BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1976

MÜNCHEN 1977

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Das holonome Energieprinzip der Magnetohydrodynamik

Von Peter Merkel und Arnulf Schlüter

Vorgelegt von Herrn Prof. Dr. Arnulf Schlüter am 2. 7. 1976

Einleitung

Wenn ein Plasma in einem endlichen Volumen eingeschlossen ist und die Annahmen, die die sogenannte ideale Magnetohydrodynamik definieren, erfüllt sind, wird die Energie des Plasmas durch das folgende Integral über das Volumen gegeben:

$$(1) \qquad W = \int \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{\gamma - 1} p(\boldsymbol{x}) \right) dV$$

Die Annahmen sind zum Beispiel in [1] aufgeführt. Zu dieser „potentiellen" Energie tritt bei dynamischen Prozessen noch der bekannte Ausdruck der kinetischen Energie hinzu, den wir im folgenden nicht weiter analysieren wollen.

Es gelten bekanntlich (vergleiche hierzu insbesondere [2] und [3]) folgende Zusammenhänge: Die Stationarität des Energieintegrals (1) gegenüber zulässigen (infinitesimalen) Variationen des Zustands des Plasmas ist gleichbedeutend mit der Gleichgewichtsbedingung des Plasmas, also mit der Existenz einer statischen Lösung. Wenn der stationäre Wert überdies ein *Minimum* gegenüber allen diesen Variationen ist, ist das statische Gleichgewicht *stabil*. Dies entspricht der anschaulichen Erwartung, die man an die Existenz eines Energieintegrals knüpft. Eine erhebliche Minderung des Nutzens dieses Integrals tritt jedoch dadurch ein, daß die Mannigfaltigkeit der zulässigen Variationen zunächst durch anholonome Bedingungen bestimmt wird, nämlich durch

$$(2) \qquad \delta\varrho = -\operatorname{div} \delta\xi\, \varrho$$

und

$$(3) \qquad \delta \boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\, \delta\xi \times \boldsymbol{B}$$

Dabei ist $\delta\xi$ ein infinitesimaler Verschiebungsvektor, dessen Normalkomponente auf dem Rande verschwinden muß, der aber sonst keiner Einschränkung unterliegt. Aus der zulässigen Änderung der Dichte ϱ folgt mit der Annahme der idealen Gasgesetze und der Annahme isentroper Zustandsänderungen die zulässige Änderung des Druckes p in bekannter Weise. Wir werden im folgenden zeigen, daß der Energieausdruck so umgeformt werden kann, daß Nebenbedingungen nicht mehr gestellt zu werden brauchen und werden dann kurz den Nutzen dieser neuen Formulierung diskutieren.

Holonome Form

Wir nehmen an, daß wir einen beliebigen Zustand des Plasmas, den wir Ausgangszustand nennen wollen, durch Angabe von $\boldsymbol{B}$ und ϱ bzw. p als Funktion der kartesischen Koordinaten $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ beschrieben haben. Einen anderen Zustand, der durch zulässige Änderungen aus dem Ausgangszustand hervorgegangen sei, beschreiben wir, indem wir alle diese Größen mit einem ′ versehen. Wenn wir den geänderten Zustand auf den Ausgangspunkt beziehen wollen, kann dies durch Angabe der drei Funktionen $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x})$ geschehen, die wir so deuten können, daß sie im Sinn von Lagrange-Koordinaten die geänderte Lage $\boldsymbol{x}'$ eines materiellen Volumenelementes angeben, das sich in der Ausgangslage am Orte $\boldsymbol{x}$ befand. Dieser Deutung entspricht es, daß man den Tensor a_{ik} als Verzerrungstensor bezeichnen kann:

$$(4) \qquad a_{ik} = d_{ik} - \delta_{ik} \qquad\qquad i, k = 1, 2, 3$$
$$d_{ik} = \partial x'_i / \partial x_k \qquad\qquad \delta_{ik} = \text{Kronecker-}\delta$$

Die Lagrangesche Beschreibung erlaubt nun in bekannter Weise die Integration der Bedingung (2) für endliche Verschiebungen in der Form

$$(5) \qquad \varrho'(\boldsymbol{x}') = \varrho(\boldsymbol{x}) \cdot D^{-1}; \; D = \det \{d_{ik}\}$$

Dies entspricht der Deutung von (2) als Erhaltungssatz der Materie. Ähnlich ist aber auch (3) als Erhaltung des magnetischen Flusses durch jede mitbewegte und mitdeformierte Fläche zu deuten, woraus sofort folgt:

$$(6) \qquad B_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{irs} d_{lr} d_{ms} B'_k(\boldsymbol{x}')$$

(Summationskonvention; ε_{klm} total schiefsymmetrischer Einheitstensor)

oder aufgelöst (vgl. [6]):

$$B'_i(\boldsymbol{x}') = \frac{d_{ik}(\boldsymbol{x})}{D(\boldsymbol{x})} B_k(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

Mit der Beobachtung, daß die Volumenelemente beim Wechsel der Integrationsveränderlichen sich um den Faktor $D(\boldsymbol{x})$ ändern, läßt sich nunmehr die Energie W' im verschobenen („gestrichenen") Zustand durch ein Integral über die Größen und die Koordinaten des Ausgangszustandes ausdrücken, in dem die beliebige endliche Verschiebung (durch den Verzerrungstensor) auftritt.

$$\begin{aligned} W' &= \int \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{B}'^2(\boldsymbol{x}') + \frac{1}{\gamma-1} p'(\boldsymbol{x}') \right) dV' \\ &= \int \left(\frac{1}{2D} B_k(\boldsymbol{x}) B_l(\boldsymbol{x}) d_{ik} d_{il} + \frac{p(\boldsymbol{x})}{(\gamma-1)D^{\gamma-1}} \right) dV \end{aligned} \tag{8}$$

Dies ist die gewünschte holonome Formulierung des Energieprinzips.[1] Wenn man darin allein die Funktionen $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x})$ als Variable betrachtet, folgt natürlich wieder die Äquivalenz der Stationarität mit der Gleichgewichtsbedingung und die der Minimumseigenschaft mit der Stabilität.

Um die Stabilität eines gegebenen Gleichgewichtes zu studieren, genügt es nach dem vorher Gesagten, das Gleichgewicht als Ausgangszustand zu nehmen und die Gesamtheit der zulässigen Endzustände zu untersuchen, die in zweiter Ordnung (gemessen in Potenzen des Verzerrungstensors) vom Ausgangszustand entfernt sind. Befindet sich in dieser Mannigfaltigkeit ein Zustand mit niedrigerer Energie als der Ausgangsenergie, so ist das betrachtete Gleichgewicht instabil. Dieser Energieausdruck zweiter Ordnung wurde bereits in [4] gegeben. Dabei wurde von den Autoren erhebliche Mühe darauf verwandt, eine Form zu finden, die den symmetrischen Charakter und damit die hermitesche Natur der zugehörigen Euler-Lagrange Gleichung evident macht.

---

[1] Die Herren O. Bétancourt und P. R. Garabedian, New York, haben uns freundlicherweise vor der Veröffentlichung ein Manuskript zur Verfügung gestellt, in dem sie unabhängig von uns ebenfalls eine holonome Formulierung herleiten und benutzen. Ihre Formulierung benutzt die Existenz magnetischer Flächen.

Bei der vorliegenden holonomen Formulierung ist dieser Charakter selbst evident, während die übliche Formulierung einen besonderen Beweis für die Hermitezität erforderlich macht.

Die vorliegende Formulierung erlaubt darüber hinaus in einfachster Weise auch noch höhere Ordnungen anzugeben, deren Studium von Wichtigkeit sein kann, wenn etwa die Stabilität von Konfigurationen untersucht werden soll, die in der Nachbarschaft marginal stabiler Gleichgewichte liegen. Wir geben daher die Entwicklung bis zur vierten Potenz von a_{ik} einschließlich, ohne im übrigen vorauszusetzen, daß der Ausgangszustand ein Gleichgewicht ist. Die Entwicklung der Funktionaldeterminanten D ergibt

$$\begin{aligned} (9) \qquad D &= \det\{d_{ik}\} = \det\{\delta_{ik} + a_{ik}\} \\ &= 1 + a + b + c \\ &\text{mit } a = a_{ii}; \quad 2b = a_{ii}^{\ 2} - a_{ik}\, a_{ki}; \quad c = \det\{a_{ik}\} \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Energie

$$(10) \qquad W' = W + \delta_1 W + \delta_2 W + \delta_3 W + \delta_4 W + \ldots$$

$$(11) \qquad \delta_1 W = \int dV \left(B_i\, B_k\, a_{ik} - \left(\tfrac{1}{2} B^2 + p\right) a \right)$$

$$\begin{aligned} (12) \qquad \delta_2 W = \int dV \Big(&\tfrac{1}{2} B_i\, B_k\, a_{li}\, a_{lk} - B_i\, B_k\, a_{ik}\, a - \\ &- \left(\tfrac{1}{2} B^2 + p\right) b + \tfrac{1}{2}\left(B^2 + \tfrac{\gamma}{2} p\right) a^2 \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13) \qquad \delta_3 W = \int dV \Big(&\tfrac{1}{2} B^2 (2ab - c - a^3) + B_i\, B_k\, a_{ik} (a^2 - b) \\ &- \tfrac{1}{2} B_i\, B_k\, a_{li}\, a_{lk}\, a + p\left(\gamma a b - c - \frac{\gamma(\gamma+1)}{2 \cdot 3} a^3\right) \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_4 W = \int dV \Big(&\tfrac{1}{2} B^2 (b^2 + 2ca - 3a^2 b + a^4) + \\ (14) \qquad &+ B_i\, B_k\, a_{ik} (2\, ab - c - a^3) + \tfrac{1}{2} B_i\, B_k\, a_{li}\, a_{lk} (a^2 - b) + \\ &+ \tfrac{\gamma}{2} p \left(b^2 + 2ca - (\gamma + 1)\, a^2 b + \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{3 \cdot 4} a^4\right) \Big) \end{aligned}$$

Bei der Entwicklung zu höheren Ordnungen hin ist zu beachten, daß die Randbedingung sich in höherer Ordnung nicht mehr unmittelbar durch die d_{ik} oder a_{ik} ausdrücken läßt. In allen Ordnungen richtig lautet sie (die Menge der Randpunkte sei mit $\boldsymbol{S}$ bezeichnet): $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \rightarrow \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{S}$. Sie wird am einfachsten durch Einführung krummliniger Koordinaten berücksichtigt, die $\boldsymbol{S}$ zu einer Koordinatenfläche machen.

Das Verschwinden der ersten Variation für alle zulässigen $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x})$ hat wegen der Randbedingungen offensichtlich die bekannte Gleichgewichtsbedingung zur Folge. Die Variation zweiter Ordnung ergibt erfreulicherweise genau die früher gefundene Form [4]. Unbekannt war unseres Erachtens bisher, daß diese Form in gleicher Weise auch außerhalb des Gleichgewichts die Glieder zweiten Grades wiedergibt.

Anwendungen

Besonderen Nutzen erwarten wir von der holonomen Formulierung bei dem Versuch, durch numerische Rechnung stabile magnetohydrodynamische Gleichgewichte zu finden. Wir diskutieren diese Zusammenhänge unter Bezugnahme auf das in [1] vorgeschlagene Verfahren, solche Gleichgewichte dadurch zu finden, daß man eine künstliche Zeitabhängigkeit so einführt, daß eine kontinuierliche Folge von Konfigurationen entsteht, die auseinander auf zulässige Weise hervorgehen und monoton fallende Energie besitzen. Da diese offensichtlich nach unten beschränkt ist, muß die so erzeugte kontinuierliche Folge gegen ein Gleichgewicht konvergieren, von dem im allgemeinen angenommen werden darf, daß es stabil ist, da in ihm die Energie minimal ist. Die parabolische Differentialgleichung, die diese Folge erzeugt, lautet in der gegenwärtigen Bezeichnungsweise:

$$\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt} = -\lambda \cdot \frac{\delta W'}{\delta \boldsymbol{x}'} \tag{15}$$

(λ beliebiger positiver Faktor oder Tensor oder auch Operator)

Dabei sind nunmehr $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}, t)$ und alle anderen Größen auch als Funktion der Zeit anzusehen. Die Ableitung nach der Zeit auf der linken Seite haben wir mit „geradem" d geschrieben, wie dies bei Verwendung Lagrangescher Koordinaten üblich ist. Auf der rechten Seite steht die Variationsableitung der Energie nach den Koordinaten der verschobenen Lage.

Zur numerischen Lösung dieser Differentialgleichung hat es sich bewährt, ein Verfahren zu wählen, bei dem die zeitliche Schrittweite der Integration in einer systematischen Weise periodisch mit der Zeit geändert wird (vergleiche hierzu [5]). Dieses Verfahren[2] erlaubt es, mittlere Zeitschritte zu wählen, die unter praktischen Bedingungen bis etwa hundertmal oberhalb der bekannten Courant-Friedrichs-Bedingung für numerische Stabilität liegen. Voraussetzung für die Anwendbarkeit ist allerdings, daß die linearisierten Bewegungsgleichungen auch außerhalb des Gleichgewichts selbstadjungiert sind, und dies wird durch die Gültigkeit der angegebenen Entwicklung von W' zur zweiten Ordnung sichergestellt.

Noch wichtiger dürfte es sein, daß die holonome Formulierung es erlaubt, die Diskretisierung der analytischen Ausdrücke, die zur numerischen Approximation erforderlich ist, so vorzunehmen, daß sowohl die Monotonieeigenschaft der Energieänderung als auch die Hermitezität auch nach der Diskretisierung erhalten bleiben. Die Diskretisierung geschieht z. B. dadurch, daß zunächst das Integral der Gleichung (1) bzw. (8) durch eine Summe über die Werte des Integranden an Gitterpunkten, versehen mit Gewichten, die den Volumenelementen entsprechen, die den Gitterpunkten zugeordnet werden, ersetzt wird. Dann werden die Differentialquotienten des Verzerrungstensors durch Differenzenquotienten zur gewünschten Ordnung ersetzt. Damit wird das Energieintegral zu einem algebraischen Ausdruck der als veränderlich zu betrachtenden endlich vielen Werte von $\boldsymbol{x}'$. An die Stelle der Funktionalableitung in Gleichung (15) treten schließlich die gewöhnlichen Ableitungen nach diesen Veränderlichen.

Die berichtete Untersuchung haben wir im Max-Planck-Institut für Plasmaphysik im Rahmen des Vertrages mit Euratom durchgeführt.

---

[2] Der Zyklus habe die Länge n, k sei eine natürliche Zahl, die teilerfremd zu $2n$ ist, τ sei die Courant-Friedrichs-Grenze, es sei $a > 1$ (praktisch sei aber $a - 1 \ll 1$), dann ist die Länge des ν-ten Zeitschrittes in diesem Zyklus gegeben durch
$$\Delta t_\nu = \tau\,(a + \cos\,(2\nu k - 1)\,\pi/2n)^{-1}$$
Im Grenzfall $a \to +1$ gilt: $\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \Delta t_\nu = n\tau$.

Werte von $n \simeq 300$ sind erfolgreich verwendet worden.

Literatur

[1] Schlüter, A.: Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturw. Klasse, 197 (1975)

[2] Bernstein, I. B., E. A. Frieman, M. D. Kruskal, and R. M. Kulsrud: Proc. Roy. Soc. (London) A 244, 17 (1958)

[3] Grad, H., and H. Rubin: Proc. of the 2nd U. N. Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1958, Vol. 31, 190

[4] Hain, K., R. Lüst, and A. Schlüter: Z. f. Naturforschung 12a, 833 (1957)

[5] Chodura, R., and A. Schlüter: Proc. of the 2nd Eur. Conf. on Computational Physics, Garching 1976

[6] Lundquist, S.: Phys. Rev. 83, 307 (1951)