedge b$ aber ohne Einfluß ist sondern nur bei nochmaliger Benutzung von a Bedeutung hat – anschließend wird der Wert von $a \wedge b$ angegeben. Hierbei hat die Reihenfolge der Argumente im inkommensurablen Fall wesentliche Bedeutung. Nur im kommensurablen Fall ist eine gleichzeitige und gegenseitig störungsfreie Verarbeitung der Argumente denkbar. Dabei bedeutet eine Störung in einem Argument nicht, daß sich die zugehörige Aussage ändert, sondern daß sich der Wahrheitswert dieser Aussage ändert. Das entspricht etwa dem Prinzip der „beschränkten Verfügbarkeit" bei P. Mittelstaedt [68] (vgl. dort S. 182/3). Eine verwandte zeitliche Interpretation von $\wedge$ findet man im Abschnitt B der Arbeit von E. Richter [64]. Bemerkenswert ist hierzu auch die Arbeit von G. H. v. Wright [65].

Entsprechend kann man $a \vee b$ zeitlich interpretieren. Dabei geben (4) von § 10 und die zugehörige duale Äquivalenz ein Anzeichen dafür, daß statt des Boole'schen Zwerchverbandes $(M, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ die Algebra $(M, \wedge, \veebar, 0, 1, ')$ mit

$$x \veebar y := y \vee x \tag{1}$$

(vgl. § 4) einer zeitlichen Interpretation besser angepaßt ist, oder aber bei $a \vee b$ zunächst der Wert von b und dann der Wert von a verarbeitet wird.

Die Quantenlogik muß als Spezialfall die klassische Aussagenlogik enthalten. Da jeder kommutative (Boole'sche) Zwerchverband ein (Boole'scher) Verband ist und umgekehrt jeder (Boole'sche) Verband als kommutativer (Boole'scher) Zwerchverband interpretiert werden kann, ist diese Forderung für das vorgeschlagene Modell erfüllt. Es unterscheidet sich von dem Modell von C. Piron [64] nur auf „inkommensurablen Bereichen“. Betrachtet man das Modell der orthomodularen Verbände als zutreffend, so kann man unter den Axiomen der Boole’schen Zwerchverbände höchstens gegen das Subjunktionsaxiom

$$x \wedge a \leq b \asymp x \leq b \vee a'$$

Einspruch erheben, denn alle anderen Axiome gelten auch in orthomodularen Verbänden, wenn man für die Zwerchverbandsoperationen $\wedge$, $\vee$ formal die Verbandsoperationen $\sqcap$, $\sqcup$ einsetzt.

Es stellt sich daher die Frage, ob man die Abschwächung der Kommutativität zu

$$a \cdot (b \cdot a) = b \cdot a \qquad \text{(NO)}$$

sowie die Abschwächung der Assoziativität zu

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \qquad \text{(ZWA)}$$

für das quantenlogische „und“ und für das quantenlogische „oder“ von der Physik her rechtfertigen und dann das Subjunktionsaxiom retten kann – wobei eventuell Transformationen vom Typ (1) durchzuführen sind. Man gewinnt damit nämlich nicht nur diese Subjunktionseigenschaft, sondern auch die Existenz und Eindeutigkeit der nicht-ausgearteten relativen Komplemente als Parallele zu den Eigenschaften Boole’scher Verbände.

Literatur:

Die Arbeiten werden mit dem Namen des Verfassers und der Zahl des Erscheinungsjahres aufgerufen.

W. Felscher, „Ein unsymmetrisches Assoziativgesetz in der Verbandstheorie“, Arch. d. Math. 8 (1957), 171–174.

M. D. Gerhardts, „Ein unsymmetrisches Kommutativgesetz in der Verbandstheorie“, Math. Nachr. 35 (1967), 305–310.

P. Jordan, „Halbgruppen von Idempotenten und nichtkommutative Verbände“, J. f. reine und angewandte Mathematik 211 (1962), 136–161.

F. Klein-Barmen, „Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen“, Math. Annalen 105 (1931), 308–323.

F. Klein-Barmen, „Über eine weitere Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes", Math. Z. 46 (1940), 472–480.

F. Klein-Barmen, „Zur Theorie der Operative und Assoziative", Math. Annalen 126 (1953), 23–30.

S. Kochen and E. Specker, „Logical structures arising in quantum theory", in „Symposium on the theory of models" (Addison, Henkin, Tarski), Amsterdam 1965, 177–189.

J. Kotas, „An axiom system for the modular logic", Studia Logica 21 (1967), 17–38.

H. Kröger, „Subjunktionsbegriffe in orthomodularen Verbänden und Boole'sche R-Schiefverbände", Dissertation, TU München 1972.

H. Kunsemüller, „Zur Axiomatik der Quantenlogik", Philosophia naturalis 1964, 363–376.

F. Maeda and S. Maeda, „Theory of symmetric lattices", Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1970.

S.-I. Matsushita, „Zur Theorie der nichtkommutativen Verbände", Math. Annalen 137 (1959), 1–8.

P. Mittelstaedt, „Philosophische Probleme der modernen Physik", Bibliographisches Institut, Mannheim 1968.

A. Monteiro, „Axiomes independants pour les algebres de Brouwer", Rev. Un. Mat. Argentina 17 (1955), 149–160.

M. Nakamura, „The permutability in a certain orthocomplemented lattice", Kodai Math. Sem. Reports 9 (1957), 158–160.

R. Padmanabhan, „On axioms for semi-lattices", Canad. Math. Bull. 9 (1966), 357–358.

C. Piron, „Axiomatique quantique", Helvetica Physica Acta 37 (1964), 439–468.

E. Richter, „Bemerkungen zur ‚Quantenlogik'", Philosophia naturalis 1964, 225–231.

G. Rose, „Zur Orthomodularität von Wahrscheinlichkeitsfeldern", Zeitschrift für Physik 181 (1964), 331–332

G. H. v. Wright, „And next", Acta Philosophia Fennica, fasc. 18 (1965), 293–304.