BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1976

MÜNCHEN 1977

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Reguläre Maße mit einer gegebenen Familie von Bildmaßen

von

Jörn Lembcke, in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Prof. Dr. Heinz Bauer, Erlangen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit werden Bedingungen für die *Existenz regulärer gemeinsamer Urbildmaße* hergeleitet, d. h. für die Existenz von Maßen, die bezüglich eines Mengensystems $\mathfrak{K}$ (von innen) regulär sind und eine vorgegebene Familie von Bildmaßen unter einer Familie meßbarer Abbildungen besitzen.

Wohlbekannte Spezialfälle dieses Problems sind einerseits die Frage nach der Existenz des *projektiven Limes* einer projektiven

Familie von Maßen, zum anderen die von Kellerer ([12], [13]) untersuchte Frage nach der Existenz von Maßen auf Produkträumen, für die gewisse *Marginalmaße* vorgegeben sind. Ferner kann man auch das Problem der *Fortsetzbarkeit* beliebiger Mengenfunktionen zu (regulären) Maßen als Existenzproblem für gemeinsame Urbildmaße interpretieren (vgl. 1.7).

Zunächst beschränken wir uns auf die Untersuchung der Existenz $\mathfrak{K}$-regulärer *endlich-additiver* gemeinsamer Urbildinhalte; die σ-Additivität erhält man hieraus unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $\mathfrak{K}$ ein *kompaktes System* im Sinne von Marczewski [19] ist. In [17] haben wir notwendige und hinreichende Bedingungen hergeleitet für die Existenz endlich-additiver gemeinsamer Urbildinhalte *ohne* Regularitätsforderungen. Wir können uns daher hier im wesentlichen darauf beschränken, Bedingungen für die Existenz $\mathfrak{K}$-regulärer Elemente in der Menge M aller gemeinsamen Urbildinhalte zu suchen.

Dazu gehen wir ähnlich wie in [15] vor: Zunächst wird in Abschnitt 3 gezeigt, daß alle $\mathfrak{K}$-regulären Inhalte aus M bezüglich einer geeigneten Präordnung auf M *maximal* sind. Ferner folgt aus Andenaes' Version des Satzes von Hahn-Banach, daß M stets maximale Elemente bezüglich dieser Präordnung besitzt, sofern M nicht-leer ist. Für solche maximalen Inhalte aus M beweisen wir, daß man sie eindeutig in einen größtmöglichen $\mathfrak{K}$-regulären Anteil und einen diffusen Rest zerlegen kann (Satz 3.9). Es kommt daher zum Nachweis der Existenz $\mathfrak{K}$-regulärer Inhalte aus M darauf an, Bedingungen zu finden, die gewährleisten, daß für gewisse maximale Inhalte aus M der diffuse Anteil der Nullinhalt ist.

Im Falle eines *einzigen* gegebenen Bildinhalts haben wir in [15] unter Zusatzvoraussetzungen (über den gegebenen Inhalt und die gegebene Abbildung) gezeigt, daß der diffuse Anteil für einen (und auch für jeden) maximalen Urbildinhalt genau dann der Nullinhalt ist, wenn *der gegebene Bildinhalt von innen approximiert werden kann durch den äußeren Inhalt der Bilder von Mengen aus* $\mathfrak{K}$.

Will man dieses Ergebnis auf *Familien* vorgegebener Bildinhalte übertragen, so liegt es nahe, den äußeren Inhalt durch den in [17] eingeführten *gemeinsamen äußeren Inhalt* zu ersetzen.

(Dieser berechnet sich im Spezialfall projektiver Familien einfach als Infimum der äußeren Inhalte aller Bildmengen einer gegebenen Menge aus $\mathfrak{K}$.) Es stellt sich jedoch heraus (vgl. Beispiel 4.11), daß die analoge Approximationsbedingung zwar notwendig, aber nur unter weiteren Zusatzvoraussetzungen auch hinreichend für die $\mathfrak{K}$-Regularität gewisser Elemente aus M ist. Im Abschnitt 4 werden verschiedene derartige Zusatzvoraussetzungen untersucht.

Im fünften Abschnitt setzen wir voraus, daß $\mathfrak{K}$ ein kompaktes System ist. Damit erhalten wir die gewünschten Bedingungen für die Existenz regulärer *σ-additiver* gemeinsamer Urbildmaße.

Diese Ergebnisse werden verwendet zur Herleitung von hinreichenden Bedingungen für die Existenz *regulärer Borelmaße* auf Hausdorff-Räumen mit einer gegebenen Familie regulärer Bild-Borelmaße unter einer Familie *stetiger* Abbildungen (Abschnitt 6). Falls z.B. alle vorgegebenen Bildmaße beschränkt sind und eine der Abbildungen sogar eigentlich ist (es genügt, daß das inverse Bild jeder kompakten Menge kompakt ist), *so gibt es genau dann ein reguläres gemeinsames Urbild-Borelmaß der gegebenen Maße, wenn es einen endlich additiven gemeinsamen Urbildinhalt gibt.* Die gleiche Kennzeichnung erhält man in einer Situation, die einen Satz von Kellerer [13] über Maße auf Produkträumen mit vorgegebenen Marginalmaßen umfaßt.

Im siebten Abschnitt gehen wir auf *projektive Familien* von Maßen ein und zeigen, daß es hier wie im Falle eines einzigen gegebenen Bildmaßes ausreichend ist, die erwähnte Approximationsbedingung zu untersuchen. Wir erhalten damit Verallgemeinerungen von Resultaten von Prohorov [20] sowie Bourbaki [8], Kisyński [14], Scheffer [21] und Topsøe [22] auf unbeschränkte Maße.

Zum Abschluß werden einige spezielle *Fortsetzungsprobleme* behandelt (Abschnitt 8). Insbesondere verallgemeinern wir einen Fortsetzungssatz von D. Maharam [18] und untersuchen in Anlehnung an Kisyński [14] und Topsøe [23] eine Caratheodorysche *Zerlegungseigenschaft* für *innere* Inhalte.

Ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit wurde für beschränkte Maße auf Algebren in [16] angekündigt, der Fall eines einzigen gegebenen Bildmaßes wurde bereits in [15] behandelt.

1. Fragestellung und allgemeine Bezeichnungen

1.1. Sei X eine Menge und $\mathfrak{M}$ ein System von Teilmengen von X. $\mathfrak{M}$ heiße $\cup$-*stabil* bzw. $\cap$-*stabil* bzw. $(\cup, \cap)$-*stabil*, falls $\mathfrak{M}$ gegenüber endlichen Vereinigungen bzw. endlichen Durchschnitten bzw. endlichen Vereinigungen und Durchschnitten stabil ist. $\mathfrak{M}_\cup$ bzw. $\mathfrak{M}_\cap$ bzw. $\mathfrak{M}_{(\cup,\cap)}$ bezeichne das kleinste $\mathfrak{M}$ enthaltende System von Teilmengen von X, das bezüglich der als Index angegebenen endlichen Mengenoperationen stabil ist.

Bekanntlich gilt $\mathfrak{M}_{(\cup,\cap)} = (\mathfrak{M}_\cup)_\cap = (\mathfrak{M}_\cap)_\cup$.

Die Begriffe *Ring*, σ-*Ring*, *Algebra* und σ-*Algebra* werden wir in der gleichen Weise verwenden wie Halmos [11]. Unter einem *Inhalt* auf einem Ring verstehen wir eine endlich additive Abbildung mit Werten in $\bar{\boldsymbol{R}}_+ = [0, \infty]$, die der leeren Menge den Wert 0 zuordnet. Ein *Maß* ist ein σ-additiver Inhalt auf einem σ-Ring.

1.2. **Definition.** Sei $\mathfrak{M}$ ein System von Teilmengen einer Menge X. Eine Menge $Y \subset X$ heiße $\mathfrak{M}$-*beschränkt*, falls ein $M \in \mathfrak{M}$ existiert mit $Y \subset M$.

Ein System $\mathfrak{N}$ von Teilmengen von X heiße $\mathfrak{M}$-*beschränkt*, wenn jede Menge $N \in \mathfrak{N}$ $\mathfrak{M}$-beschränkt ist.

1.3. **Definition.** Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring von Teilmengen einer Menge X, und sei $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{R}$. Ein Inhalt ν auf $\mathfrak{R}$ heiße (*von innen*) $\mathfrak{K}$-*regulär* bzw. $\mathfrak{K}$-*regulär auf* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{R}$, wenn für alle $R \in \mathfrak{R}$ bzw. für alle $R \in \mathfrak{E}$ gilt:

$$\nu(R) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset R}} \nu(K).$$

1.4. *Für den Rest dieser Arbeit seien gegeben:*

(i) *eine Indexmenge* I;

(ii) *Mengen* X, Y_i $(i \in I)$ *sowie Ringe* $\mathfrak{R}$ *bzw.* $\mathfrak{Q}_i$ $(i \in I)$ *von Teilmengen von* X *bzw.* Y_i;

(iii) *eine Familie* $(f_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{R}$-$\mathfrak{Q}_i$-*meßbarer Abbildungen* $f_i : X \to Y_i$;

(iv) *eine Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ *von Inhalten* μ_i *auf* $\mathfrak{Q}_i$;

(v) *ein Mengensystem* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{R}$ *mit* $\emptyset \in \mathfrak{K}$, *das* $(\cup, \cap)$*-stabil ist.*[1]

Gesucht werden Bedingungen für die Existenz eines $\mathfrak{K}$*-regulären gemeinsamen Urbildinhalts* ν *auf* $\mathfrak{R}$ *der Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ *unter der Familie* $(f_i)_{i \in I}$ *von Abbildungen, d. h.* (vgl. [17, Definition 2.1]) *eines* $\mathfrak{K}$*-regulären Inhalts* ν *auf* $\mathfrak{R}$ *mit*

$$\nu(f_i^{-1}(Q_i)) = \mu_i(Q_i) \text{ für alle } i \in I \text{ und alle } Q_i \in \mathfrak{Q}_i.$$

Auch *die folgenden Bezeichnungen werden im Verlaufe dieser Arbeit beibehalten.*

1.5. Für $i \in I$ sei $\mathfrak{Q}_i^e = \{Q_i \in \mathfrak{Q}_i : \mu_i(Q_i) < \infty\}$ und μ_i^e die Restriktion von μ_i auf den Ring $\mathfrak{Q}_i^e$. Ferner sei

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{Q}_i) = \bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(Q_i) : Q_i \in \mathfrak{Q}_i\}, \mathfrak{F}^e = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{Q}_i^e)$$

sowie $\mathfrak{K}^e$ bzw. $\mathfrak{R}^e$ das System der $(\mathfrak{F}^e)_\cup$-beschränkten Mengen aus $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}^e$ ist offenbar ein Ring, und jede der Abbildungen f_i ist $\mathfrak{R}^e$-$\mathfrak{Q}_i^e$-meßbar ($i \in I$).

1.6. **Verträglichkeitsbedingung.** *Wir setzen für den Rest dieser Arbeit voraus*, daß die folgende trivialerweise notwendige Bedingung für die Existenz eines gemeinsamen Urbildinhalts der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ stets erfüllt sei:

Für jedes $F \in \mathfrak{F}$ *ist die Menge* $\{\mu_i(Q_i) : i \in I,\ Q_i \in \mathfrak{Q}_i,\ f_i^{-1}(Q_i) = F\}$ *einelementig.*[2]

Damit ist die Abbildung $\varphi : \mathfrak{F} \to \bar{\boldsymbol{R}}_+$ mit $\varphi(F) = \mu_i(Q_i)$ ($i \in I$, $Q_i \in \mathfrak{Q}_i$, $F = f_i^{-1}(Q_i)$) wohldefiniert.

Aus der Wohldefiniertheit von φ folgt unmittelbar, daß für jedes $i \in I$ die Restriktion von φ auf den Ring $f_i^{-1}(\mathfrak{Q}_i)$ ein Inhalt ist; insbesondere ist $\varphi(\emptyset) = 0$. Es gilt daher $\mu_i(Q_i) = 0$ für alle $i \in I$, $Q_i \in \mathfrak{Q}_i$ mit $Q_i \subset Y_i \setminus f_i(X)$.

1.7. **Bemerkung.** Offenbar ist unser in 1.4 formuliertes Ausgangsproblem äquivalent zu einem *Fortsetzungsproblem* für die Mengenfunktion φ.

---

[1] Bis einschließlich 3.4 bleiben alle Überlegungen richtig, wenn $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{R}$ ein beliebiges Mengensystem ohne Zusatzeigenschaften ist.

[2] Dieser Voraussetzung entspricht bei Maharam [18] die Forderung, daß die Ausgangslinearformen „*consistent*" sind.

Geht man umgekehrt aus von einem beliebigen Mengensystem $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{R}$ mit $\emptyset \in \mathfrak{F}$ sowie einer Abbildung $\varphi : \mathfrak{F} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$, und sucht man nach einer Fortsetzung von φ zu einem $\mathfrak{K}$-regulären Inhalt auf $\mathfrak{R}$, so kann man diese Fragestellung als Spezialfall unseres Ausgangsproblems 1.4 interpretieren:

Man wähle die Indexmenge $I = \mathfrak{F}$; für $F \in \mathfrak{F}$ sei $Y_F = X$, $\mathfrak{Q}_F = \{\emptyset, F\}$, μ_F sei der durch $\mu_F(F) = \varphi(F)$ auf dem Ring $\mathfrak{Q}_F$ eindeutig bestimmte Inhalt, $f_F : X \to Y_F$ sei die identische Abbildung von X.

Offenbar ist jede der Abbildungen f_F $\mathfrak{R}$-$\mathfrak{Q}_F$-meßbar, und es gilt: *Ein Inhalt ν auf $\mathfrak{R}$ ist genau dann eine Fortsetzung von φ, wenn ν gemeinsamer Urbildinhalt der Familie $(\mu_F)_{F \in \mathfrak{F}}$ ist unter den Abbildungen $(f_F)_{F \in \mathfrak{F}}$.* $\mathfrak{F}$ ist dabei das in 1.5 definierte Mengensystem $\mathfrak{F} = \bigcup_{F \in I} f_F^{-1}(\mathfrak{Q}_F)$ und φ die in 1.6 eingeführte Mengenfunktion auf $\mathfrak{F}$.

Wir werden im folgenden mit Ausnahme von Abschnitt 8 alle Ergebnisse ausschließlich in der Terminologie der gemeinsamen Urbildmaße formulieren. Die Übertragung zur Lösung entsprechender Fortsetzungsprobleme ergibt sich unmittelbar aus dem oben Gesagten. Lediglich in Abschnitt 8 wollen wir noch etwas näher auf spezielle Fortsetzungsprobleme eingehen.

Um zu hinreichenden Bedingungen für die Existenz $\mathfrak{K}$-regulärer gemeinsamer Urbildinhalte zu gelangen, werden wir ähnlich wie in [15] Voraussetzungen über die Regularität der Ausgangsinhalte machen. Allerdings ist es in der hier betrachteten allgemeinen Situation notwendig, zusätzlich auch gewisse Regularitätsforderungen an Durchschnitte und Differenzen „genügend großer" Mengen aus $\mathfrak{F}$ zu stellen. Aus diesem Grunde und im Hinblick auf das Fortsetzungsproblem erscheint es vernünftig, die Regularitätsforderungen an die Ausgangsinhalte mit Hilfe der Mengenfunktion φ zu formulieren. Für viele Spezialfälle, insbesondere den der beschränkten Inhalte, werden wir dann zeigen, daß sich die allgemeine Regularitätsvoraussetzung so vereinfachen läßt, daß sie der in [15] entspricht.

1.8. **Definition.** Es sei ein Mengensystem $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}^e$ gegeben.

(1) Unter dem zu φ gehörigen *inneren Inhalt* (bzgl. $\mathfrak{C}$) verstehen wir die Mengenfunktion $\varphi_* = \varphi_*^{\mathfrak{C}}$ auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$,

die für $A \subset X$ definiert wird durch

$$\varphi_* (A) = \sup \{\sum_{j=1}^{n} \varphi (C_j) : n \in \boldsymbol{N},\ C_j \in \mathfrak{C} \text{ paarweise fremd}, \bigcup_{j=1}^{n} C_j \subset A\},$$

falls A eine Teilmenge $C \in \mathfrak{C}$ besitzt, bzw. durch

$$\varphi_* (A) = 0,$$

falls A keine Teilmenge $C \in \mathfrak{C}$ besitzt.

(2) $\varphi : \mathfrak{F} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ heiße $\mathfrak{C}$-*regulär* (bzgl. $\mathfrak{K}$), wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(R1) Für alle $F \in \mathfrak{F}$ gilt $\varphi (F) \leq \varphi_*^{\mathfrak{C}} (F)$.

(R2) Für jede $\mathfrak{C}$-beschränkte Menge $K \in \mathfrak{K}$ und jedes $F \in \mathfrak{F}$ gibt es endlich viele Mengen $F_1, \ldots, F_n \in \mathfrak{F}^e$ mit $K \setminus F \subset \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ und $\varphi (F_j) \leq \varphi_*^{\mathfrak{C}} (F_j \setminus F) + \varphi_*^{\mathfrak{C}} (F_j \cap F)$.

(3) Die *Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ heiße $\mathfrak{C}$-*regulär* (bzgl. $\mathfrak{K}$ und $(f_i)_{i \in I}$), falls die zugehörige Mengenfunktion φ $\mathfrak{C}$-regulär ist.

1.9. **Bemerkungen.** (i) Bekanntlich ist der innere Inhalt $\varphi_*^{\mathfrak{C}}$ superadditiv und isoton, d. h. für je drei Mengen $A, B, C \subset X$ mit $A \cup B \subset C$ und $A \cap B = \emptyset$ ist $\varphi_*^{\mathfrak{C}} (A) + \varphi_*^{\mathfrak{C}} (B) \leq \varphi_*^{\mathfrak{C}} (C)$.

(ii) Falls ein gemeinsamer Urbildinhalt ν der $(\mu_i)_{i \in I}$ existiert, gilt wegen der Additivität und Isotonie von ν stets $\varphi_*^{\mathfrak{C}} (R) \leq \nu (R)$ für alle $R \in \mathfrak{R}$. Falls (R1) erfüllt ist, folgt daraus

$$\varphi (F) = \nu (F) = \varphi_*^{\mathfrak{C}} (F) \text{ für alle } F \in \mathfrak{F}.$$

Analog folgt für die in (R2) auftretenden Mengen F_j und F

(R2′) $\varphi_* (F_j) = \varphi (F_j) = \nu (F_j) = \varphi_* (F_j \setminus F) + \varphi_* (F_j \cap F)$,

und damit auch

$$\nu (F_j \setminus F) = \varphi_* (F_j / F) \text{ sowie } \nu (F_j \cap F) = \varphi_* (F_j \cap F).$$

(R2′) ist eine Caratheodorysche Zerlegungseigenschaft des inneren Inhalts $\varphi_* = \varphi_*^{\mathfrak{C}}$ für gewisse Mengen aus $\mathfrak{F}$. Später werden wir zeigen, daß allein aus einer Verschärfung von (R2′) bereits die endliche Additivität von φ_* auf einem geeigneten Ring und daraus die Existenz eines gemeinsamen Urbildinhalts der $(\mu_i)_{i \in I}$ folgt (vgl. 8.9).

1.10. **Lemma.** *In jedem der folgenden Fälle ist die Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$*-regulär, sofern nur die Bedingung* (R1) *erfüllt ist:*

(a) *Jede* $\mathfrak{C}$*-beschränkte Menge* $K \in \mathfrak{K}$ *ist* $f_i^{-1}(\mathfrak{Q}_i^e)$*-beschränkt für alle* $i \in I$.

(b) *Jeder Ring* $\mathfrak{Q}_i$ $(i \in I)$ *ist eine Algebra, und jeder Inhalt* μ_i *auf* $\mathfrak{Q}_i$ *ist reellwertig.*

(c) *Die Indexmenge* I *ist einelementig.*

Beweis. (b) und (c) sind offenbar Spezialfälle von (a). Es genügt daher, die Bedingung (R2) für den Fall (a) nachzuweisen.

Sei $K \in \mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$-beschränkt, und sei $F \in f_i^{-1}(\mathfrak{Q}_i) \subset \mathfrak{F}$. Dann gibt es eine Menge $F_1 \in f_i^{-1}(\mathfrak{Q}_i^e)$ mit $K \subset F_1$, also auch mit $K \backslash F \subset F_1$. Wegen $F_1 \backslash F$, $F_1 \cap F \in f_i^{-1}(\mathfrak{Q}_i^e) \subset \mathfrak{F}^e$ folgt gemäß 1.6 aus (R1)
$\varphi(F_1) = \varphi(F_1 \backslash F) + \varphi(F_1 \cap F) \leq \varphi_*(F_1 \backslash F) + \varphi_*(F_1 \cap F)$.
Damit ist (R2) bewiesen. $\lrcorner$

Als unmittelbare Anwendung des Lemmas erhalten wir:

1.11. **Korollar.** *Für jedes* $i \in I$ *existiere ein Mengensystem* $\mathfrak{C}_i \subset \mathfrak{Q}_i^e$, *so daß* μ_i $\mathfrak{C}_i$*-regulär ist* (im Sinne der Definition 1.3). *Ferner gelte eine der folgenden drei Bedingungen:*

(a) *Für jede Menge* $K \in \mathfrak{K}$, *deren Bild* $f_i(K)$ $\mathfrak{C}_i$*-beschränkt ist für ein* $i \in I$, *ist* $f_j(K)$ $\mathfrak{Q}_j^e$*-beschränkt für alle* $j \in I$.

(b) *Jeder Ring* $\mathfrak{Q}_i$ $(i \in I)$ *ist eine Algebra, und jeder der Inhalte* μ_i *ist reellwertig.*

(c) I *ist einelementig.*

Dann ist die Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$*-regulär für das Mengensystem* $\mathfrak{C} = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{C}_i)$.

1.12. **Bemerkungen.** (i) Unter den Voraussetzungen (b) und (c) von 1.10 und 1.11 ist die $\mathfrak{C}$-Regularität der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ unabhängig von der Wahl des Mengensystems $\mathfrak{K}$.

(ii) Aus 1.11 (c) kann man ersehen, daß der in 1.8 eingeführte Regularitätsbegriff den üblichen aus Definition 1.3 umfaßt, wenn man die Indexmenge $I = \{i\}$ einelementig wählt sowie $Y_i = X$ und $f_i = \mathrm{id}_X$ setzt.

1.13. **Definition.** Sei $\mathfrak{C}$ ein System von Teilmengen von X. $\mathfrak{K}$ heiße $\mathfrak{C}$-*stabil*, wenn $K \cap C \in \mathfrak{K}$ für alle Mengen $K \in \mathfrak{K}$ und $C \in \mathfrak{C}$ gilt.

2. Inhalte und positive Linearformen

Wie in [17, § 2] identifizieren wir in der üblichen Weise endliche Inhalte auf Ringen und positive Linearformen auf den zugehörigen Vektorräumen von Treppenfunktionen (vgl. [7, § 4, n° 9] und [15, Lemma 1.2]). Da die hier betrachteten Inhalte jedoch nicht immer reellwertig sind, wollen wir die Bezeichnungen aus [17] der hier vorliegenden Situation anpassen.

2.1. **Bezeichnungen.** $\boldsymbol{E}$ bzw. $\boldsymbol{E}_i$ $(i \in I)$ bezeichne den Vektorraum der $\mathfrak{R}^e$- bzw. $\mathfrak{Q}_i^e$-Treppenfunktionen, $\boldsymbol{F}$ sei der von $\{g_i \circ f_i : i \in I, g_i \in \boldsymbol{E}_i\}$ erzeugte Untervektorraum von $\boldsymbol{E}$.
Damit ist $\boldsymbol{F}$ gerade der Vektorraum der $\mathfrak{F}^e$-Treppenfunktionen.

2.2. **Definition.** Für $g \in \boldsymbol{E}$ bzw. $R \in \mathfrak{R}^e$ heiße

$$p(g) = \inf \{\sum_{j \in J} \mu_j^e(g_j) : J \subset I \text{ endlich}, g_j \in \boldsymbol{E}_j \ (j \in J), \sum_{j \in J} g_j \circ f_j \geq g\}$$

bzw.

$$p(R) = p(1_R)$$

gemeinsamer äußerer Inhalt von g bzw. R.

Die Bedeutung des gemeinsamen äußeren Inhalts zur Lösung unseres Problems wird durch das folgende in [17, Satz 2.5 und Korollar 2.7] bewiesene Ergebnis erhellt.

2.3. **Lemma.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es gibt einen gemeinsamen Urbildinhalt* ν *der Familie* $(\mu_i^e)_{i \in I}$ *auf dem Ring* $\mathfrak{R}^e$.

(ii) $p(g) > -\infty$ *für ein* $g \in \boldsymbol{E}$.

(iii) $p(g) > -\infty$ *für alle* $g \in \boldsymbol{E}$.

(iv) *Für je endlich viele Mengen* $F_1, \ldots, F_m, F'_1, \ldots, F'_n \in \mathfrak{F}^e$ *mit* $\sum_{k=1}^{n} 1_{F'_k} \leq \sum_{j=1}^{m} 1_{F_j}$ *gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(F'_k) \leq \sum_{j=1}^{m} \varphi(F_j).$$[3]

2.4. **Lemma.** *Die Familie* $(\mu_i^e)_{i \in I}$ *besitze einen gemeinsamen Urbildinhalt auf dem Ring* $\mathfrak{R}^e$. *Dann gilt* $\mu_i^e(g_i) = p(g_i \circ f_i)$ *für alle* $i \in I$ *und alle* $g_i \in \mathbf{E}_i$. *Insbesondere ist* $\varphi(F) = p(F)$ *für alle* $F \in \mathfrak{F}^e$. *Die Restriktion von* p *auf den Vektorraum* $\mathbf{F}$ *ist eine Linearform.*

Beweis. Sei ν auf $\mathfrak{R}^e$ ein gemeinsamer Urbildinhalt der Familie $(\mu_i^e)_{i \in I}$. Nach [17, Lemma 1.2] ist p eine Sublinearform und majorisiert ν. Daher gilt für $i \in I$ und $g_i \in \mathbf{E}_i$

$$\mu_i^e(\pm g_i) = \nu(\pm g_i \circ f_i) \leq p(\pm g_i \circ f_i) \leq \mu_i^e(\pm g_i),$$

also

$$\mu_i^e(g_i) = \pm p(\pm g_i \circ f_i).$$

Daraus folgt der erste Teil der Behauptung.

Man sieht leicht, daß die Menge $\{g \in \mathbf{E} : p(g) = -p(-g)\}$ ein Vektorraum ist, der $\{g_i o f_i : i \in I,\ g_i \in \mathbf{E}_i\}$ und damit $\mathbf{F}$ enthält, und daß p, restringiert auf diesen Vektorraum, linear ist. Daraus folgt der zweite Teil. ⌋

2.5. **Lemma.** p *ist die obere Einhüllende der Menge* $\mathbf{M}$ *der gemeinsamen Urbildinhalte der Familie* $(\mu_i^e)_{i \in I}$, *und* $\mathbf{M}$ *ist die Menge aller von* p *majorisierten (positiven) Linearformen auf* $\mathbf{E}$.

Ist $\mathbf{M} \neq \emptyset$, *so gilt für alle* $g \in \mathbf{E}$:

$$p(g) = \max\{\nu(g) : \nu \in \mathbf{M}\}.$$

---

[3] Da die Bedingung 2.3 (iv) nur von $\mathfrak{F}^e$ abhängt, kann man in 2.3 (i) den Ring $\mathfrak{R}^e$ durch einen beliebigen Ring aus $\mathfrak{F}^e$-beschränkten Mengen ersetzen, der $\mathfrak{F}^e$ enthält (z. B. durch $\mathfrak{R}(\mathfrak{F}^e)$).

Weitere Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen Urbildinhalts der Familie $(\mu_i^e)_{i \in I}$ findet man in [17].

Das Lemma 2.3 beruht auf einem Ergebnis über die gemeinsame Fortsetzbarkeit positiver Linearformen (vgl. [17, § 1] sowie [18, Theorem 6.1] und [3, Corollary 6.6]).

Beweis. $M = \emptyset$ gilt genau dann, wenn $p \equiv -\infty$ ist (vgl. Lemma 2.3). In diesem Falle ist nichts zu zeigen.

Falls $M \neq \emptyset$ ist, ist p eine isotone Sublinearform, und M ist die Menge der von p majorisierten (positiven) Linearformen (vgl. [17, 1.2]). Nach einem Korollar zum Satz von Hahn-Banach gibt es zu $g \in E$ eine Linearform $\nu \leq p$ mit $\nu(g) = p(g)$. ⌟

2.6. *Für den Rest dieses Abschnitts sowie für die Abschnitte 3 und 4 setzen wir nun voraus, daß sämtliche Inhalte μ_i $(i \in I)$ reellwertig sind und daß $\mathfrak{R}$ und damit auch $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{F}_\cup$-beschränkt ist.*

Dann gilt $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^e$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^e$ sowie $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^e$, und E ist der Vektorraum der $\mathfrak{R}$-Treppenfunktionen. Daher können alle Inhalte uneingeschränkt mit positiven Linearformen identifiziert werden.

Es ist nun leicht, eine notwendige Bedingung für die Existenz eines $\mathfrak{K}$-regulären gemeinsamen Urbildinhalts der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ nachzuweisen. Es wird ein wesentliches Ziel dieser Arbeit sein, diese im folgenden Satz angegebene notwendige Bedingung durch Hinzunahme geeigneter Zusatzvoraussetzungen zu hinreichenden Bedingungen zu ergänzen.

2.7. Satz. *Besitzt die Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ einen $\mathfrak{K}$-regulären gemeinsamen Urbildinhalt, so gilt für alle $F \in \mathfrak{F}$*

$$\mu(F) = \sup\{p(K) : K \in \mathfrak{K},\ K \subset F\},$$

d. h. für alle $i \in I$ und alle $Q_i \in \mathfrak{Q}_i$ ist

$$\mu_i(Q_i) = \sup\{p(K) : K \in \mathfrak{K},\ f_i(K) \subset Q_i\}.$$

Beweis. Sei ν ein $\mathfrak{K}$-regulärer gemeinsamer Urbildinhalt der $(\mu_i)_{i \in I}$. Für jedes $i \in I$ und $Q_i \in \mathfrak{Q}_i$ gilt gemäß 2.5

$$\mu_i(Q_i) = \nu(f_i^{-1}(Q_i)) = \sup\{\nu(K) : K \in \mathfrak{K},\ K \subset f_i^{-1}(Q_i)\}$$
$$\leq \sup\{p(K) : K \in \mathfrak{K},\ K \subset f_i^{-1}(Q_i)\} \leq p(f_i^{-1}(Q_i)) \leq \mu_i(Q_i).$$ ⌟

3. Maximalität und Regularität

Gemäß 2.6 setzen wir auch in diesem Abschnitt voraus, daß die Inhalte μ_i $(i \in I)$ reellwertig sind und daß $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^e$, also auch $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^e$ gilt. Die Bezeichnungen aus 1.5, 1.6 und 2.1 werden übernommen.

M bezeichne die Menge aller gemeinsamen Urbildinhalte ν auf $\mathfrak{R}$ der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$. Um nun zu hinreichenden Bedingungen für die Existenz $\mathfrak{K}$-regulärer Elemente aus M zu gelangen, wollen wir ähnlich wie in [15] für Elemente aus M den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{K}$-Regularität und Maximalität bezüglich einer geeigneten Präordnung auf M untersuchen.

Wesentliches Hilfsmittel wird dabei die folgende Modifikation der Andenaesschen Version des Satzes von Hahn-Banach sein (vgl. Andenaes [1, Theorem 1] sowie Anger [2]).

3.1. **Lemma.** *Sei V_o ein linearer Teilraum eines Vektorraums V, S eine beliebige Teilmenge von V, p ein suplineares Funktional auf V sowie L_o eine p-dominierte Linearform auf V_o.*
$\leq_S$ bezeichne die durch

$$L \leq_S L' \Leftrightarrow L(s) \leq L'(s) \text{ für alle } s \in S$$

definierte Präordnung auf der Menge $M(L_o, p)$ aller p-dominierten linearen Fortsetzungen von L_o auf V.

Dann existiert zu jedem $L \in M(L_o, p)$ ein in $M(L_o, p)$ $\leq_S$-maximales Element $L_{max} \in M(L_o, p)$ mit $L \leq_S L_{max}$.

Beweis. Sei $M_L = \{L' \in M(L_o, p)\colon L \leq_S L'\}$. Dann gilt $L \in M_L$. Daher ist die auf V definierte Abbildung $p'\colon v \mapsto \sup \{L'(v)\colon L' \in M_L\}$ ein sublineares Funktional mit $p' \leq p$.

Nach dem Satz von Andenaes [1, Theorem 1] besitzt die Menge $M(L_o, p')$ ein $\leq_S$-maximales Element L^*. Für $s \in S$ gilt:

$$\begin{aligned} L^*(-s) \leq p'(-s) &= \sup \{L'(-s)\colon L' \in M_L\} \\ &= -\inf \{L'(s)\colon L' \in M_L\} = -L(s) \end{aligned}$$

und damit $L(s) \leq L^*(s)$. Daraus folgt $L^* \in M_L \subset M(L_o, p)$.

L^* ist aber sogar $\leq_S$-maximal in $M(L_o, p)$: Sei nämlich $L^* \leq_S L'$ für ein $L' \in M(L_o, p)$. Dann gilt $L \leq_S L'$, also $L' \in M_L$ und damit $L' \in M(L_o, p')$. Da L^* $\leq_S$-maximal in $M(L_o, p')$ ist, folgt daraus $L' \leq_S L^*$. Daher ist L^* auch $\leq_S$-maximal in $M(L_o, p)$.

$L_{max} = L^*$ hat damit die gewünschten Eigenschaften. ⌋

3.2. Wir wählen nun $V = \boldsymbol{E}$, $V_o = \{0\}$, $L_o = 0$ und $S = \{1_K \colon K \in \mathfrak{K}\}$; p sei der gemeinsame äußere Inhalt der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$. Anstelle von $\leq_S$ schreiben wir $\leq_{\mathfrak{K}}$.

Dann ist $\boldsymbol{M}(L_o, p)$ gerade die Menge $\boldsymbol{M}$ der gemeinsamen Urbildinhalte der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ (vgl. 2.5.). Für λ, $\nu \in \boldsymbol{M}$ gilt $\lambda \leq_{\mathfrak{K}} \nu$ genau dann, wenn $\lambda(K) \leq \nu(K)$ für alle $K \in \mathfrak{K}$ gilt.

Mit $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{K}}$ bzw. $\boldsymbol{M}_{reg}$ sei die Menge der $\leq_{\mathfrak{K}}$-maximalen bzw. $\mathfrak{K}$-regulären Elemente in $\boldsymbol{M}$ bezeichnet. Anstelle von „$\leq_{\mathfrak{K}}$-maximal" werden wir die Bezeichnung „$\mathfrak{K}$-*maximal*" verwenden.

3.3. **Satz.** (i) *Jeder $\mathfrak{K}$-reguläre gemeinsame Urbildinhalt der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ ist $\mathfrak{K}$-maximal.*

(ii) *Zu jedem gemeinsamen Urbildinhalt λ der $(\mu_i)_{i \in I}$ gibt es einen $\mathfrak{K}$-maximalen $\nu \in \boldsymbol{M}_{\mathfrak{K}}$ mit $\lambda \leq_{\mathfrak{K}} \nu$. Insbesondere folgt aus der Existenz irgendeines gemeinsamen Urbildinhalts die Existenz eines $\mathfrak{K}$-maximalen gemeinsamen Urbildinhalts.*

Beweis. (i) Sei $\nu \in \boldsymbol{M}_{reg}$ und $\lambda \in \boldsymbol{M}$ mit $\nu \leq_{\mathfrak{K}} \lambda$. Ferner sei $R \in \mathfrak{R}$ mit $R \subset F$ für ein $F \in \mathfrak{F}$. Dann ergibt sich

$$\nu(R) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset R}} \nu(K) \leq \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset R}} \lambda(K) \leq \lambda(R)$$

sowie

$$\nu(F \setminus R) \leq \lambda(F \setminus R).$$

Wegen $\nu, \lambda \in \boldsymbol{M}$ gilt $\nu(F) = \varphi(F) = \lambda(F)$ und damit $\nu(R) = \lambda(R)$.

Da $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{F}_{\cup}$-beschränkt ist (vgl. 2.6), folgt daraus $\nu(R) = \lambda(R)$ für alle $R \in \mathfrak{R}$, also insbesondere $\lambda \leq_{\mathfrak{K}} \nu$.

(ii) Ist $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$, so ist p eine Sublinearform auf $\boldsymbol{E}$. Die Behauptung folgt daher unmittelbar aus Lemma 3.1 unter Berücksichtigung von 3.2. $\lrcorner$

Unter den bisherigen Voraussetzungen kann man natürlich nicht erwarten, daß jeder $\mathfrak{K}$-maximale gemeinsame Urbildinhalt der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ auch $\mathfrak{K}$-regulär ist (falls $\mathfrak{K} = \{\emptyset\}$ gilt, ist die notwendige Bedingung aus Satz 2.7 z. B. nur erfüllt, wenn alle μ_i ($i \in I$) Nullinhalte sind). Es gilt jedoch bereits:

3.4. **Satz.** *$\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{E}$ bezeichne den von der Menge $\{1_K : K \in \mathfrak{K}\} \cup \boldsymbol{F}$ erzeugten konvexen Kegel und $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}$ den davon erzeugten Untervektorraum von $\boldsymbol{E}$.*

Ist dann $v \in \boldsymbol{M}_{\mathfrak{K}}$, so gilt für jedes $h \in \boldsymbol{H}$

$$v(h) = \sup_{\substack{c \in C \\ c \leq h}} v(c).$$

Beweis. Wir benutzen eine Schlußweise, die aus der Theorie der Choquetschen Darstellungssätze geläufig ist:

Für $g \in \boldsymbol{E}$ definieren wir $q(g) = \inf \{v(-c) : c \in \boldsymbol{C}, g \leq -c\}$. Wegen $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{C} \cap (-\boldsymbol{C})$, und da $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{F}_{\cup}$-beschränkt ist, ist q reellwertig und damit eine isotone Sublinearform auf $\boldsymbol{E}$.

Sei nun $h_o \in \boldsymbol{H}$ gewählt. Dann gibt es eine von q majorisierte positive Linearform λ auf $\boldsymbol{E}$ mit $\lambda(-h_o) = q(-h_o)$. Für $c \in \boldsymbol{C}$ gilt nach der Definition von q

$$\lambda(c) = -\lambda(-c) \geq -q(-c) \geq -v(-c) = v(c).$$

Daraus folgt wegen $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{C} \cap (-\boldsymbol{C})$: $\lambda(g) = v(g)$ für alle $g \in \boldsymbol{F}$. Somit ist $\lambda \in \boldsymbol{M}$. Außerdem folgt für alle $K \in \mathfrak{K}$ wegen $1_K \in \boldsymbol{C}$: $\lambda(K) \geq v(K)$. Daher ist $v \leq_{\mathfrak{K}} \lambda$ und somit $\lambda(K) = v(K)$ für alle $K \in \mathfrak{K}$ (wegen der $\mathfrak{K}$-Maximalität von v). Damit stimmen aber λ und v auf $\boldsymbol{H}$ überein, und es ergibt sich

$$v(h_o) = -\lambda(-h_o) = -q(-h_o) = -\inf\{v(-c) : c \in \boldsymbol{C}, -c \geq -h_o\} = \sup\{v(c) : c \in \boldsymbol{C}, c \leq h_o\}. \lrcorner$$

Die drei folgenden Lemmas haben den Zweck, zu mengentheoretischen Varianten des vorangehenden Satzes zu verhelfen. Dessen Bezeichnungen werden übernommen.

3.5. **Lemma.** *$\mathfrak{N}$ bezeichne das Mengensystem*

$$\mathfrak{N} = \{K \cap F \setminus F' : K \in \mathfrak{K} \cup \{X\};\ F, F' \in \mathfrak{F}\}.$$

Ist dann $c \in \boldsymbol{C}$, so liegt die Menge $\{c > 0\} = \{x \in X : c(x) > 0\}$ in $\mathfrak{N}_{(\cup,\cap)}$.

Beweis. Nach Definition von $\boldsymbol{C}$ gibt es ein $r \in \boldsymbol{N}$, Mengen $K_j \in \mathfrak{K}$ und $F_j, F'_j \in \mathfrak{F}$ sowie reelle Zahlen $\alpha_j, \beta_j, \beta'_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ mit

$$c = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j 1_{K_j} + \sum_{j=1}^{r} \beta_j 1_{F_j} - \sum_{j=1}^{r} \beta'_j 1_{F'_j}.$$

Für $x \in \{c > 0\}$ sei

$$\Gamma_x = \bigcap \{K_j : j = 1, \ldots, r; x \in K_j\} \cap \bigcap \{F_j : j = 1, \ldots, r; \\ x \in F_j\} \cap \bigcap \{X \setminus F_j' : j = 1, \ldots, r; x \notin F_j'\}.$$

Wir zeigen, daß $\{c > 0\} = \bigcup_{x \in \{c > 0\}} \Gamma_x$ ist:

Offenbar gilt $x \in \Gamma_x$ für alle $x \in \{c > 0\}$ und damit $\{c > 0\} \subset \bigcup_{x \in \{c>0\}} \Gamma_x$. Sei umgekehrt ein $y \in \bigcup_{x \in \{c>0\}} \Gamma_x$ gegeben. Dann gibt es ein $x \in \{c > 0\}$ mit $y \in \Gamma_x$. Für dieses x gilt $c(y) \geq c(x) > 0$ nach Definition von Γ_x. Somit folgt $\bigcup_{x \in \{c>0\}} \Gamma_x \subset \{c > 0\}$.

Wegen $\emptyset \in \mathfrak{N}$, und da nur endlich viele verschiedene Mengen Γ_x auftreten können, genügt es, für alle $x \in \{c > 0\}$ zu zeigen, daß $\Gamma_x \in \mathfrak{N}_{(\cap, \cup)}$ gilt.

Sei also $x \in \{c > 0\}$. Falls $x \in F_j$ gilt für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$, erkennt man leicht, daß $\Gamma_x \in \mathfrak{N}_\cap \subset \mathfrak{N}_{(\cap, \cup)}$ ist. Andernfalls folgt aus $c(x) > 0$, daß $x \in K_j$ für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ gelten muß. Gemäß 2.6 ist $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{F}_\cup$-beschränkt. Daher ergibt sich auch in diesem Falle $\Gamma_x \in (\mathfrak{N}_\cap)_\cup = \mathfrak{N}_{(\cap, \cup)}$. $\lrcorner$

3.6. **Lemma.** *Sei* $\mathfrak{H} = \{\{h > 0\} : h \in H\}$, *und* $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$ *sei der von* $\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}$ *erzeugte Ring. Dann gilt* $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{H}_{(\cup, \cap)}$.

Beweis. (i) Jede Funktion $h \in H$ ist eine $\mathfrak{R}_0$-Treppenfunktion; daraus folgt $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{R}_0$ und damit auch $\mathfrak{H}_{(\cup, \cap)} \subset \mathfrak{R}_0$.

(ii) Seien $R_1, R_2 \in \mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}$. Dann ist $R_1 \setminus R_2 = \{1_{R_1} - 1_{R_2} > 0\} \in \mathfrak{H}$. Man prüft leicht nach, daß $\mathfrak{R}_0 = \{R_1 \setminus R_2 : R_1, R_2 \in \mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}\}_{(\cup, \cap)}$ ist, und erhält damit $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{H}_{(\cup, \cap)}$. $\lrcorner$

3.7. **Lemma.** *Sei* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$ *und* λ *ein Inhalt auf* $\mathfrak{R}$.
Ist λ *dann* $\mathfrak{K}$*-regulär auf* $\mathfrak{M}$, *so ist* λ *auch* $\mathfrak{K}$*-regulär auf* $\mathfrak{M}_{(\cup, \cap)}$.

Der Beweis ist nicht schwierig und beruht auf den gleichen Ideen wie die entsprechenden Beweise aus Berberian [5, Section 59].

3.8. **Lemma.** *Es sei ein Mengensystem* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$ *gegeben, so daß die Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$*-regulär und* $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$*-stabil ist.* ν *sei ein* $\mathfrak{K}$*-maximaler gemeinsamer Urbildinhalt der* $(\mu_i)_{i \in I}$.

Dann gilt für jede $\mathfrak{K}$-beschränkte Menge $R_o \in \mathfrak{R}_o = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$

$$\nu(R_o) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset R_o}} \nu(K),$$

mit anderen Worten: ν ist $\mathfrak{K}$-regulär auf den $\mathfrak{K}$-beschränkten Mengen aus $\mathfrak{R}_o$.

Beweis. (i) Nach 3.6 und 3.7 genügt es, die Behauptung für alle Mengen $R_o = K_o \cap H_o$ mit $K_o \in \mathfrak{K}$ und $H_o \in \mathfrak{H}$ zu beweisen.

(ii) Zu $H_o \in \mathfrak{H}$ gibt es ein $h_o \in \boldsymbol{H}$ mit $H_o = \{h_o > 0\}$. Dabei können wir o. B. d. A. annehmen, daß $h_o(\{h_o > 0\}) \subset]1, \infty[$ gilt. Nach 3.4 ist $\nu(h_o) = \sup_{\substack{c \in \boldsymbol{C} \\ c \leq h_o}} \nu(c)$. Für $c \in \boldsymbol{C}$ mit $c \leq h_o$ gilt aber

$$0 \leq 1_{H_o} - 1_{\{c>0\}} \leq h_o - c, \quad \text{also} \quad \nu(H_o \setminus \{c > 0\}) \leq \nu(h_o - c).$$

Daraus folgt

$$\nu(H_o) = \sup_{\substack{c \in \boldsymbol{C} \\ \{c>0\} \subset H_o}} \nu(\{c > 0\})$$

und somit auch

$$\nu(R_o) = \sup_{\substack{c \in \boldsymbol{C} \\ \{c>0\} \subset H_o}} \nu(K_o \cap \{c > 0\}) \text{ für } K_o \in \mathfrak{K} \text{ und } R_o = K_o \cap H_o.$$

Es genügt daher, die Behauptung für alle Mengen $R_o = K_o \cap \{c_o > 0\}$ mit $K_o \in \mathfrak{K}$ und $c_o \in \boldsymbol{C}$ zu beweisen.

(iii) Gemäß 3.5 ist $\{c_o > 0\} \in \mathfrak{N}_{(\cup, \cap)}$. Setzen wir $\mathfrak{N}^{\mathfrak{K}} = \{K \cap F \setminus F' : K \in \mathfrak{K};\ F, F' \in \mathfrak{F}\}$, so ergibt sich daher aus der $\cap$-Stabilität von $\mathfrak{K}$, daß $R_o = K_o \cap \{c_o > 0\} \in \mathfrak{N}^{\mathfrak{K}}_{(\cup, \cap)}$ gilt. Nach 3.7 genügt es damit, die Behauptung für alle Mengen $R_o \in \mathfrak{N}^{\mathfrak{K}}$ zu beweisen.

(iv) Sei also $R_o = K_o \cap F \setminus F'$ mit $K_o \in \mathfrak{K}$ und $F, F' \in \mathfrak{F}$. Aufgrund der Regularitätsbedingung (R 1) aus Definition 1.8 existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{C}$ mit $\bigcup_{j=1}^{n} C_j \subset F$ und $\varphi(F) \leq \sum_{j=1}^{n} \varphi(C_j) + \varepsilon$.

Daraus folgt

$$\nu(R_0) - \nu(K_0 \cap \bigcup_{j=1}^{n} C_j \setminus F') = \nu((K_0 \setminus F') \cap (F \setminus \bigcup_{j=1}^{n} C_j))$$

$$\leq \nu(F \setminus \bigcup_{j=1}^{n} C_j) = \varphi(F) - \sum_{j=1}^{n} \varphi(C_j) \leq \varepsilon$$

und somit

$\nu(R_0) = \sup\{\nu(K_0 \cap \bigcup_{j=1}^{n} C_j \setminus F')\colon\ n \in \boldsymbol{N}, C_j \in \mathfrak{C}$ paarweise disjunkt mit $C_j \subset F\}$.

Da $\mathfrak{K}$ $\cup$-stabil und $\mathfrak{C}$-stabil ist, genügt es damit, die Behauptung für alle Mengen $R_0 = K \setminus F$ zu beweisen, wobei $K \in \mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$-beschränkt und $F \in \mathfrak{F}$ ist.

(v) Wegen der Regularitätsbedingung (R 2) aus 1.8 gibt es zu jeder $\mathfrak{C}$-beschränkten Menge $K \in \mathfrak{K}$ und jeder Menge $F \in \mathfrak{F}$ endlich viele Mengen $F_1, \ldots, F_n \in \mathfrak{F}^e = \mathfrak{F}$ mit $K \setminus F \subset \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ und

$$\varphi(F_j) \leq \varphi_*^{\mathfrak{C}}(F_j \setminus F) + \varphi_*^{\mathfrak{C}}(F_j \cap F)\ (j = 1, \ldots, n).$$

Daraus folgt gemäß 1.9 (ii) für $j = 1, \ldots, n$

$$\nu(F_j \setminus F) = \varphi_*^{\mathfrak{C}}(F_j \setminus F) = \sup\{\nu(D)\colon D \subset F_j \setminus F, D \in \mathfrak{D}\},$$

wobei $\mathfrak{D}$ das System der endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathfrak{C}$ bezeichnet.

Für $j = 1, \ldots, n$ sei $D_j \subset F_j \setminus F$ mit $D_j \in \mathfrak{D}$. Wegen der $\mathfrak{C}$- und der $\cup$-Stabilität von $\mathfrak{K}$ ergibt sich $\bigcup_{j=1}^{n} (K \cap D_j) \in \mathfrak{K}$, und es gilt

$$\bigcup_{j=1}^{n} (K \cap D_j) \subset \bigcup_{j=1}^{n} (K \cap F_j \setminus F) = K \setminus F \subset$$

$$\subset \bigcup_{j=1}^{n} (K \cap D_j) \cup \bigcup_{j=1}^{n} ((F_j \setminus F) \setminus D_j).$$

Somit folgt

$$\sup_{\substack{K' \in \mathfrak{K} \\ K' \subset K \setminus F}} \nu(K') \leq \nu(K \setminus F) \leq \inf\{\nu(\bigcup_{j=1}^{n} (K \cap D_j)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \nu((F_j \setminus F) \setminus D_j)\colon D_j \subset F_j \setminus F, D_j \in \mathfrak{D}\}$$

$$\leq \sup\{\nu(\bigcup_{j=1}^{n} (K \cap D_j))\colon D_j \subset F_j \setminus F, D_j \in \mathfrak{D}\} \leq \sup_{\substack{K' \in \mathfrak{K} \\ K' \subset K \setminus F}} \nu(K').$$

Damit ist die gewünschte Regularitätsbedingung für $R_0 = K \setminus F$ nachgewiesen. $\lrcorner$

3.9. **Satz.** *Sei* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\{\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}\}$. *Es existiere ein Mengensystem* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$, *so daß die Familie* $(\mu_i)_{i\in I}$ $\mathfrak{C}$-*regulär und* $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$-*stabil ist.*

Dann kann jeder $\mathfrak{K}$-*maximale gemeinsame Urbildinhalt* ν *der Familie* $(\mu_i)_{i\in I}$ *in eindeutiger Weise als Summe zweier Inhalte* ϱ *und* λ *auf* $\mathfrak{R}$ *dargestellt werden, derart daß* ϱ $\mathfrak{K}$-*regulär und* λ $\mathfrak{K}$-*diffus ist (d. h.* $\lambda(K) = 0$ *für alle* $K \in \mathfrak{K}$).

Für ϱ *gilt*

$$\varrho(R) = \sup_{\substack{K\in\mathfrak{K}\\ K\subset R}} \nu(K) \text{ für alle } R \in \mathfrak{R}.$$

Beweis. Falls eine Zerlegung der gewünschten Gestalt existiert, folgt aus $\lambda(K) = 0$ bereits $\varrho(K) = \nu(K)$ für alle $K \in \mathfrak{K}$ und damit $\varrho(R) = \sup\limits_{\substack{K\in\mathfrak{K}\\ K\subset R}} \nu(K)$. Daher ist die Zerlegung eindeutig.

Um nun die Existenz einer solchen Zerlegung nachzuweisen, müssen wir nur zeigen, daß durch $\varrho(R) = \sup\limits_{\substack{K\in\mathfrak{K}\\ K\subset R}} \nu(K)$ $(R \in \mathfrak{R})$ ein Inhalt ϱ auf $\mathfrak{R}$ definiert wird:

Seien $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}$ zwei disjunkte Mengen. Dann gilt für jede Menge $K_0 \in \mathfrak{K}$ mit $K_0 \subset R_1 \cup R_2$ gemäß Lemma 3.8

$$\begin{aligned}\nu(K_0) &= \nu(K_0 \cap R_1) + \nu(K_0 \cap R_2)\\ &= \sup_{\substack{K\in\mathfrak{K}\\ K\subset K_0\cap R_1}} \nu(K) + \sup_{\substack{K'\in\mathfrak{K}\\ K'\subset K_0\cap R_2}} \nu(K') \leq \varrho(R_1) + \varrho(R_2).\end{aligned}$$

Daraus folgt $\varrho(R_1 \cup R_2) \leq \varrho(R_1) + \varrho(R_2)$. Die umgekehrte Abschätzung ist trivial. $\lrcorner$

3.10. **Definition.** Der zu ν definierte $\mathfrak{K}$-reguläre Inhalt ϱ aus Satz 3.9 heiße $\mathfrak{K}$-*regulärer Anteil* von ν.

3.11. **Bemerkung.** Für den Fall einer einelementigen Indexmenge haben wir in [15, Satz 5.7] gezeigt, daß man den *Ausgangsinhalt* μ eindeutig in einen maximalen Anteil μ_r, zu dem ein $\mathfrak{K}$-regulärer Urbildinhalt existiert, und einen diffusen Rest zerlegen kann.

Man kann zeigen, daß ein analoger Zerlegungssatz für die *Ausgangsinhalte* bereits bei zweielementigen Indexmengen I nicht mehr allgemein richtig ist. Das beruht auf der Tatsache, daß sich in der Situation von Satz 3.9 bei einelementiger Indexmenge für alle $\nu \in M_{\mathfrak{K}}$ derselbe Bildinhalt $f_i(\varrho)$ des $\mathfrak{K}$-regulären Anteils ϱ von ν ergibt, nämlich der oben erwähnte Anteil $(\mu_i)_r = \mu_r$ des Ausgangsinhalts. Bei mehrelementiger Indexmenge ist dagegen die Familie $(f_i(\varrho))_{i \in I}$ im allgemeinen abhängig von der speziellen Wahl von $\nu \in M_{\mathfrak{K}}$.

4. Existenzsätze

Wir kommen nun zu den wesentlichen Ergebnissen dieser Arbeit, den hinreichenden Bedingungen für die Existenz $\mathfrak{K}$-regulärer gemeinsamer Urbildinhalte. Zum Beweis der beiden Hauptsätze 4.1 und 4.7 werden wir den Zerlegungssatz 3.9 heranziehen und jeweils zeigen, daß es einen $\mathfrak{K}$-maximalen gemeinsamen Urbildinhalt gibt, der mit seinem $\mathfrak{K}$-regulären Anteil übereinstimmt und damit selbst $\mathfrak{K}$-regulär ist.

Wir setzen auch in diesem Abschnitt voraus, daß die Inhalte μ_i $(i \in I)$ endlich sind und daß $\mathfrak{R}$ und damit auch $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{F}_{\cup}$-beschränkt ist. Die Bezeichnungen M, $M_{\mathfrak{K}}$ und M_{reg} werden in derselben Bedeutung wie in 3.2 verwendet.

4.1. Satz. *Sei* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$. *Es existiere ein Mengensystem* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$, *so daß die Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$-*regulär und* $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$-*stabil ist. Dann ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend für die Existenz eines* $\mathfrak{K}$-*regulären gemeinsamen Urbildinhalts der Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$:

(*) *Es gibt ein Mengensystem* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$ *sowie einen gemeinsamen Urbildinhalt* ν *der* $(\mu_i)_{i \in I}$, *so daß* $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{E}_{\cup}$-*beschränkt und* ν *auf* $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{K}$-*regulär ist, d. h.*

$$\nu(E) = \sup \{\nu(K) : K \in \mathfrak{K}, K \subset E\} \text{ für alle } E \in \mathfrak{E}.$$

Beweis. Um einzusehen, daß die Bedingung (*) notwendig ist, wähle man $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}$ sowie $\nu \in M_{reg}$.

Umgekehrt gibt es gemäß 3.3 ein $\nu' \in M_{\mathfrak{K}}$ mit $\nu \leq_{\mathfrak{K}} \nu'$. Für alle $E \in \mathfrak{E}$ gilt

$$\nu'(E) = \varphi(E) = \nu(E) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset E}} \nu(K) \leq \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset E}} \nu'(K) \leq \nu'(E).$$

Wir können daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß bereits $\nu = \nu' \in M_{\mathfrak{K}}$ gilt.

Sei ϱ der $\mathfrak{K}$-reguläre Anteil von ν (vgl. 3.9 und 3.10). Nach Voraussetzung ist $\varrho(E) = \nu(E)$ für alle $E \in \mathfrak{E}$. Wegen $\varrho \leq \nu$ folgt daraus $\varrho(R) = \nu(R)$ für alle $\mathfrak{E}$-beschränkten und daher auch für alle $\mathfrak{E}_{\cup}$-beschränkten Mengen $R \in \mathfrak{R}$, insbesondere also für alle $R \in \mathfrak{D}$, dem System der endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathfrak{E}$. Die $\mathfrak{E}$-Regularität der $(\mu_i)_{i \in I}$ ergibt für jedes $F \in \mathfrak{F}$

$$\nu(F) \leq \varphi_*^{\mathfrak{E}}(F) = \sup_{\substack{D \in \mathfrak{D} \\ D \subset F}} \nu(D) = \sup_{\substack{D \in \mathfrak{D} \\ D \subset F}} \varrho(D) \leq \varrho(F) \leq \nu(F).$$

Da $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{F}_{\cup}$-beschränkt ist, folgt daraus $\nu = \varrho$. $\lrcorner$

4.2. **Bemerkungen.** (i) Im Beweis von Satz 4.1 wurde sogar gezeigt: *Jedes $\nu \in M_{\mathfrak{K}}$, das die Bedingung* (*) *erfüllt, ist $\mathfrak{K}$-regulär.*

(ii) Man kann die Bedingung 4.1(*) durch die folgende Bedingung ersetzen:

(**) *Es gibt Mengensysteme $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{R}$ sowie eine von p majorisierte Linearform ν' auf dem von $\{1_S \colon S \in \mathfrak{K}' \cup \mathfrak{E}\}$ erzeugten Vektorraum, so daß $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{E}_{\cup}$-beschränkt ist und so daß für alle $E \in \mathfrak{E}$ gilt*

$$\nu'(1_E) = \sup_{\substack{K' \in \mathfrak{K}' \\ K' \subset E}} \nu'(1_{K'}).$$

Man kann nämlich ν' zu einem Inhalt $\nu \in M$ fortsetzen (vgl. die Eigenschaften von p in Abschnitt 2). $\mathfrak{E}$ und ν erfüllen 4.1 (*).

(iii) Man kann sich fragen, ob man die Regularitätsbedingung in 4.1 (*) ersetzen kann durch die folgende gemäß 2.7 notwendige Bedingung für die Existenz eines $\mathfrak{K}$-regulären gemeinsamen Urbildinhalts:

(***) $\varphi(E) = \sup\{p(K) \colon K \in \mathfrak{K}, K \subset E\}$ für alle $E \in \mathfrak{E}$.

Im Falle einer einelementigen Indexmenge I haben wir in [15] unter leicht modifizierten Voraussetzungen bewiesen, daß es in der Tat genügt, (***) anstelle von (*) zu fordern (man vgl. [15, 6.7.1 sowie 5.6] und beachte $p = \mu^* \circ f$). Das folgende Ergebnis legt es nahe, zu vermuten, daß diese Verschärfung von Satz 4.1 auch allgemein gültig ist:

Seien alle Ringe $\mathfrak{Q}_i$, $\mathfrak{R}$ Algebren. Ferner seien die Voraussetzungen von Satz 4.1 mit (***) anstelle der Regularitätsbedingung in 4.1 (*) erfüllt. Dann kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\nu_\varepsilon \in M_{\mathfrak{K}}$ finden mit

$$\nu_\varepsilon(R) \leq \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset R}} \nu_\varepsilon(K) + \varepsilon \text{ für alle } R \in \mathfrak{R},$$

d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein ($\mathfrak{K}$-maximaler) gemeinsamer Urbildinhalt der $(\mu_i)_{i \in I}$, der $\mathfrak{K}$-regulär ist bis auf einen Fehler von höchstens ε.

Wir wollen auf den Beweis dieses Ergebnisses, das auf Lemma 3.1 und Satz 3.9 beruht, nicht näher eingehen. Es wird sich nämlich herausstellen, daß die oben beschriebene modifizierte Form von Satz 4.1 selbst für Algebren im allgemeinen nicht richtig ist. Bevor wir dazu in 4.11 ein Gegenbeispiel bringen, wollen wir in den folgenden Anwendungen von Satz 4.1 einige Spezialfälle kennenlernen, bei denen die Bedingung (***) in Verbindung mit weiteren Voraussetzungen tatsächlich hinreichend ist für die Existenz eines $\mathfrak{K}$-regulären gemeinsamen Urbildinhalts (vgl. auch Abschnitt 7).

4.3. Satz. *Sei der Gesamtraum* $X \in \mathfrak{F}$, *und sei* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$. *Es existiere ein Mengensystem* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$, *so daß die Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$-*regulär und* $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$-*stabil ist. Ferner besitze* $\mathfrak{K}$ *ein bezüglich der Inklusion größtes Element* K_0.

Genau dann existiert ein $\mathfrak{K}$-*regulärer gemeinsamer Urbildinhalt der* $(\mu_i)_{i \in I}$, *wenn* $\varphi(X) = p(K_0)$ *ist.*

Beweis. (i) Für $\nu \in M_{reg}$ muß gelten:

$$\nu(X) = \sup_{K \in \mathfrak{K}} \nu(K) = \nu(K_0) \leq p(K_0) \leq \varphi(X) = \nu(X).$$

Daher ist die Bedingung notwendig.

(ii) Sei $\varphi(X) = p(K_0)$. Daraus folgt $p(K_0) > -\infty$, also $M \neq \emptyset$ nach Lemma 2.3. Daher gibt es ein $\nu \in M$ mit $\nu(K_0) = p(K_0)$ (Lemma 2.5). Für dieses ν sowie $\mathfrak{C} = \{X\}$ ist die Bedingung 4.1 (*) erfüllt; denn $\nu(X) = \varphi(X) = p(K_0) = \nu(K_0) = \sup_{K \in \mathfrak{K}} \nu(K)$.

Gemäß 4.1 ist damit die Bedingung $\varphi(X) = p(K_0)$ auch hinreichend. $\lrcorner$

4.4. **Korollar.** *Sei X eine endliche Menge mit $X \in \mathfrak{F}$, und sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$. Es existiere ein Mengensystem $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$, so daß die Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$-regulär und $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$-stabil ist.*

Dann ist die Bedingung

$$\varphi(X) = \sup_{K \in \mathfrak{K}} p(K)$$

notwendig und hinreichend für die Existenz eines $\mathfrak{K}$-regulären gemeinsamen Urbildinhalts der $(\mu_i)_{i \in I}$.

Beweis. Da X endlich ist, ist auch $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{P}(X)$ endlich. Da $\mathfrak{K}$ $\cup$-stabil ist, gilt $K_0 = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K \in \mathfrak{K}$. Daher ist K_0 das größte Element von $\mathfrak{K}$ mit $p(K_0) = \sup_{K \in \mathfrak{K}} p(K)$. Somit folgt die Behauptung direkt aus 4.3. $\lrcorner$

4.5. **Satz.** *Sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$. Es existiere ein Mengensystem $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{K} \cap \mathfrak{F}$, so daß die Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$-regulär ist.*

Dann existiert ein $\mathfrak{K}$-regulärer gemeinsamer Urbildinhalt der $(\mu_i)_{i \in I}$, falls irgendein gemeinsamer Urbildinhalt der $(\mu_i)_{i \in I}$ existiert.

Beweis. Da $\mathfrak{K}$ $\cap$-stabil ist, ist $\mathfrak{K}$ auch $\mathfrak{C}$-stabil. Daher können wir Satz 4.1 für ein $\nu \in M$ sowie $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}$ anwenden. $\lrcorner$

Bevor wir zum Hauptresultat dieses Abschnitts kommen, benötigen wir noch das folgende Lemma:

4.6. **Lemma.** *Die Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ sei $\mathfrak{C}$-regulär für ein Mengensystem $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$. λ sei ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$, zu dem ein gemeinsamer Urbildinhalt $\nu \in M$ der $(\mu_i)_{i \in I}$ existiert mit $\lambda \leq \nu$ (d. h. $\lambda(R) \leq \nu(R)$ für alle $R \in \mathfrak{R}$).*

Dann ist auch die Familie $(f_i(\lambda))_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$-regulär.

Beweis. Trivialerweise ist λ ein gemeinsamer Urbildinhalt der Familie $(f_i(\lambda))_{i \in I}$. Daher ist die φ entsprechende Abbildung φ_λ: $\mathfrak{F} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ wohldefiniert mit $\varphi_\lambda(F) = f_i(\lambda)(Q_i) = \lambda(F)$ für $i \in I$, $Q_i \in \mathfrak{Q}_i$ und $F = f_i^{-1}(Q_i)$.

Sei $\varphi_* = \varphi_*^{\mathfrak{C}}$ sowie $(\varphi_\lambda)_* = (\varphi_\lambda)_*^{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{D}$ sei das System der endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathfrak{C}$.

Für jede Menge $R \in \mathfrak{R}$ gilt dann

$$\text{(I)}\ (\varphi_\lambda)_*(R) = \sup_{\substack{D\in\mathfrak{D}\\ D\subset R}} \lambda(D) = \sup_{\substack{D\in\mathfrak{D}\\ D\subset R}} [\nu(D) - (\nu-\lambda)(D)]$$
$$\geq \sup_{\substack{D\in\mathfrak{D}\\ D\subset R}} \nu(D) - (\nu-\lambda)(R) = \varphi_*(R) - (\nu-\lambda)(R).$$

Für jedes $F \in \mathfrak{F}$ ergibt sich daraus

$$\varphi_\lambda(F) = \lambda(F) = \nu(F) - (\nu-\lambda)(F) \leq \varphi_*(F) - (\nu-\lambda)(F)$$
$$\leq (\varphi_\lambda)_*(F).$$

Damit ist (R 1) für die $(f_i(\lambda))_{i\in I}$ bewiesen.

Seien nun eine Menge $F \in \mathfrak{F}$ und eine $\mathfrak{C}$-beschränkte Menge $K \in \mathfrak{K}$ gegeben. Nach (R 2) für die Familie $(\mu_i)_{i\in I}$ gibt es endlich viele Mengen $F_1, \ldots, F_n \in \mathfrak{F}^e = \mathfrak{F}$ mit $K \setminus F \subset \bigcup_{j=1}^{n} F_j$, so daß für $j = 1, \ldots, n$ gilt

$$\varphi(F_j) \leq \varphi_*(F_j \setminus F) + \varphi_*(F_j \cap F).$$

Gemäß (I) folgt daraus für $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(F_j) &= \lambda(F_j) = \nu(F_j) - (\nu-\lambda)(F_j)\\ &= \varphi(F_j) - (\nu-\lambda)(F_j\setminus F) - (\nu-\lambda)(F_j \cap F)\\ &\leq [\varphi_*(F_j\setminus F) - (\nu-\lambda)(F_j\setminus F)] +\\ &\qquad + [\varphi_*(F_j\cap F) - (\nu-\lambda)(F_j\cap F)]\\ &\leq (\varphi_\lambda)_*(F_j\setminus F) + (\varphi_\lambda)_*(F_j\cap F).\end{aligned}$$

Damit ist auch (R 2) für die Familie $(f_i(\lambda))_{i\in I}$ gezeigt. ⌋

4.7. Satz. *Sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$. Es existiere ein Mengensystem $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$, so daß die Familie $(\mu_i)_{i\in I}$ $\mathfrak{C}$-regulär und $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$-stabil ist.*

Dann ist die folgende Bedingung hinreichend für die Existenz eines $\mathfrak{K}$-regulären gemeinsamen Urbildinhalts der $(\mu_i)_{i\in I}$:

Es gibt ein Mengensystem $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$ mit den Eigenschaften

(i) *$\mathfrak{C}$ ist $\mathfrak{E}_\cup$-beschränkt;*

(ii) *zu $E \in \mathfrak{E}$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Menge $K \in \mathfrak{K}$ mit $K \subset E$ und $\varphi(E) \leq p(K) + \varepsilon$, so daß für je zwei Funktionen $g_1, g_2 \in \boldsymbol{F}$ mit $g_1, g_2 \geq 1_K$ ein $g \in \boldsymbol{F}$ existiert mit $g \geq 1_K$ und $p((g - g_j)^+) \leq \varepsilon$ $(j = 1,2)$.*

Beweis. (a) Aus (ii) folgt $p(K) > -\infty$ für ein $K \in \mathfrak{K}$ und daher $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$, also auch $\boldsymbol{M}_\mathfrak{K} \neq \emptyset$ (vgl. 2.3 und 3.3 (ii)). Sei

$\nu \in M_{\mathfrak{K}}$ und ϱ der $\mathfrak{K}$-reguläre Anteil von ν (vgl. 3.9, 3.10), ferner sei $\lambda = \nu - \varrho$. Für $i \in I$ sei $\sigma_i = f_i(\varrho)$ und $\chi_i = f_i(\lambda)$; p_ϱ bzw. p_λ bezeichne den gemeinsamen äußeren Inhalt zur Familie $(\sigma_i)_{i \in I}$ bzw. $(\chi_i)_{i \in I}$.

Nach Lemma 4.6 sind beide Familien $\mathfrak{C}$-regulär; außerdem besitzt jede trivialerweise einen gemeinsamen Urbildinhalt.

(b) Wir zeigen für alle $K \in \mathfrak{K}$, daß $p_\lambda(K) = 0$ ist:

Zu $K_0 \in \mathfrak{K}$ gibt es einen gemeinsamen Urbildinhalt λ_0 der $(\chi_i)_{i \in I}$ mit $\lambda_0(K_0) = p_\lambda(K_0)$ (2.5). Nun ist auch $\nu_0 = \varrho + \lambda_0 \in M$, und für $K \in \mathfrak{K}$ gilt $\nu_0(K) = \varrho(K) + \lambda_0(K) \geq \varrho(K) = \nu(K)$. Folglich ist $\nu_0 \,{}_{\mathfrak{K}}{\geq}\, \nu$. Wegen $\nu \in M_{\mathfrak{K}}$ ergibt sich daraus $\nu_0(K) = \nu(K) = \varrho(K)$, also $\lambda_0(K) = 0$ für alle $K \in \mathfrak{K}$. Daher ist $p_\lambda(K_0) = \lambda_0(K_0) = 0$.

(c) Sei $E \in \mathfrak{E}$. Wir wollen zeigen, daß $\varrho(E) = \nu(E)$ ist:

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Menge $K \in \mathfrak{K}$, $K \subset E$ mit den in (ii) beschriebenen Eigenschaften. Nach Definition des gemeinsamen äußeren Inhalts gibt es zwei Funktionen $g_1, g_2 \in \boldsymbol{F}$ mit $g_1, g_2 \geq 1_K$ sowie $\varrho(g_1) \leq p_\varrho(K) + \varepsilon$ und $\lambda(g_2) \leq p_\lambda(K) + \varepsilon$. Gemäß (ii) gibt es dann ein $g \in \boldsymbol{F}$, $g \geq 1_K$ mit $p((g - g_j)^+) \leq \varepsilon$ $(j = 1,2)$. Daraus folgt wegen (b) und (ii)

$$\begin{aligned}
\varrho(E) = p_\varrho(E) \geq p_\varrho(K) &= p_\varrho(K) + p_\lambda(K) \\
&\geq \varrho(g_1) + \lambda(g_2) - 2\,\varepsilon \\
&\geq \varrho(g) - \varrho((g - g_1)^+) + \lambda(g) - \lambda((g - g_2)^+) - 2\,\varepsilon \\
&\geq \nu(g) - \nu((g - g_1)^+) - \nu((g - g_2)^+) - 2\,\varepsilon \\
&\geq p(g) - p((g - g_1)^+) - p((g - g_2)^+) - 2\,\varepsilon \\
&\geq p(K) - 4\,\varepsilon \geq \varphi(E) - 5\,\varepsilon = \nu(E) - 5\,\varepsilon \geq \varrho(E) - 5\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist $\nu(E) = \varrho(E)$.

(d) Nach (c) und Satz 3.9 ist ν $\mathfrak{K}$-regulär auf $\mathfrak{E}$. ν und $\mathfrak{E}$ erfüllen daher die Voraussetzungen von Satz 4.1. $\lrcorner$

4.8. **Korollar.** *Sei* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$. *Es existiere ein Mengensystem* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$, *so daß die Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$-*regulär und* $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$-*stabil ist.*

Dann existiert ein $\mathfrak{K}$-*regulärer gemeinsamer Urbildinhalt der* $(\mu_i)_{i \in I}$, *falls es zwei Mengensysteme* $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$ *gibt mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mathfrak{C}$ *ist* $\mathfrak{C}_{\cup}$*-beschränkt*;

(ii) $\varphi(E) = \sup\limits_{\substack{K' \in \mathfrak{K}' \\ K' \subset E}} p(K')$ *für alle* $E \in \mathfrak{C}$;

(iii) *für jedes* $K' \in \mathfrak{K}'$ *ist die Menge* $\{f \in \boldsymbol{F} : f \geq 1_{K'}\}$ *absteigend filtrierend.*

Beweis. Es genügt, für $\mathfrak{C}$ die Bedingung 4.7 (ii) nachzuweisen: Seien $E \in \mathfrak{C}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $K \in \mathfrak{K}'$ mit $\varphi(E) \leq p(K) + \varepsilon$ gemäß (ii). Nach (iii) gibt es zu $g_1, g_2 \in \boldsymbol{F}$ mit $g_1, g_2 \geq 1_K$ ein $g \in \boldsymbol{F}$ mit $1_K \leq g \leq g_j$ $(j = 1,2)$. Für dieses g ist offenbar $(g - g_j)^+ = 0$, also auch $p((g - g_j)^+) \leq 0 < \varepsilon$. ⌋

4.9. **Korollar.** *Sei* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$. *Der Vektorraum* $\boldsymbol{F}$ *sei ein Untervektorverband von* $\boldsymbol{E}$ *bezüglich der punktweisen Ordnung. Ferner existiere ein Mengensystem* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$, *so daß* $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ $\mathfrak{C}$*-regulär und* $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$*-stabil ist.*

Dann sind äquivalent:

(i) *Es gibt einen* $\mathfrak{K}$*-regulären gemeinsamen Urbildinhalt der* $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$.

(ii) $\varphi(F) = \sup\limits_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset F}} p(K)$ *für alle* $F \in \mathfrak{F}$.

(iii) *Es gibt ein Mengensystem* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$, *so daß* $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{C}_{\cup}$*-beschränkt ist, mit*

$$\varphi(E) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset E}} p(K) \text{ für alle } E \in \mathfrak{C}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 2.7 und Korollar 4.8. ⌋

4.10. **Bemerkungen.** (1) Im Satz 4.7 wurde für einen beliebigen Inhalt $\nu \in M_{\mathfrak{K}}$ gezeigt, daß ν und $\mathfrak{C}$ die Voraussetzungen von Satz 4.1 erfüllen. In Verbindung mit Bemerkung 4.2 (i) folgt daraus $M_{\mathfrak{K}} \subset M_{reg}$. Gemäß 3.3 (i) gilt auch die umgekehrte Inklusion. Folglich ist $M_{\mathfrak{K}} = M_{reg}$ unter den Voraussetzungen von Satz 4.7.

(2) Wir werden im Beispiel 4.11 zeigen, daß man im Korollar 4.8 nicht ersatzlos auf die Bedingung (iii) verzichten kann.

(3) Der Satz 4.5 läßt sich auch leicht mit Hilfe von 4.8 anstelle von 4.1 beweisen. Die Ergebnisse 4.3 und 4.4 folgen dagegen nicht einmal aus 4.7. Man kann nämlich ein einfaches Beispiel (mit vierelementigen Mengen X und Y_i) finden, bei dem $\emptyset \neq M_{reg} \subsetneqq M_{\mathfrak{K}}$ gilt. Gemäß (1) ist dies unter den Voraussetzungen von 4.7 unmöglich.

(4) Der Vektorraum $\boldsymbol{F}$ ist insbesondere dann ein Untervektorverband von $\boldsymbol{E}$, wenn die Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ eine projektive Familie von Inhalten im Sinne von [17, Beispiel 2.4] ist. Überdies läßt sich in diesem Falle der gemeinsame äußere Inhalt p besonders einfach berechnen [ibid.]. Wir werden im Abschnitt 7 noch näher auf die Behandlung projektiver Familien eingehen.

Ein wichtiger Spezialfall der projektiven Familie ist der der einelementigen Indexmenge I, wie er in [15] untersucht wird. Mit Hilfe von [17, Beispiel 2.4] ist es möglich, aus den vorangehenden Sätzen und den entsprechenden Ergebnissen der folgenden Abschnitte die wesentlichen Resultate von [15] abzuleiten.

(5) In den vorangehenden Sätzen war meist $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$ vorausgesetzt worden. Durch Standardprozesse der Maßtheorie ist es ohne weiteres möglich, auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$ existierende $\mathfrak{K}$-reguläre gemeinsame Urbildinhalte zu $\mathfrak{K}$-regulären gemeinsamen Urbildinhalten auf geeigneten größeren Ringen fortzusetzen; außerdem ist es möglich, die Endlichkeitsvoraussetzung 2.6 abzuschwächen. Wir werden auf diesen Problemkreis im folgenden Abschnitt bei der Behandlung σ-additiver gemeinsamer Urbildinhalte näher eingehen. Die dort verwendeten Methoden lassen sich in modifizierter Form auf den hier betrachteten Fall endlich additiver Inhalte übertragen.

Wir wollen nun das in den Bemerkungen 4.2 (iii) und 4.10 (2) angekündigte Beispiel behandeln, aus dem hervorgeht, daß das Korollar 4.8 falsch wird, wenn wir dort auf die Bedingung (iii) verzichten. Aufgrund von 4.4 ist es dabei klar, daß der Grundraum X des Beispiels nicht endlich sein darf.

4.11. **Beispiel.** Wir wählen als Raum X (vgl. die Skizze auf S. 88) die Vereinigung $X = A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta$ von vier disjunkten Mengen A, B, Γ, Δ. Dabei sei $\Delta = \{\delta\}$ einelementig;

$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ und $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ seien abzählbar unendlich; Γ sei das kartesische Produkt $\Gamma = \prod_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$ der $(2^k + 1)$-elementigen Mengen $\Gamma_k = \{\gamma_{k0}, \gamma_{k1}, \ldots, \gamma_{k2^k}\}$. Für $k \in \boldsymbol{N}$ und $j \in \{0, 1, \ldots, 2^k\}$ sei $p_k \colon \Gamma \to \Gamma_k$ die k-te Projektion sowie $G_{kj} = p_k^{-1}(\gamma_{kj}) \subset \Gamma$. Als Indexmenge I wählen wir

$$I = \{A, \Gamma\} \cup \{\{\beta_k\} \cup G_{kj} \colon k \in \boldsymbol{N}, j = 1, \ldots, 2^k\} \cup \\ \cup \{\{\alpha_k\} \cup (\Gamma \setminus G_{k0}) \colon k \in \boldsymbol{N}\} \subset \mathfrak{P}(X).$$

Für $S \in I$ ist $\mathfrak{Q}_S = \{\emptyset, S, X \setminus S, X\}$ eine Algebra auf der Menge $Y_S = X$. Wir wählen für $f_S \colon X \to Y_S$ die identische Abbildung von X. μ_S bezeichne den eindeutig bestimmten Inhalt auf $\mathfrak{Q}_S$ mit $\mu_S(X) = 3$ sowie $\mu_S(S) = 2^{-k}$ für $S = \{\beta_k\} \cup G_{kj}$ ($k \in \boldsymbol{N}, j = 1, \ldots, 2^k$) bzw. $\mu_S(S) = 1$ für $S \in \{A, \Gamma\} \cup \{\{\alpha_k\} \cup (\Gamma \setminus G_{k0}) \colon k \in \boldsymbol{N}\}$. Ferner sei

$$\mathfrak{M} = \{\Delta\} \cup \{\{\alpha_k\} \colon k \in \boldsymbol{N}\} \cup \{G_{kj} \colon k \in \boldsymbol{N}, j = 0, \ldots, 2^k\} \subset \\ \subset \mathfrak{P}(X),$$

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}_{(\cup, \cap)}, \ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}\Big(\mathfrak{K} \cup \bigcup_{S \in I} f_S^{-1}(\mathfrak{Q}_S)\Big) = \mathfrak{R}\Big(\mathfrak{K} \cup \bigcup_{S \in I} \mathfrak{Q}^S\Big) \text{ sowie}$$

$\mathfrak{C} = \bigcup_{S \in I} f_S^{-1}(\mathfrak{Q}_S) = \bigcup_{S \in I} \mathfrak{Q}_S$, p bezeichne den gemeinsamen äußeren Inhalt der Familie $(\mu_S)_{S \in I}$.

I. Wir wollen zunächst zeigen, daß die Familie $(\mu_S)_{S \in I}$ sämtliche Voraussetzungen des Korollars 4.8 mit Ausnahme der Bedingung 4.8 (iii) erfüllt. Das Ergebnis (c) wird uns dabei einen ausreichend guten Überblick über die Menge aller gemeinsamen Urbildinhalte der $(\mu_S)_{S \in I}$ ermöglichen.

(a) *Offenbar ist die Verträglichkeitsbedingung* 1.6 *erfüllt, und die Familie* $(\mu_S)_{S \in I}$ *ist $\mathfrak{C}$-regulär* wegen 1.11 (b).

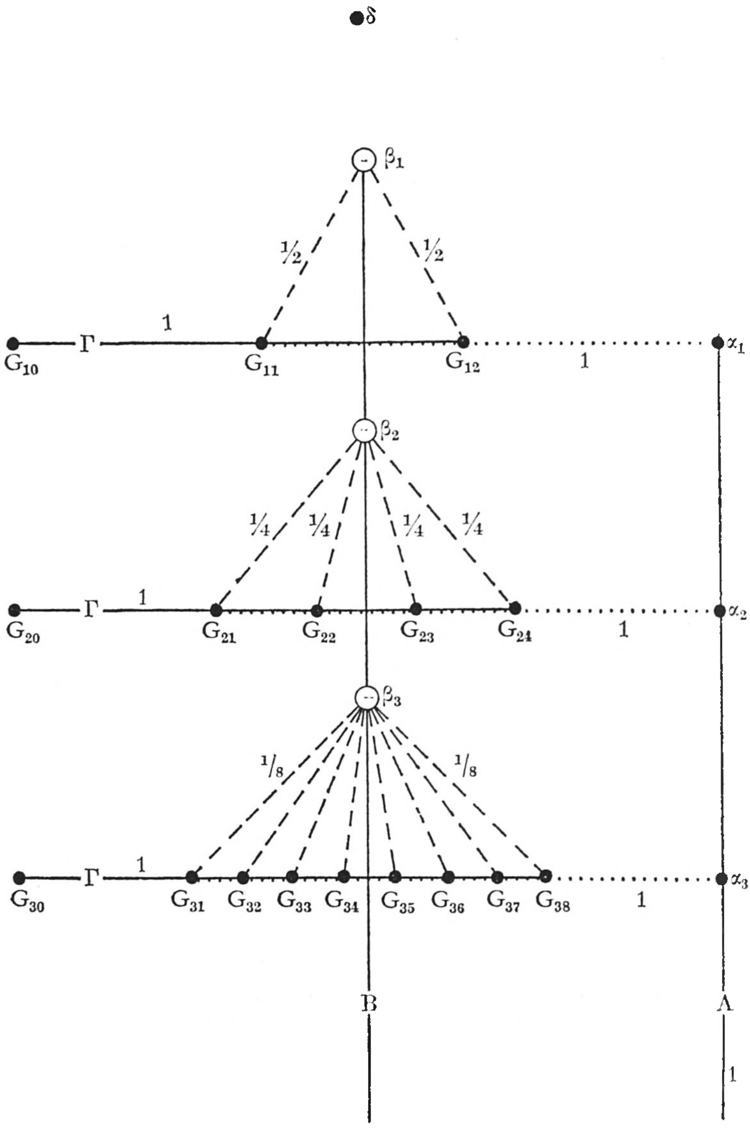
(b) $\mathfrak{K}$ *ist $\mathfrak{C}$-stabil, und es gilt* $\emptyset \in \mathfrak{K}$:

Wegen $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}_{(\cup, \cap)}$ genügt es zum Nachweis der $\mathfrak{C}$-Stabilität von $\mathfrak{K}$, für alle $C \in \mathfrak{C}$, $M \in \mathfrak{M}$ zu zeigen, daß $C \cap M \in \mathfrak{K}$ gilt. Das läßt sich aber ohne besondere Schwierigkeiten direkt nachprüfen.

Für die Mengen $\{\alpha_1\}$, $\Delta \in \mathfrak{M}$ gilt $\emptyset = \{\alpha_1\} \cap \Delta \in \mathfrak{M}_\cap \subset \mathfrak{K}$.

Skizze der Menge X mit vorgegebenen Werten für φ.

(Man beachte, daß die Menge Γ mehrfach auftritt wegen
$\Gamma = \bigcup_{j=o}^{2^k} G_{kj}$ für alle $k \in \boldsymbol{N}$).



(c) *Zu jeder Folge* $\varrho = (\varrho_k)_{k \in N}$ *positiver reeller Zahlen mit* $\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k = 1$ *gibt es einen gemeinsamen Urbildinhalt* ν_ϱ *der* $(\mu_S)_{S \in I}$ *auf* $\mathfrak{R}$ *mit* $\nu_\varrho(\{\alpha_k\}) = \varrho_k$. *Für jeden derartigen Inhalt* ν_ϱ *gilt* $\nu_\varrho(\{\beta_k\}) = 2^{-k} \varrho_k$.

Beweis. Falls ν_ϱ ein gemeinsamer Urbildinhalt ist mit $\nu_\varrho(\{\alpha_k\}) = \varrho_k$ $(k \in N)$, dann gilt für alle $k \in N$

$$\nu_\varrho(\Gamma \setminus G_{ko}) = \mu_{\{\alpha_k\} \cup (\Gamma \setminus G_{ko})}(\{\alpha_k\} \cup (\Gamma \setminus G_{ko})) - \nu_\varrho(\{\alpha_k\}) = \\ = 1 - \varrho_k.$$

Ferner ergibt sich für alle $k \in N$ und alle $j \in \{1, \ldots, 2^k\}$

$$\nu_\varrho(G_{kj}) = \mu_{\{\beta_k\} \cup G_{kj}}(\{\beta_k\} \cup G_{kj}) - \nu_\varrho(\{\beta_k\}) = 2^{-k} - \nu_\varrho(\{\beta_k\}),$$

also

$$1 - \varrho_k = \nu_\varrho(\Gamma \setminus G_{ko}) = \sum_{j=1}^{2^k} \nu_\varrho(G_{kj}) = 1 - 2^k \nu_\varrho(\{\beta_k\})$$

und somit

$$\nu_\varrho(\{\beta_k\}) = 2^{-k} \varrho_k \text{ sowie } \nu_\varrho(G_{kj}) = 2^{-k}(1 - \varrho_k).$$

Wir müssen noch zeigen, daß tatsächlich ein Inhalt ν_ϱ mit den gewünschten Eigenschaften existiert. Dazu definieren wir auf dem Ring $\mathfrak{R} \cap \Gamma = \{R \cap \Gamma: R \in \mathfrak{R}\}$ der Zylindermengen in Γ das Produktmaß π_ϱ der Wahrscheinlichkeitsmaße

$\varrho_k \, \varepsilon_{\gamma_{ko}} + 2^{-k}(1 - \varrho_k) \sum_{j=1}^{2^k} \varepsilon_{\gamma_{kj}}$ auf $\mathfrak{P}(\Gamma_k)$. Dann gilt

$\pi_\varrho(G_{kj}) = 2^{-k}(1 - \varrho_k)$ für $k \in N$ und $j \in \{1, \ldots, 2^k\}$.

Man prüft nun leicht nach, daß durch

$$\nu_\varrho(R) = \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k \, \varepsilon_{\alpha_k}(R) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k \, \varepsilon_{\beta_k}(R) + \pi_\varrho(R \cap \Gamma) + \\ + \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k\right) \varepsilon_\delta(R)$$

ein gemeinsamer Urbildinhalt der Familie $(\mu_S)_{S \in I}$ auf $\mathfrak{R}$ definiert wird mit $\nu_\varrho(\{\alpha_k\}) = \varrho_k$ $(k \in N)$. ⌋

(d) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* ν *aus der Menge* M *der gemeinsamen Urbildinhalte der* $(\mu_S)_{S \in I}$ *mit* $\sup_{K \in \mathfrak{R}} \nu(K) + \varepsilon \geq \nu(X) = 3$:

Wählt man nämlich ein $k_0 \in \boldsymbol{N}$ sowie $\varrho_k = 0$ für $k \neq k_0$ und $\varrho_{k_0} = 1$, so ergibt der in (c) konstruierte Inhalt ν_ϱ für die Menge $K_{k_0} = \{\alpha_{k_0}\} \cup \Gamma \cup \Delta \in \mathfrak{K}$:

$$\nu_\varrho (K_{k_0}) = \nu_\varrho (A \cup \Gamma \cup \Delta) = 3 - 2^{-k_0}.$$

(e) *Die Regularitätsbedingung* 4.8 (ii) *ist für* $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{E} = \{X\}$ *erfüllt*:

Wählt man zu $\varepsilon > 0$ ein $\nu \in M$ gemäß (d), so gilt nach Lemma 2.5

$$\varphi(X) = \nu(X) \leq \sup_{K \in \mathfrak{K}} \nu(K) + \varepsilon \leq \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset X}} p(K) + \varepsilon.$$

(f) **Bemerkungen.** (α) Man könnte die Regularitätsbedingung 4.8 (ii) sogar für $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ nachweisen.

(β) Mit (a), (b) und (e) haben wir alle nicht-trivialen Voraussetzungen von Korollar 4.8 mit Ausnahme von 4.8 (iii) nachgewiesen.

II. Wir wollen nun noch zeigen, *daß die Familie* $(\mu_S)_{S \in I}$ *keinen* $\mathfrak{K}$*-regulären gemeinsamen Urbildinhalt besitzt*:

Angenommen, es existiert doch ein solches $\nu \in M_{reg}$. Da die zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Teilmengen von A gerade die endlichen Teilmengen von A sind, gilt für die Folge $\varrho = (\varrho_k)_{k \in N}$ mit $\varrho_k = \nu(\{\alpha_k\})$ $(k \in \boldsymbol{N})$ offenbar $\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k = 1$. Daraus folgt gemäß I. (c):

$$\nu(B) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(\{\beta_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k > 0$$

und somit wegen $K = \emptyset$ für alle $K \in \mathfrak{K}$ mit $K \subset B$ ein Widerspruch zur Regularität von ν. $\lrcorner$

5. Der σ-additive Fall

Wir wollen nun aus den Ergebnissen des vorangehenden Abschnitts Bedingungen für die Existenz *σ-additiver* gemeinsamer Urbildinhalte herleiten. Zu diesem Zweck werden wir wie in [15] voraussetzen, daß $\mathfrak{K}$ ein kompaktes System von Teilmengen von X ist; außerdem werden wir die Endlichkeitsforderung an die Ausgangsinhalte abschwächen.

5.1. Wir setzen über $\mathfrak{K}$ voraus:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{K}$;

(ii) $\mathfrak{K}$ *ist* $\cup$*-stabil und abzählbar durchschnittsstabil*;

(iii) $\mathfrak{K}$ *ist ein kompaktes System* im Sinne von Marczewski [19], d. h. für jede absteigende Folge $(K_n)_{n \in N}$ nicht-leerer Mengen aus $\mathfrak{K}$ ist $\bigcap_{n \in N} K_n \neq \emptyset$.

Damit ist jeder auf $\mathfrak{K}$ endliche $\mathfrak{K}$-reguläre Inhalt auf $\mathfrak{R}$ automatisch σ-additiv ([15, 4.2 (iii)]).

Wir verzichten jetzt auf die Voraussetzung, daß alle Inhalte μ_i $(i \in I)$ endlich sind und daß $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{F}_\cup$-beschränkt ist. Stattdessen verlangen wir, daß es ein Mengensystem $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}^e$ gibt, so daß

(iv) *die Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$*-regulär ist*;

(v) $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{C}$*-stabil ist.*

Um die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts anwenden zu können, gehen wir nun folgendermaßen vor:

Wir ersetzen jeweils $\mathfrak{Q}_i$ $(i \in I)$ durch $\mathfrak{Q}_i^e$, μ_i durch μ_i^e, $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{F}^e$ sowie $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{K}^e$ (vgl. 1.5).

Die Sätze des vorangehenden Abschnitts liefern Bedingungen für die Existenz $\mathfrak{K}^e$-regulärer gemeinsamer Urbildinhalte ν^e der $(\mu_i^e)_{\in I}$ auf dem Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e)$.

Durch Fortsetzung eines solchen Inhalts ν^e von $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e)$ auf größere Ringe, die der hier betrachteten Situation besser angemessen sind, werden wir auch hier zu Lösungen unseres Ausgangsproblems gelangen. Die verwendeten Beweismethoden sind Standardmethoden der Maßtheorie (vgl. z. B. Courrége [9]).

5.2. **Definition.** Sei $\mathfrak{T}$ ein (σ-)Ring von Teilmengen von X. Dann heißt die (σ-)Algebra

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{T}) = \{L \subset X : L \cap T \in \mathfrak{T} \text{ für alle } T \in \mathfrak{T}\}$$

(σ-)*Algebra der lokal in* $\mathfrak{T}$ *liegenden Mengen.*

5.3. $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$ bezeichne das System der $\mathfrak{C}_\cup$-beschränkten Mengen aus $\mathfrak{K}$, $\nu^{\mathfrak{C}}$ sei ein $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$-regulärer endlicher Inhalt auf dem Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}})$.

Mit $\mathfrak{K}$ erfüllt auch $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$ die Bedingungen 5.1 (i), (ii), (iii) und (v). Folglich ist $\nu^{\mathfrak{C}}$ σ-additiv und kann daher auf genau eine Weise zu einem Maß auf dem von $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}})$ erzeugten σ-Ring $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}})) = \sigma(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}})$ und darüber hinaus zu einem eindeutig bestimmten Maß $\tilde{\nu}$ auf dessen Vervollständigung $\tilde{\mathfrak{S}}$ fortgesetzt werden. Die Fortsetzung von $\nu^{\mathfrak{C}}$ auf $\mathfrak{S}$ ist wiederum $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$-regulär gemäß [15, 4.2 (iv)]. Dann ist aber auch $\tilde{\nu}$ $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$-regulär, wie man sofort aus der Konstruktion der Vervollständigung ersieht.

Nach [15, Lemma 1.6] wird auf der σ-Algebra $\mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$ der lokal in $\tilde{\mathfrak{S}}$ liegenden Mengen durch

$$\bar{\nu}(L) = \sup_{\substack{S \in \tilde{\mathfrak{S}} \\ S \subset L}} \tilde{\nu}(S) \quad (L \in \mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}}))$$

ein Maß $\bar{\nu}$ definiert ($\tilde{\mathfrak{S}}$ ist nämlich der Ring der $\tilde{\mathfrak{S}}$-beschränkten Mengen aus $\mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$), das offensichtlich wiederum $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$-regulär ist und $\tilde{\nu}$ fortsetzt.[4]

5.4. **Lemma.** *Sei ν^e ein gemeinsamer Urbildinhalt der $(\mu_\iota^e)_{\iota \in I}$ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e)$, der auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}) \cup \mathfrak{C}$ $\mathfrak{K}^e$-regulär (also $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$-regulär) ist. $\nu^{\mathfrak{C}}$ bezeichne die Restriktion von ν^e auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}})$, $\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}}$ den Ring der $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$-beschränkten Mengen aus dem Ring $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$. Die σ-Algebra $\mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$ und das Maß $\bar{\nu}$ seien gemäß* 5.3 *mit Hilfe von $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}})$ und $\nu^{\mathfrak{C}}$ definiert.*

Dann gilt:

(i) $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e) \subset \mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}})) \subset \mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$.

(ii) $\bar{\nu}$ *ist ein $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$-regulärer und damit auch $\mathfrak{K}$-regulärer σ-additiver gemeinsamer Urbildinhalt der Familie $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$.*

Beweis. (i) Offenbar gilt $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e) \subset \mathfrak{R}_0$.

Seien $R_0 \in \mathfrak{R}_0$ und $S_0 \in \sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}})$. Dann gibt es eine Folge $(K_n)_{n \in N}$ in $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$ mit $S_0 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Daraus ergibt sich $R_0 \cap S_0 = (\bigcup_{j=1}^{\infty} (R_0 \cap K_j)) \cap S_0$ mit $R_0 \cap K_j \in \mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ und somit $R_0 \cap S_0 \in \sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}})$, d. h. $R_0 \in \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}}))$.

Wir müssen noch zeigen, daß $\mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}})) \subset \mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$ gilt:

---

[4] Man kann sich leicht überlegen, daß $\mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$ der größte σ-Ring ist, auf den man $\nu^{\mathfrak{C}}$ zu einem $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$-regulären Maß fortsetzen kann.

(a) Der Ring $\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}}$ wird von $\mathfrak{E} = \{K \cap F: K \in \mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}, F \in \mathfrak{F}\}$ erzeugt, da $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$ $\mathfrak{K}$-stabil ist. Wir begründen zunächst, daß es genügt, $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$ nachzuweisen.

Aus $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$ folgt zunächst $\sigma(\mathfrak{E}) = \sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}}) \subset \mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$. Seien nun $L \in \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}}))$ und $S \in \tilde{\mathfrak{S}}$. Dann gibt es eine Folge (K_n) in $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$ mit $S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Folglich ist $L \cap S = \bigcup_{n=1}^{\infty} (L \cap K_n) \cap S \in \tilde{\mathfrak{S}}$ wegen $L \cap K_n \in \sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}}) \subset \mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$ für alle $n \in \boldsymbol{N}$. Somit ergibt sich tatsächlich $\mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}})) \subset \mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$, falls $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$ ist.

(b) Sei $E = K \cap F \in \mathfrak{E}$ mit $K \in \mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$ und $F \in \mathfrak{F}$. $\mathfrak{E}^e$ bezeichne das Mengensystem $\{K' \cap F^e: K' \in \mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}, F^e \in \mathfrak{F}^e\}$.

Wir zeigen zunächst: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei Mengen $R_1 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{E}^e) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e)$ und $R_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e)$ mit $R_1 \subset E \subset R_2$ und $\nu^e(R_2 \setminus R_1) \leq \varepsilon$.

Sei $\mathfrak{D}$ das System aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathfrak{C}$. Wegen (R2) gibt es endlich viele Mengen $F_1, \ldots, F_n \in \mathfrak{F}^e$ mit $K \setminus F \subset \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ und $\varphi(F_j) \leq \varphi_*(F_j \setminus F) + \varphi_*(F_j \cap F)$. Für alle Mengen $G \in \mathfrak{F}^e$ ist $\varphi(G) = \nu^e(G)$. Daraus ergibt sich gemäß Bemerkung 1.9 (ii):

$$\nu^e(F_j) = \sup_{\substack{D \in \mathfrak{D} \\ D \subset F_j \setminus F}} \nu^e(D) + \sup_{\substack{D' \in \mathfrak{D} \\ D' \subset F_j \cap F}} \nu^e(D') \; (j = 1, \ldots, n).$$

Wir wählen für $j = 1, \ldots, n$ je zwei Mengen $D_j, D'_j \in \mathfrak{D}$ mit $D_j \subset F_j \setminus F$, $D'_j \subset F_j \cap F$ sowie

$$\nu^e(F_j) \leq \nu^e(D_j) + \nu^e(D'_j) + \varepsilon/n = \nu^e(D_j \cup D'_j) + \varepsilon/n.$$

Man kann leicht nachprüfen, daß für die Mengen $R_1 = (K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} F_j) \cup (K \cap \bigcup_{j=1}^{n} D'_j)$ und $R_2 = K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} D_j$ die Beziehungen $R_1 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{E}^e)$, $R_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}})$ sowie $R_1 \subset E = K \cap F \subset R_2$ gelten. Ferner ist $R_2 \setminus R_1 \subset \bigcup_{j=1}^{n} (F_j \setminus (D_j \cup D'_j))$, also

$$\nu^e(R_2 \setminus R_1) \leq \sum_{j=1}^{n} \nu^e(F_j \setminus (D_j \cup D'_j)) \leq \varepsilon.$$

Damit haben R_1 und R_2 die gewünschten Eigenschaften.

(c) Sei $E^e = K \cap F^e \in \mathfrak{E}^e$ mit $K \in \mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$ und $F^e \in \mathfrak{F}^e$.

Wir zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Mengen T_1, $T_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}})$ mit $T_1 \subset E^e \subset T_2$ und $\nu^{\mathfrak{C}}(T_2 \setminus T_1) \leq \varepsilon$.

Wenden wir (b) auf E^e an mit $\varepsilon/2$ anstelle von ε, so erhalten wir die Existenz zweier Mengen $T_1' \in \mathfrak{R}(\mathfrak{C}^e)$, $T_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}})$ mit $T_1' \subset E^e \subset T_2$ und $\nu^e(T_2 \setminus T_1') \leq \varepsilon/2$. Wegen $E^e \in \mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e)$ ist dann auch $\nu^e(T_2 \setminus E^e) \leq \varepsilon/2$.

Gemäß (R1) gilt

$$\nu^e(F^e) = \varphi(F^e) = \sup_{\substack{D \in \mathfrak{D} \\ D \subset F^e}} \nu^e(D).$$

Daher gibt es eine Menge $D \in \mathfrak{D}$ mit $D \subset F^e$ und $\nu^e(F^e \setminus D) \leq \varepsilon/2$. Also gilt für $T_1 = K \cap D \subset E^e$

$$\nu^e(E^e \setminus T_1) = \nu^e(K \cap (F^e \setminus D)) \leq \varepsilon/2.$$

Wegen T_1, $T_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}})$ folgt daraus

$$\nu^{\mathfrak{C}}(T_2 \setminus T_1) = \nu^e(T_2 \setminus T_1) \leq 2\,\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(d) Aus (c) folgt $\mathfrak{C}^e \subset \tilde{\mathfrak{S}}$, also $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}^e) \subset \tilde{\mathfrak{S}}$. Dabei stimmen die Restriktionen von $\tilde{\nu}$ und ν^e auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}^e)$ überein. Zusammen mit (b) erhalten wir daraus $\mathfrak{C} \subset \tilde{\mathfrak{S}} \subset \mathfrak{l}(\tilde{\mathfrak{S}})$. Damit ist (i) vollständig bewiesen.

(ii) Für $i \in I$ und $Q_i \in \mathfrak{Q}_i$ sei $F = f_i^{-1}(Q_i)$. $\mathfrak{D}$ bezeichne wiederum das System der endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathfrak{C}$. Dann ergibt sich aus der $\mathfrak{C}$-Regularität der $(\mu_i)_{i \in I}$ und den Eigenschaften von ν^e, $\nu^{\mathfrak{C}}$ und $\bar{\nu}$

$$\mu_i(Q_i) = \varphi(F) \leq \varphi_*(F) = \sup_{\substack{D \in \mathfrak{D} \\ D \subset F}} \nu^e(D) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K}^{\mathfrak{C}},\, D \in \mathfrak{D} \\ K \subset D \subset F}} \nu^e(K)$$

$$\leq \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K}^{\mathfrak{C}} \\ K \subset F}} \nu^e(K) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K}^{\mathfrak{C}} \\ K \subset F}} \bar{\nu}(K) = \bar{\nu}(F).$$

Falls $\mu_i(Q_i) = \infty$ ist, folgt daraus auch $\bar{\nu}(F) = \infty$. Ist dagegen $Q_i \in \mathfrak{Q}_i^e$, so kann man die Abschätzung fortsetzen durch

$$\sup_{\substack{K \in \mathfrak{K}^{\mathfrak{C}} \\ K \subset F}} \nu^e(K) \leq \nu^e(F) = \varphi(F).$$

Damit ergibt sich in jedem Falle

$$\bar{\nu}(f_i^{-1}(Q_i)) = \bar{\nu}(F) = \mu_i(Q_i). \quad \lrcorner$$

5.5. **Satz.** *Sei* $\mathfrak{R}$ *ein Ring mit*

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}) \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}})).$$

Dann sind äquivalent:

(i) *Die Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ *besitzt einen* $\mathfrak{K}$*-regulären,* σ*-additiven gemeinsamen Urbildinhalt auf* $\mathfrak{R}$.

(ii) *Die Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ *besitzt einen* $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$*-regulären,* σ*-additiven gemeinsamen Urbildinhalt auf* $\mathfrak{R}$.

(iii) *Die Familie* $(\mu_i^e)_{i \in I}$ *besitzt einen* $\mathfrak{K}^e$*-regulären gemeinsamen Urbildinhalt auf* $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e)$.

Beweis. Die Implikationen (ii) $\Rightarrow$(i) $\Rightarrow$ (iii) sind trivial.

Sei (iii) erfüllt und ν^e ein $\mathfrak{K}^e$-regulärer gemeinsamer Urbildinhalt der $(\mu_i^e)_{i \in I}$ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e)$. Da $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}} \cup \mathfrak{C}$ $\mathfrak{C}$-beschränkt ist, ist ν^e $\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}$-regulär auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}} \cup \mathfrak{C})$. Daher folgt (ii) durch Restriktion des Inhalts $\bar{\nu}$ aus dem vorangehenden Lemma auf den Ring $\mathfrak{R}$. ⌋

Nun sind wir in der Lage, die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts unmittelbar auf die hier vorliegende Situation anzuwenden. Wir begnügen uns dabei mit der Übertragung der beiden Hauptresultate 4.1 und 4.7. Es ist klar, wie dann die übrigen Ergebnisse von Abschnitt 4 zu übertragen sind.

Die Bezeichnungen aus Lemma 5.4 werden übernommen.

5.6. **Satz.** *Sei* $\mathfrak{R}$ *ein Ring mit* $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}}))$. *Dann ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend für die Existenz eines* $\mathfrak{K}$*-regulären,* σ*-additiven gemeinsamen Urbildinhalts der Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ *auf* $\mathfrak{R}$:

Es gibt ein Mengensystem $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}^e$ *sowie einen gemeinsamen Urbildinhalt* ν^e *der* $(\mu_i^e)_{i \in I}$ *auf* $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e)$, *so daß* $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{E}_{\cup}$*-beschränkt und* ν^e *auf* $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{K}^e$*-regulär ist, d. h.*

$$\nu^e(E) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K}^e \\ K \subset E}} \nu^e(K) \textit{ für alle } E \in \mathfrak{E}.$$

Beweis. Man wende 4.1 und 5.5 an. ⌋

5.7. **Satz.** *Sei* $\mathfrak{R}$ *ein Ring mit* $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}}))$. *Dann ist die folgende Bedingung hinreichend für die Existenz eines* $\mathfrak{K}$-

regulären, σ-additiven gemeinsamen Urbildinhalts der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ *auf* $\mathfrak{R}$:

Es gibt ein Mengensystem $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}^e$ *mit den Eigenschaften*

(i) $\mathfrak{C}$ *ist* $\mathfrak{E}_{\cup}$*-beschränkt*;

(ii) *Zu* $E \in \mathfrak{E}$ *und* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Menge* $K \in \mathfrak{K}^e$ *mit* $K \subset E$ *und* $\varphi(E) \leq p(K) + \varepsilon$, *so daß für je zwei Funktionen* $g_1, g_2 \in \mathbf{F}$ *mit* $g_1, g_2 \geq 1_K$ *ein* $g \in \mathbf{F}$ *existiert mit* $g \geq 1_K$ *und* $p((g - g_i)^+) \leq \varepsilon \; (i = 1, 2)$.

Beweis. Man wende 4.7 und 5.5 an. $\lrcorner$

6. Gemeinsame Urbilder regulärer Borelmaße

Wir wenden uns nun der topologischen Situation zu und suchen nach Bedingungen für die Existenz von *regulären gemeinsamen Urbild-Borelmaßen* regulärer Borelmaße unter einer Familie *stetiger* Abbildungen.

Im allgemeinen folgt aus der Regularität der einzelnen Ausgangsinhalte lediglich die Regularitätsbedingung (R1) für die daraus gebildete Familie von Inhalten (vgl. aber Korollar 1.11). In der hier vorliegenden Situation werden wir jedoch zeigen, daß die Bedingung (R2) stets automatisch erfüllt ist.

Die folgenden Voraussetzungen und Bezeichnungen werden in diesem Abschnitt beibehalten.

6.1. Seien X und Y_i $(i \in I)$ Hausdorffsche topologische Räume. $\mathfrak{R} = \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{B}_i$ $(i \in I)$ bezeichne die von dem System der offenen Teilmengen in X bzw. Y_i erzeugte σ-Algebra der Borelschen Mengen, $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{C}_i$ $(i \in I)$ das System der kompakten Mengen in X bzw. Y_i.

Ferner sei für jedes $i \in I$ eine stetige Abbildung $f_i \colon X \to Y_i$ sowie ein reguläres Borelmaß μ_i auf Y_i gegeben, d. h. ein von innen $\mathfrak{C}_i$-reguläres Maß auf $\mathfrak{B}_i$, das auf $\mathfrak{C}_i$ reellwertig ist.

Gesucht werden Bedingungen für die Existenz eines ($\mathfrak{K}$-)*regulären Borelmaßes* ν *auf* X *mit* $\mu_i = f_i(\nu)$ *für alle* $i \in I$.

Offenbar ist jede der Abbildungen f_i $(i \in I)$ $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_i$-meßbar.

Wir wählen nun wie im Korollar 1.11 $\mathfrak{C} = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{C}_i)$. Dann ist $\mathfrak{K}$ offenbar $\mathfrak{C}$-stabil und es gilt überdies:

6.2. **Lemma.** *Die Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ *ist* $\mathfrak{C}$-*regulär (bzgl.* $(f_i)_{i \in I}$ *und* $\mathfrak{K}$).

Beweis. Da für jede kompakte Menge $K \subset X$ das Bild unter einer stetigen Abbildung wieder kompakt ist, ergibt sich für alle $i \in I$ die $\mathfrak{B}_i^e$-Beschränktheit von $f_i(K)$. Daher folgt die Behauptung aus Korollar 1.11 (a). ⌋

Damit sind alle in 5.1 gemachten allgemeinen Voraussetzungen des vorangehenden Abschnitts erfüllt. Wir sind daher in der Lage den Satz 5.5 auf die topologische Situation zu übertragen:

6.3. Satz. *Für* $i \in I$ *sei* $\mu_i^{\mathfrak{C}}$ *bzw.* μ_i^e *die Restriktion von* μ_i *auf den Ring* $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}_i)$ *bzw. auf den Ring* $\mathfrak{B}_i^e = \{B_i \in \mathfrak{B}_i : \mu_i(B_i) < \infty\}$.

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) *Die Familie* $(\mu_i)_{i \in I}$ *besitzt ein reguläres gemeinsames Urbild-Borelmaß auf* $\mathfrak{B}$.

(ii) *Die Familie* $(\mu_i^e)_{i \in I}$ *besitzt einen* $\mathfrak{K}$-*regulären gemeinsamen Urbildinhalt auf dem Ring* $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}^e)$ *mit* $\mathfrak{F}^e = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{B}_i^e)$.

(iii) *Die Familie* $(\mu_i^{\mathfrak{C}})_{i \in I}$ *besitzt einen* $\mathfrak{K}$-*regulären gemeinsamen Urbildinhalt auf* $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{C})$.

Beweis. Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ergeben sich durch geeignete Restriktionen.

Sei (iii) erfüllt und $\nu^{\mathfrak{C}}$ ein $\mathfrak{K}$-regulärer gemeinsamer Urbildinhalt der $(\mu_i^{\mathfrak{C}})_{i \in I}$ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{C})$. Wir wollen den Satz 5.5 auf die Inhalte $\mu_i^{\mathfrak{C}}$ (statt μ_i) anwenden:

Dann gilt $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{R}(\mathfrak{C}_i))) = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{C})$, also wegen der $\mathfrak{C}$-Stabilität von $\mathfrak{K}$: $\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K})$. Wegen $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{C}) \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{K}))$ ergibt der Satz 5.5 die Existenz eines $\mathfrak{K}$-regulären, σ-additiven gemeinsamen Urbildinhalts ν auf $\mathfrak{B}$ für die Familie $(\mu_i^{\mathfrak{C}})_{i \in I}$.

ν ist auch gemeinsames reguläres Urbild-Borelmaß der $(\mu_i)_{i \in I}$: Für $i \in I$ und $B_i \in \mathfrak{B}_i$ gilt nämlich wegen $f_i(\mathfrak{K}) = \{f_i(K) : K \in \mathfrak{K}\} \subset \mathfrak{C}_i$

$$\mu_i(B_i) = \sup_{\substack{C_i \in \mathfrak{C}_i \\ C_i \subset B_i}} \mu_i^{\mathfrak{C}}(C_i) = \sup_{\substack{C_i \in \mathfrak{C}_i \\ C_i \subset B_i}} \nu(f_i^{-1}(C_i)) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K},\, C_i \in \mathfrak{C}_i \\ f_i(K) \subset C_i \subset B_i}} \nu(K)$$

$$\leq \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ f_i(K) \subset B_i}} \nu(f_i^{-1}(f_i(K))) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ f_i(K) \subset B_i}} \mu_i^{\mathfrak{C}}(f_i(K)) \leq \mu_i(B_i). \lrcorner$$

Wir verzichten darauf, den vorangehenden Satz auf jedes der Ergebnisse aus Abschnitt 4 anzuwenden. Stattdessen behandeln wir einen topologisch besonders interessanten Spezialfall, bei dem für eine der Abbildungen f_i $(i \in I)$ das inverse Bild jeder kompakten Menge wieder kompakt ist.[5] In diesem Falle stellt sich unter einer zusätzlichen Beschränktheitsvoraussetzung heraus, daß es genügt, anstelle der Bedingung 6.3 (ii) lediglich die Existenz irgendeines (nicht notwendig regulären) gemeinsamen Urbildinhalts der $(\mu_i^e)_{i \in I}$ nachzuweisen.

6.4. **Satz.** *Für ein $j \in I$ sei das inverse Bild jeder kompakten Menge in Y_j unter der Abbildung f_j ebenfalls kompakt. Ferner gelte für dieses j*

(B) $\mathfrak{C} = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{C}_i)$ *ist* $f_j^{-1}(\mathfrak{B}_j^e)$*-beschränkt.*

Dann ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines regulären gemeinsamen Urbild-Borelmaßes der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ auf X, daß die Familie $(\mu_i^e)_{i \in I}$ einen gemeinsamen Urbildinhalt auf dem Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{F}^e) = \mathfrak{R}(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{B}_i^e))$ besitzt.

Beweis. Offenbar ist die angegebene Bedingung notwendig. Sie ist aber auch hinreichend:

Da $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{F}^e$-beschränkt ist, kann man gemäß Fußnote 3 zum Lemma 2.3 den Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{F}^e)$ durch $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}^e)$ ersetzen. Sei ν^e ein gemeinsamer Urbildinhalt der $(\mu_i^e)_{i \in I}$ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}^e)$, und sei $\mathfrak{E} = f_j^{-1}(\mathfrak{B}_j^e)$. Mit dieser Festsetzung für ν^e und $\mathfrak{E}$ wollen wir die Bedingung 4.1 (*) nachweisen: Nach Voraussetzung ist $f_j^{-1}(\mathfrak{C}_j) \subset \mathfrak{K}$, und $\mathfrak{C} = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{C}_i)$ ist $f_j^{-1}(\mathfrak{B}_j^e)$-beschränkt. Ferner ergibt sich für $B \in \mathfrak{B}_j^e$ und $E = f_j^{-1}(B) \in \mathfrak{E}$

[5] Insbesondere jede *eigentliche* Abbildung hat diese Eigenschaft (vgl. Bourbaki [6, chap. 1, § 10]).

$$\nu^e(E) = \mu_j(B) = \sup_{\substack{C_j \in \mathfrak{C}_j \\ C_j \subset B}} \mu_j(C_j) = \sup_{\substack{C_j \in \mathfrak{C}_j \\ f_j^{-1}(C_j) \subset E}} \nu^e(f_j^{-1}(C_j))$$

$$\leq \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset E}} \nu^e(K) \leq \nu^e(E).$$

Folglich ist ν^e $\mathfrak{K}$-regulär auf $\mathfrak{C}$, und die Behauptung folgt aus 4.1 und 6.3. ⌋

Als unmittelbare Folgerung des Satzes ergibt sich für den Fall endlicher Ausgangsmaße μ_i:

6.5. **Korollar.** *Für ein $j \in I$ gelte $f_j^{-1}(\mathfrak{C}_j) \subset \mathfrak{K}$. Ferner seien alle Inhalte μ_i $(i \in I)$ reellwertig.*

Genau dann besitzt die Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ ein reguläres gemeinsames Urbild-Borelmaß, wenn sie einen gemeinsamen Urbildinhalt auf dem Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ besitzt.

Als Variante des Satzes 6.4 erhalten wir:

6.6. **Satz.** *Für alle $i \in I$ gelte $f_i^{-1}(\mathfrak{C}_i) \subset \mathfrak{K}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ besitzt ein reguläres gemeinsames Urbild-Borelmaß auf X.*

(ii) *Die Familie $(\mu_i^{\mathfrak{C}})_{i \in I}$ besitzt einen gemeinsamen Urbildinhalt auf dem Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$.*

Beweis. Offenbar folgt (ii) aus (i).

Sei umgekehrt (ii) erfüllt. Nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{C} = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{C}_i) \subset \mathfrak{K}$. Daher erhalten wir aus Satz 4.5, daß die Familie $(\mu_i^{\mathfrak{C}})_{i \in I}$ sogar einen $\mathfrak{K}$-regulären gemeinsamen Urbildinhalt auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{C})$ besitzt. Somit folgt die Behauptung aus Satz 6.3. ⌋

6.7. **Bemerkungen.** Aus dem vorangehenden Satz geht für den Fall eines *kompakten* Grundraums X hervor, daß es zum Nachweis der Existenz eines regulären gemeinsamen Urbild-Borelmaßes genügt, die Existenz irgendeines gemeinsamen Urbildinhalts zu beweisen. Diese Aussage bleibt richtig, falls die Indexmenge I *einelementig* und X ein *polnischer* Raum ist (vgl. [15, § 8]).

Aus dem anschließenden Beispiel 6.8 folgt jedoch, daß die Aussage für polnische Räume bereits bei zweielementiger Indexmenge falsch wird, selbst wenn für eine der Abbildungen f_i die inversen Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind. Damit ist zugleich gezeigt, daß man im Satz 6.4 nicht ersatzlos auf die Beschränktheitsbedingung (B) verzichten kann.

Falls die Ausgangs-Borelmaße alle Wahrscheinlichkeitsmaße sind, geben wir in 7.9 ein Beispiel mit polnischem Grundraum X (und überabzählbarer Indexmenge I), bei dem es ebenfalls nicht genügt, die Existenz eines endlich additiven gemeinsamen Urbildinhalts der $(\mu_i)_{i \in I}$ nachzuweisen. Es ist ohne Schwierigkeiten möglich ein entsprechendes Beispiel mit abzählbarer Indexmenge zu finden; dagegen bleibt bei endlicher Indexmenge und beschränkten Ausgangsmaßen die Frage offen, ob die Existenz endlich additiver gemeinsamer Urbildinhalte hinreichend ist für die Existenz regulärer gemeinsamer Urbild-Borelmaße auf polnischen Räumen.

6.8. *Beispiel.* Als Indexmenge wählen wir $I = \{1, 2\}$. Die Räume X, Y_1, Y_2 seien die diskreten topologischen Räume $X = \{(p, q) \in \boldsymbol{N}^2\colon\ q \leq p\}$, $Y_1 = \boldsymbol{N}$, $Y_2 = \{1, 2\} \times \boldsymbol{N}$. Die stetigen Abbildungen $f_i\colon X \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ seien gegeben durch $f_1((p, q)) = p$ für alle $(p, q) \in X$ sowie $f_2((p, q)) = (1, q)$ für $(p, q) \in X$ mit $q < p$ und $f_2((q, q)) = (2, q)$ für $q \in \boldsymbol{N}$. Als reguläres Borelmaß μ_i auf Y_i $(i = 1, 2)$ wählen wir jeweils das Anzahlmaß, das jeder Menge die Anzahl ihrer Elemente zuordnet.

Man sieht sofort, daß unter f_1 das inverse Bild jeder kompakten (d. h. endlichen) Menge in Y_1 wieder kompakt ist; f_2 dagegen hat diese Eigenschaft nicht.

Für $q \in \boldsymbol{N}$ sei λ_q ein Inhalt auf $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$ mit $\lambda_q(X) = 1$, $\lambda_q(f_2^{-1}(\{1, q)\})) = 1$ und $\lambda_q(B) = 0$ für jede endliche Menge $B \subset X$. Dann kann man leicht nachprüfen, daß

$$\nu = \sum_{q \in \boldsymbol{N}} \varepsilon_{(q,q)} + \sum_{q \in \boldsymbol{N}} \lambda_q$$

ein gemeinsamer Urbildinhalt von (μ_1, μ_2) ist.

Es gibt jedoch kein reguläres gemeinsames Urbild-Borelmaß von (μ_1, μ_2): Wäre nämlich ν ein reguläres Urbild-Borelmaß von μ_1 und μ_2, so müßte gelten

$$\nu(\{(q, q)\}) = \nu(f_2^{-1}(\{(2, q)\})) = \mu_2(\{(2, q)\}) = 1 \text{ für } q \in \boldsymbol{N},$$

also

$$\nu(\{p\} \times \{1, \ldots p-1\}) = \nu(\{p\} \times \{1, \ldots, p\}) - \nu(\{(p, p)\})$$
$$= \mu_1(\{p\}) - 1 = 0 \text{ für alle } p \in \boldsymbol{N}.$$

Somit wäre $\nu(K) = 0$ für jede kompakte Menge $K \subset f_2^{-1}(\{(1, 1)\})$, also wegen der Regularität von ν

$$0 = \sup_{\substack{K \text{ kompakt} \\ K \subset f_2^{-1}(\{(1,1)\})}} \nu(K) = \nu(f_2^{-1}(\{(1, 1)\})) = \mu_2(\{(1, 1)\}) = 1.$$

Damit liegt ein Widerspruch vor. *Folglich ist der Satz* 6.4 *ohne die Voraussetzung* (B) *nicht richtig.*

Der folgende Satz impliziert ein Ergebnis von Kellerer [13, Satz 2.2] für Maße auf Produkträumen mit gewissen vorgegebenen Marginalmaßen.

6.9. **Satz.** *Die Indexmenge I sei endlich, und jedes der gegebenen Maße μ_i $(i \in I)$ sei reellwertig. Ferner sei $\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(K_i)$ kompakt für jede Auswahl kompakter Mengen $K_i \subset Y_i$.*

Dann ist die Existenz eines gemeinsamen Urbildinhalts der $(\mu_i)_{i \in I}$ auf dem Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{B}_i))$ notwendig und hinreichend für die Existenz eines regulären gemeinsamen Urbild-Borelmaßes.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die angegebene Bedingung hinreichend ist.

Sei I r-elementig für ein $r \in \boldsymbol{N}$. Wir wollen den Satz 4.7 mit $\mathfrak{E} = \{X\}$ anwenden. Sei dazu ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $i \in I$ wählen wir eine kompakte Menge $K_i \subset Y_i$ mit $\mu_i(K_i) > \mu_i(Y_i) - \varepsilon/r$. Dann gilt für jeden gemeinsamen Urbildinhalt ν der $(\mu_i)_{i \in I}$ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{B}_i))$ sowie die kompakte Menge $K = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(K_i)$:

$$\nu(X \setminus K) \leq \sum_{i \in I} \nu(f_i^{-1}(Y_i \setminus K_i)) = \sum_{i \in I} \mu_i(Y_i \setminus K_i) \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt zunächst $\varphi(X) = \nu(X) \leq \nu(K) + \varepsilon \leq p(K) + \varepsilon$.

Andererseits gilt für jede Funktion $g' \in F$ mit $g' \geq 1_K$

$$\nu((1 - g')^+) \leq \nu(1 - 1_K) = \nu(X \setminus K) \leq \varepsilon.$$

Da p die obere Einhüllende aller gemeinsamen Urbildinhalte der $(\mu_i)_{i \in I}$ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$ ist, folgt daraus $p((1 - g')^+) \leq \varepsilon$. Damit haben wir eine Verschärfung der Bedingung 4.7 (ii) nachgewiesen (man kann dort unabhängig von g_1 und g_2 stets $g \equiv 1$ wählen), und die Behauptung folgt aus Satz 6.3. ⌟

6.10. **Bemerkung.** Durch geeignete Modifikation des Beispiels 4.11 kann man zeigen, daß man auch bei der topologischen Variante des Korollars 4.8 nicht ersatzlos auf die Bedingung 4.8 (iii) verzichten kann.

7. Projektive Familien

Wir wollen nun die bisherigen Ergebnisse auf *projektive Familien* regulärer Maße anwenden. In diesem Falle liegen besonders einfache Verhältnisse vor, da der Vektorraum F der $\mathfrak{F}^e$-Treppenfunktionen ein Untervektorverband von E ist, so daß wir anstelle des Satzes 4.7 das Korollar 4.9 verwenden können. Außerdem läßt sich der gemeinsame äußere Inhalt $p(R)$ einer Menge $R \in \mathfrak{R}^e$ besonders einfach berechnen, nämlich als das Infimum der äußeren Inhalte der Bildmengen von R.

Die in diesem Abschnitt gewonnenen Resultate sind für beschränkte Maße im wesentlichen bekannt (vgl. Bemerkung 7.5).

7.1. In diesem Abschnitt setzen wir zusätzlich zu den allgemeinen Voraussetzungen des ersten Abschnitts voraus, daß die Indexmenge I durch eine Relation $\prec$ *prägeordnet* und *aufsteigend filtrierend* ist.[6] Ferner existiere zu $i, j \in I$ mit $i \prec j$ eine $\mathfrak{Q}_j - \mathfrak{Q}_i$-meßbare Abbildung $f_{ij}: Y_j \to Y_i$ mit $f_i = f_{ij} \circ f_j$ und $f_{ij}(\mu_j) = \mu_i$.

Es ist klar, daß für alle $i, j \in I$ mit $i \prec j$ die Abbildung f_{ij}

[6] In [17, Beispiel 2.4] wurde verlangt, daß $\prec$ eine Ordnung ist; alle dort gemachten Überlegungen bleiben jedoch auch für Präordnungen gültig.

auch $\mathfrak{Q}_j^e - \mathfrak{Q}_i^e$-meßbar ist. Daher ergibt sich gemäß [17, Beispiel 2.4] für den gemeinsamen äußeren Inhalt p:

Entweder ist $p(R) = -\infty$ für alle $R \in \mathfrak{R}^e$ oder aber

$$p(R) = \inf_{i \in I} \mu_i^*(F_i(R)) \text{ für alle } R \in \mathfrak{R}^e,$$

wobei

$$\mu_i^*: \begin{cases} \mathfrak{P}(Y_i) \to [0, \infty] \\ A_i \mapsto \inf \{\mu_i(Q_i): Q_i \in \mathfrak{Q}_i, A_i \subset Q_i\}^7 \end{cases}$$

den zu μ_i gehörigen äußeren Inhalt bezeichnet.

Aus der Verträglichkeitsbedingung 1.6 für die Inhalte μ_i $(i \in I)$ folgt

$$\mu_i(Q_i) = 0 \text{ für alle } i \in I \text{ und alle } Q_i \in \mathfrak{Q}_i^e \text{ mit } Q_i \subset Y_i \setminus f_i(X).^8$$

Nach [17, Beispiel 2.4] gilt daher

$$p(R) = \inf_{i \in I} \mu_i(f_i(R)) \text{ für alle } R \in \mathfrak{R}.$$

Da $\mathfrak{F}^e = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{Q}_i^e)$ ein Ring ist, ist der Vektorraum $\boldsymbol{F}$ der $\mathfrak{F}^e$-Treppenfunktionen bezüglich der punktweisen Ordnung ein Vektorverband.

Zunächst zeigen wir, daß die Inhalte μ_i $(i \in I)$ auch hier so eng miteinander verknüpft sind, daß die Regularitätsbedingung 1.8 (R2) bereits aus (R1) folgt.

7.2. **Lemma.** *Die Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ erfülle die Bedingung (R1) aus Definition* 1.8 *für ein Mengensystem $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}^e$.*

Dann ist die Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{C}$-regulär.

Beweis. Sei $K \in \mathfrak{K}$ eine $\mathfrak{C}$-beschränkte Menge, und sei $F \in \mathfrak{F}$. Dann gibt es eine Menge $C \in \mathfrak{C}$ mit $K \subset C$ sowie Indizes $i, k \in I$ mit $C \in f_i^{-1}(\mathfrak{Q}_i^e)$ und $F \in f_k^{-1}(\mathfrak{Q}_k)$. Da I aufsteigend filtrierend ist, gibt es ein $l \in I$ mit $l > i, k$. Für dieses l gilt auch $C \in f_l^{-1}(\mathfrak{Q}_l^e)$ wegen $f_i = f_{il} \circ f_l$ und entsprechend auch $F \in f_l^{-1}(\mathfrak{Q}_l)$.

Daraus folgt $C \setminus F$, $C \cap F \in f_l^{-1}(\mathfrak{Q}_l) \subset \mathfrak{F}$. Wählen wir nun $n = 1$ und $F_1 = C$, so erhalten wir (R2) mit Hilfe von (R1) aus der Additivität von φ auf $f_l^{-1}(\mathfrak{Q}_l)$ (vgl. 1.6). ⌋

---

[7] $\inf \emptyset = +\infty$.

[8] In der hier betrachteten Situation projektiver Familien kann man leicht zeigen, daß diese Bedingung sogar zur Verträglichkeitsbedingung äquivalent ist.

Wir wenden uns zuerst der abstrakten Situation zu. Die Bezeichnungen des Lemmas 5.4 werden übernommen.

7.3. **Satz.** *Außer* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{P}(X)$ *sei noch ein Mengensystem* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}^e$ *gegeben, so daß* $\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{E}$ *die Bedingungen* 5.1 (i)–(v) *erfüllen. Für den Ring* $\mathfrak{R}$ *gelte* $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}) \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{E}}}))$.

Dann sind äquivalent:

(i) *Es gibt einen* $\mathfrak{K}$*-regulären,* σ*-additiven gemeinsamen Urbildinhalt der* $(\mu_i)_{i \in I}$ *auf* $\mathfrak{R}$.

(ii) *Es existiert ein Mengensystem* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}^e$, *so daß* $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{E}_\cup$*-beschränkt ist, mit*

$$\varphi(E) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset E}} [\inf_{i \in I} \mu_i^*(f_i(K))] \textit{ für alle } E \in \mathfrak{E}.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) aufgrund elementarer Eigenschaften von φ und μ_i^* $(i \in I)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Aus (ii) folgt wegen 7.1 für alle $E \in \mathfrak{E}$

$$\varphi(E) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset E}} p(K).$$

Daraus ergibt sich (i) mit Hilfe von Korollar 4.9 und Satz 5.5, da $\boldsymbol{F}$ ein Untervektorverband des Vektorraums $\boldsymbol{E}$ ist (7.1). $\lrcorner$

Als wahrscheinlichkeitstheoretische Variante des vorangehenden Satzes erhalten wir:

7.4. **Korollar.** *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von* 7.3 *sei für alle* $i \in I$ *der Ring* $\mathfrak{Q}_i$ *eine* σ*-Algebra und* μ_i *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathfrak{Q}_i$. $\mathfrak{R}$ *sei ebenfalls eine* σ*-Algebra mit* $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{E}}}))$.

Dann sind äquivalent:

(i) *Es gibt ein* $\mathfrak{K}$*-reguläres gemeinsames Urbild-Wahrscheinlichkeitsmaß der* $(\mu_i)_{i \in I}$.

(ii) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $K \in \mathfrak{K}$ *mit*

$\mu_i^*(f_i(K)) > 1 - \varepsilon$ *für alle* $i \in I$.

Beweis. Man wähle im vorangehenden Satz $\mathfrak{E} = \{X\}$. $\lrcorner$

7.5. **Bemerkung.** Die vorangehenden Resultate bzw. deren in 7.6 und 7.7 folgende topologischen Fassungen haben als (topologische) Urform einen Satz von Prohorov [20]. Weitere (ebenfalls topologische) Varianten dieser Ergebnisse finden sich bei Bourbaki [8, § 4], Kisyński [14, Theorem 3.2], Scheffer [21], und Topsoe [22, Theorem 5.3].

In den genannten Artikeln sind die Ausgangsmaße stets beschränkt, und die Voraussetzungen sind, abgesehen von einer Bemerkung von Bourbaki, so gewählt, daß das gemeinsame Urbildmaß (falls es existiert) bereits eindeutig bestimmt ist. Es stimmt nämlich auf dem System $\mathfrak{K}$ mit dem gemeinsamen äußeren Inhalt überein.

Wir gehen jetzt zur Behandlung der topologischen Situation über. Dabei übernehmen wir die Bezeichnungen aus Abschnitt 6.

7.6. Satz. *Die Mengen X und Y_i $(i \in I)$ seien Hausdorff-Räume, die Abbildungen f_i $(i \in I)$ seien stetig, die Abbildungen f_{ij} $(i, j \in I,\ i < j)$ seien Borel-meßbar. Für $i \in I$ sei μ_i ein reguläres Borelmaß auf Y_i.*

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) *Es gibt ein reguläres gemeinsames Urbild-Borelmaß der Familie $(\mu_i)_{i \in I}$.*

(ii) *Es gibt ein Mengensystem $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}^e$, so daß $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{E}_\cup$-beschränkt ist, mit*

$$\varphi(E) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ K \subset E}} [\inf_{i \in I} \mu_i(f_i(K))] \text{ für alle } E \in \mathfrak{E}.$$

(iii) *Für alle $j \in I$, jede kompakte Menge $C_j \subset Y_j$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset X$ mit $f_j(K) \subset C_j$ und*

$$\mu_i(f_i(K)) > \mu_j(C_j) - \varepsilon \text{ für alle } i \in I.$$

Beweis. Für die σ-Algebra $\mathfrak{B}$ der Borelschen Teilmengen von X gilt $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}) \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{K})) = \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K}^{\mathfrak{C}}}))$. Daher folgt die Äquivalenz von (i) und (ii) unmittelbar aus Satz 7.3.

(iii) ist eine Umformulierung von (ii) für den Fall $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}$. ⌋

Als wahrscheinlichkeitstheoretische Variante des Satzes 7.6 ergibt sich ohne Schwierigkeiten:

7.7. **Korollar.** *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von 7.6 sei jedes der regulären Borelmaße μ_i ($i \in I$) ein Wahrscheinlichkeitsmaß.*

Dann sind äquivalent:

(i) *Es gibt ein normiertes reguläres Borelmaß auf X, das gemeinsames Urbildmaß der $(\mu_i)_{i \in I}$ ist.*

(ii) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset X$ mit*

$\mu_i(f_i(K)) > 1 - \varepsilon$ *für alle $i \in I$.*

7.8. **Bemerkungen.** (1) Man kann sich leicht überzeugen, daß die Bedingung (ii) des Korollars 7.7 stets erfüllt ist, sofern für ein $j \in I$ die inversen Bilder kompakter Mengen unter der Abbildung f_j wieder kompakt sind, insbesondere also dann, wenn der Raum X selbst kompakt ist (vgl. auch Satz 6.4).

(2) Ist X ein *polnischer Raum*, so liegt im Hinblick auf die Ergebnisse bei einelementiger Indexmenge I ([15, Satz 1.8]) die Vermutung nahe, daß die Bedingung 7.7 (ii) (und damit auch 7.7 (i)) automatisch erfüllt ist (vgl. dazu Bemerkung 6.7).[9] Diese Vermutung erweist sich jedoch als falsch, wie das folgende Beispiel zeigen soll.

7.9. *Beispiel.* Wir wollen stochastische Prozesse mit Parametermenge $T = [0,1]$ und Zustandsraum $\boldsymbol{R}$ betrachten (zur Terminologie vgl. Bauer [4, 12.1]).

Als Indexmenge I wählen wir das System der endlichen, nichtleeren Teilmengen von T mit der Inklusion als Ordnungsrelation. X sei der polnische Raum $\boldsymbol{C}([0,1]) \subset \boldsymbol{R}^{[0,1]}$ der stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$, versehen mit der Supremumsnorm-Topologie. Für $i \in I$ sei $Y_i = \boldsymbol{R}^i$, und $f_i\colon X \to Y_i$ sei definiert durch $f_i(g) = (g(t))_{t \in i}$ (f_i ist also die Restriktion auf $\boldsymbol{C}([0,1])$ der Projektion von $\boldsymbol{R}^{[0,1]}$ auf $\boldsymbol{R}^i$). Schließlich sei für $i, j \in I$ mit $i \subset j$ die Abbildung $f_{ij}\colon Y_j \to Y_i$ die Projektionsabbildung von $\boldsymbol{R}^j$ auf $\boldsymbol{R}^i$.

Für $t \in T$ sei $\mathfrak{B}_t$ die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen

---

[9] Es sei daran erinnert, daß wir hier im Gegensatz zu [15] generell die Verträglichkeitsbedingung 1.6 voraussetzen.

von $\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{A}$ bezeichne die Spur der Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{t \in T} \mathfrak{B}_t$ in $C([0,1])$, d. h. $\mathfrak{A} = \{B \cap C([0,1]) : B \in \bigotimes_{t \in T} \mathfrak{B}_t\}$.

Da $[0,1]$ ein kompakter metrischer Raum ist, stimmt $\mathfrak{A}$ überein mit der σ-Algebra $\mathfrak{B}$ der Borelschen Mengen in $C([0,1])$ (vgl. [10, p. 314]).

Sei nun $(\mu_i)_{i \in I}$ die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eines stochastischen Prozesses mit Parametermenge T und Zustandsraum $\boldsymbol{R}$. Man kann sich dann leicht überlegen (vgl. Bauer [4, Beweis von 12.2.2]), daß die $(\mu_i)_{i \in I}$ genau dann ein gemeinsames reguläres Urbildmaß auf $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ besitzen, wenn $C([0,1])$ die Menge der Pfade eines zum Ausgangsprozeß äquivalenten Prozesses ist.

Da es Prozesse gibt, die keine äquivalente Version mit stetigen Pfaden besitzen (das folgt etwa aus Bauer [4, p. 365, example 2]), *gibt es nicht zu jeder projektiven Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ von Maßen μ_i auf $\boldsymbol{R}^i$ $(i \in I)$ ein gemeinsames reguläres Urbild-Borelmaß auf* $C([0,1])$, obwohl natürlich ein gemeinsamer Urbildinhalt existiert.

8. Fortsetzung von Mengenfunktionen zu regulären Maßen

8.1. In diesem Abschnitt gehen wir aus von einem Mengensystem $\mathfrak{F}$ von Teilmengen der Menge X mit $\emptyset \in \mathfrak{F}$ sowie von einer Mengenfunktion $\varphi : \mathfrak{F} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$. Außerdem seien ein Mengensystem $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{P}(X)$ und ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(X)$ mit $\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F} \subset \mathfrak{R}$ gegeben.

Gesucht sind Bedingungen für die Existenz eines $\mathfrak{K}$-regulären Inhalts auf $\mathfrak{R}$, der φ fortsetzt.[10]

Bereits in Bemerkung 1.7 haben wir erläutert, wie man diese Fragestellung so in unsere allgemeine Theorie einordnen kann, daß das gegebene Mengensystem $\mathfrak{F}$ und die gegebene Mengenfunktion φ gerade das in 1.5 eingeführte Mengensystem bzw. die in 1.6 definierte Funktion ist.

Wir können uns daher damit begnügen, einige uns besonders interessant erscheinende Fortsetzungsprobleme zu behandeln.

---

[10] Die Voraussetzungen $\emptyset \in \mathfrak{F}$ und $\varphi(\emptyset) = 0$ bedeuten keine Einschränkung der Allgemeinheit, da jeder Inhalt auf $\mathfrak{R}$ der leeren Menge notwendig den Wert 0 zuordnet.

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung eines Fortsetzungssatzes von Maharam; anschließend werden wir eine Verschärfung unserer Regularitätsbedingung (R2) für φ untersuchen, aus der bereits die Existenz einer endlich additiven Fortsetzung von φ folgt.

8.2. **Satz.** $\mathfrak{K}$ *erfülle die Bedingungen* 5.1 (i)–(iii), *die Abbildung* $\varphi\colon \mathfrak{F} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ *sei* $\mathfrak{C}$*-regulär für ein Mengensystem* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{K} \cap \mathfrak{F}^e$ *mit* $\mathfrak{F}^e = \{F \in \mathfrak{F}\colon \varphi(F) < \infty\}$. *Für den Ring* $\mathfrak{R}$ *gelte* $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}) \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{C}}))$, *wobei* $\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{C}}$ *den Ring der* $\mathfrak{C}_\cup$*-beschränkten Mengen aus* $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$ *bezeichnet.*

Dann sind äquivalent:

(i) φ *kann zu einem* $\mathfrak{K}$*-regulären,* σ*-additiven Inhalt auf* $\mathfrak{R}$ *fortgesetzt werden.*

(ii) φ *kann zu einem Inhalt auf* $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ *fortgesetzt werden.*

(iii) *Die Restriktion* φ^e *von* φ *auf* $\mathfrak{F}^e$ *kann zu einem Inhalt auf* $\mathfrak{R}(\mathfrak{F}^e)$ *fortgesetzt werden.*

(iv) *Für alle* $m, n \in \boldsymbol{N}$ *und jede Auswahl* $F_1, \ldots, F_m, F_1', \ldots, F_n' \in \mathfrak{F}^e$

mit $\sum_{j=1}^{n} 1_{F_j'} \leq \sum_{i=1}^{m} 1_{F_i}$ *gilt* $\sum_{j=1}^{n} \varphi(F_j') \leq \sum_{i=1}^{m} \varphi(F_i)$.

Beweis. Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) ergeben sich unmittelbar.

Sei nun (iv) erfüllt, $\mathfrak{K}^e$ bezeichne das System der $\mathfrak{F}^e_\cup$-beschränkten Mengen aus $\mathfrak{K}$. Dann gibt es gemäß [17, Korollar 2.7] einen Inhalt ν^e auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}^e \cup \mathfrak{F}^e)$ der φ^e fortsetzt (vgl. auch Lemma 2.3). Nach Satz 4.5 kann ν^e sogar $\mathfrak{K}^e$-regulär gewählt werden. Daher folgt die Behauptung aus Satz 5.5. $\square$

Als Anwendung beweisen wir nun den Fortsetzungssatz von Maharam [18, Theorem 8.1], den man auch sehr einfach aus den Sätzen 4.5 und 5.5 herleiten kann.

8.3. **Satz** (*D. Maharam*). *Sei* X *ein Hausdorff-Raum,* $\mathfrak{K}$ *bezeichne das System der kompakten Teilmengen von* X. *Für* $i \in I$ *sei* $\mathfrak{Q}_i$ *eine Algebra von Teilmengen von* X *und* μ_i *ein endlicher Inhalt auf* $\mathfrak{Q}_i$*, der die folgende Regularitätsbedingung erfüllt:*

$$\mu_i(Q_i) = \sup\{\mu_i(K): K \subset Q_i, K \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{Q}_i\} \textit{ für alle } Q_i \in \mathfrak{Q}_i.$$

Ferner sei $\mathfrak{R}$ *eine Algebra mit* $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}) \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K} \cap \mathfrak{F}}))$, *wobei* $\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{K} \cap \mathfrak{F}}$ *den Ring der* $(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{F})$*-beschränkten Mengen aus* $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F})$ *mit* $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{Q}_i$ *bezeichnet.*

Dann sind äquivalent:

(i) *Es gibt einen* $\mathfrak{K}$*-regulären,* σ*-additiven Inhalt* ν *auf* $\mathfrak{R}$, *der jeden der Inhalte* μ_i $(i \in I)$ *fortsetzt.*

(ii) *Für jede Auswahl* $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_n \in I$ *endlich vieler Indizes sowie von Mengen* $Q_k \in \mathfrak{Q}_{i_k}$ $(k = 1, \ldots, m)$, $Q'_l \in \mathfrak{Q}_{j_l}$ $(l = 1, \ldots, n)$ *mit* $\sum_{l=1}^{n} 1_{Q'_l} \leq \sum_{k=1}^{m} 1_{Q_k}$ *gilt* $\sum_{l=1}^{n} \mu_{j_l}(Q'_l) \leq \sum_{k=1}^{m} \mu_{i_k}(Q_k)$.

Beweis. Wir müssen nur den Schritt (ii) $\Rightarrow$ (i) beweisen.

Für $i \in I$ und $F \in \mathfrak{Q}_i \subset \mathfrak{F}$ setzen wir $\varphi(F) = \mu_i(F)$. Wegen (ii) ist damit die Abbildung $\varphi: \mathfrak{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ wohldefiniert. Nach Voraussetzung und Korollar 1.11 (b) ist φ $(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{F})$-regulär. Daher folgt die Behauptung aus Satz 8.2. ⌋

Wir wollen nun eine Verschärfung der Regularitätsbedingung (R2) aus Definition 1.8 untersuchen.

8.4. **Definition.** Seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$ zwei Systeme von Teilmengen von X mit $\emptyset \in \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$. Ferner sei $\varphi: \mathfrak{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ eine Mengenfunktion mit $\varphi(\emptyset) = 0$; $\varphi_* = \varphi_*^{\mathfrak{C}}$ bezeichne den zur Restriktion von φ auf $\mathfrak{C}$ gehörigen inneren Inhalt (vgl. Definition 1.8).

φ heiße *stark* $\mathfrak{C}$*-regulär*[11], wenn φ auf $\mathfrak{C}$ endlich ist und die folgende Caratheodorysche Zerlegungseigenschaft besitzt:

(R2*) $\varphi(F) = \varphi_*^{\mathfrak{C}}(F \setminus G) + \varphi_*^{\mathfrak{C}}(F \cap G)$ für alle $F, G \in \mathfrak{F}$.

8.5. *Elementare Folgerungen aus der starken Regularität.*

(1) $\varphi(F) = \varphi_*^{\mathfrak{C}}(F)$ *für alle* $F \in \mathfrak{F}$.

(2) φ *ist* $\mathfrak{C}$*-regulär im Sinne der Definition* 1.8 *für jedes Mengensystem* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{P}(X)$.

[11] Kisyński [14] und Topsøe [23] nennen derartige Mengenfunktionen „*tight*“ (bei ihnen ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}$ stets $\cap$-stabil).

Es sei noch daran erinnert, daß der innere Inhalt $\varphi_*^{\mathfrak{C}}$ isoton und superadditiv ist (Bemerkung 1.9 (i)).

8.6. **Notationen.** Für $F \in \mathfrak{F}$ sei $F^0 = F$ und $F^1 = X \setminus F$. Für $n \in \boldsymbol{N}$ sei $\Pi_n = \{0,1\}^n$.

8.7. **Lemma.** *Sei $\varphi: \mathfrak{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ eine stark $\mathfrak{C}$-reguläre Mengenfunktion. Dann gilt für alle $n \in \boldsymbol{N}$ und alle Mengen $F, F_1, \ldots, F_n \in \mathfrak{F}$*

$$\varphi(F) = \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \Pi_n} \varphi_*^{\mathfrak{C}}\Big(F \cap \bigcap_{k=1}^{n} F_k^{\varepsilon_k}\Big).$$

Beweis. Für $n = 1$ stimmt die Behauptung mit der Definition der starken Regularität überein.

Wir nehmen an, die Behauptung sei für $n - 1$ richtig.

Seien nun jeweils endlich viele disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_m \in \mathfrak{C}$ bzw. $C_1', \ldots, C_{m'}' \in \mathfrak{C}$ mit $\bigcup_{j=1}^{m} C_j \subset F \setminus F_1 = F \cap F_1^1$ bzw. $\bigcup_{j=1}^{m'} C_j' \subset F \cap F_1 = F \cap F_1^0$ gegeben. Dann gilt nach Induktionsannahme und wegen der Superadditivität von $\varphi_* = \varphi_*^{\mathfrak{C}}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \varphi(C_j) + \sum_{j=1}^{m'} \varphi(C_j') \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \Pi_{n-1}} \varphi_*\Big(C_j \cap \bigcap_{k=2}^{n} F_k^{\varepsilon_k}\Big) + \\
&+ \sum_{j=1}^{m'} \sum_{(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \Pi_{n-1}} \varphi_*\Big(C_j' \cap \bigcap_{k=2}^{n} F_k^{\varepsilon_k}\Big) \\
&\leq \sum_{(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \Pi_{n-1}} \Big[\varphi_*\Big(F \cap F_1^1 \cap \bigcap_{k=2}^{n} F_k^{\varepsilon_k}\Big) + \varphi_*\Big(F \cap F_1^0 \cap \bigcap_{k=2}^{n} F_k^{\varepsilon_k}\Big) \\
&= \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \Pi_n} \varphi_*\Big(F \cap \bigcap_{k=1}^{n} F_k^{\varepsilon_k}\Big) \leq \varphi_*(F) \\
&= \varphi_*(F \setminus F_1) + \varphi_*(F \cap F_1).
\end{aligned}$$

Geht man links über zum Supremum, genommen über alle endlichen Folgen (C_j) bzw. (C_j') disjunkter Mengen in $\mathfrak{C}$ mit obigen Eigenschaften, so ergibt sich die Gleichheit der linken und der rechten Seite der Ungleichungskette. Damit ist die Behauptung auch für n bewiesen. $\lrcorner$

8.8. **Lemma.** *Sei $\mathfrak{F}$ ein System von Teilmengen der Menge X. Dann besteht der von $\mathfrak{F}$ erzeugte Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ aus den endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen der Gestalt* $F_1 \cap \bigcap_{j=2}^{m} F_j^{\varepsilon_j}$ *mit $m \in \boldsymbol{N}$ sowie $F_1, \ldots, F_m \in \mathfrak{F}$ und $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) \in \Pi_{m-1}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{R}_0$ das System der endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen der angegebenen Gestalt. Offenbar gilt $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{F})$. Es genügt daher zu zeigen, daß $\mathfrak{R}_0$ ein Ring ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{R}_0$ stabil ist gegenüber endlichen disjunkten Vereinigungen, endlichen Durchschnitten und Differenzen. Nur die letzte dieser drei Eigenschaften ist nicht unmittelbar einzusehen.

Wir zeigen, daß mit $R = \bigcap_{j=1}^{m} F_j^{\varepsilon_j}$ und $S = \bigcap_{k=1}^{n} G_k^{\eta_k}$ ($m, n \in \boldsymbol{N}$; $F_1, \ldots, F_m, G_1, \ldots, G_n \in \mathfrak{F}$; $\varepsilon_1 = \eta_1 = 0$, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \eta_2, \ldots, \eta_n \in \{0,1\}$) auch $R \setminus S \in \mathfrak{R}_0$ gilt; der Übergang zu beliebigen Mengen $R, S \in \mathfrak{R}_0$ macht dann keine Schwierigkeiten mehr. Es gilt

$$R \setminus S = \bigcap_{j=1}^{m} F_j^{\varepsilon_j} \cap \bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus G_k^{\eta_k}) = \bigcup_{k=1}^{n} \Big(\bigcap_{j=1}^{m} F_j^{\varepsilon_j} \setminus G_k^{\eta_k} \cap \bigcap_{l=1}^{k-1} G_l^{\eta_l}\Big)$$

und damit $R \setminus S \in \mathfrak{R}_0$. ⌋

8.9. **Lemma.** *Sei $\varphi\colon \mathfrak{F} \to \boldsymbol{R}_+$ eine stark $\mathfrak{C}$-reguläre Mengenfunktion.*

Dann kann man φ auf genau eine Weise zu einem Inhalt λ auf dem von $\mathfrak{F}$ erzeugten Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ fortsetzen. λ ist dabei gerade die Restriktion von $\varphi_*^{\mathfrak{C}}$ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$, also insbesondere stark $\mathfrak{C}$-regulär auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$.

Beweis. (1) *Existenz.* Wir zeigen, daß die Restriktion von $\varphi_*^{\mathfrak{C}}$ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ ein Inhalt ist. Wegen Lemma 8.8 genügt es zu zeigen, daß $\varphi_* = \varphi_*^{\mathfrak{C}}$ additiv ist für endlich viele disjunkte Mengen $R_1, \ldots, R_n$ der dort angegebenen Gestalt. Wir können ferner annehmen, daß die in 8.8 auftretende natürliche Zahl m für alle $R_1, \ldots, R_n$ übereinstimmt.

Sei also $R_k = \bigcap_{j=1}^{m} F_{kj}^{\varepsilon_{kj}}$ für $k = 1, \ldots, n$ mit $F_{kj} \in \mathfrak{F}$ ($j = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$) und $\varepsilon_{k1} = 0$, $\varepsilon_{kj} \in \{0,1\}$ ($j = 2, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$). $\Pi_{n,m}$ bezeichne die Menge der $(n \times m)$-Matrizen deren sämtliche Elemente 0 oder 1 sind. Für je endlich viele disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_r \in \mathfrak{C}$ mit $\bigcup_{l=1}^{r} C_l \subset \bigcup_{k=1}^{n} F_{k1}$ ergibt sich aus Lemma 8.7 in Verbindung mit der Superadditivität von φ_* und der Disjunktheit von $R_1, \ldots, R_n$:

$$\sum_{l=1}^{r} \varphi(C_l) = \sum_{l=1}^{r} \left[\sum_{(\eta_{kj}) \in H_{n,m}} \varphi_* \left(C_l \cap \bigcap_{k,j=1}^{n,m} F_{kj}^{\eta_{kj}}\right)\right]$$

$$\leq \sum_{l=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{n} \varphi_* \left(C_l \cap \bigcap_{j=1}^{m} F_{kj}^{\varepsilon_{kj}}\right) + \varphi_* \left(C_l \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} F_{kj}^{\varepsilon_{kj}}\right)\right]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \varphi_* (R_k) + \varphi_* \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_{k1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} R_k\right) \leq \varphi_* \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_{k1}\right).$$

Gehen wir über zum Supremum, genommen über alle endlichen Folgen disjunkter Mengen $C_1, \ldots, C_r \in \mathfrak{C}$ mit $\bigcup_{l=1}^{r} C_l \subset \bigcup_{k=1}^{n} F_{k1}$, so stimmen die rechte und linke Seite der Abschätzung überein, und es folgt

$$\varphi_* \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_{k1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_* (R_k) + \varphi_* \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_{k1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} R_k\right).$$

Wegen der Superadditivität von φ_* erhalten wir daraus

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_* (R_k) = \varphi_* \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_{k1}\right) - \varphi_* \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_{k1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} R_k\right)$$

$$\geq \varphi_* \left(\bigcup_{k=1}^{n} R_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \varphi_* (R_k)$$

und damit die gewünschte Additivität von φ_*.

(2) *Eindeutigkeit.* Sei λ ein Inhalt auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$, der φ fortsetzt. Aufgrund der Bemerkung 1.9 (ii) gilt $\lambda(R) \geq \varphi_*(R)$ für alle $R \in \mathfrak{R}(\mathfrak{F})$. Wegen $\lambda(F) = \varphi(F) = \varphi_*(F)$ für alle $F \in \mathfrak{F}$ stimmen λ und φ_* auf den $\mathfrak{F}$-beschränkten Mengen aus $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ überein, dann aber auch auf den $\mathfrak{F}_\cup$-beschränkten Mengen aus $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$, d. h. auf dem ganzen Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$. ⌟

8.10. **Satz.** *$\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{K}$ seien Systeme von Teilmengen der Menge X, dabei sei $\emptyset \in \mathfrak{F}$, und $\mathfrak{K}$ erfülle die Bedingungen* 5.1 (i)–(iii). *$\varphi: \mathfrak{F} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ sei eine Mengenfunktion, die stark $\mathfrak{C}$-regulär ist für ein Mengensystem $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{K} \cap \mathfrak{F}$.*

Dann kann man φ zu einem $\mathfrak{K}$-regulären, σ-additiven Inhalt auf jedem Ring $\mathfrak{R}$ fortsetzen, für den $\mathfrak{R}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{F}) \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{l}(\sigma(\mathfrak{R}_0^{\mathfrak{C}}))$ gilt.

Beweis. φ^e bezeichne die Restriktion von φ auf $\mathfrak{F}^e = \{F \in \mathfrak{F}: \varphi(F) < \infty\}$. Nach Lemma 8.9 kann man φ^e zu einem Inhalt auf dem Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{F}^e)$ fortsetzen. Damit folgt die Behauptung aus Satz 8.2. $\square$

8.11. *Beispiele.* (i) Man wähle $X = \boldsymbol{R}^n$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}$ sei das System der achsenparallelen kompakten Würfel einschließlich der leeren Menge, $\mathfrak{K}$ das System der kompakten Teilmengen von X, und φ sei das n-dimensionale Volumen der Würfel in $\mathfrak{F}$.

Man prüft leicht nach, daß φ stark $\mathfrak{C}$-regulär ist. Daher liefert Satz 8.10 die Existenz einer Fortsetzung von φ zu einem regulären Borelmaß auf $\boldsymbol{R}^n$.

(ii) Sei $\mathfrak{F} = \mathfrak{C} = \mathfrak{K}$ das System der kompakten Teilmengen eines Hausdorff-Raumes X. $\varphi: \mathfrak{K} \to \boldsymbol{R}_+$ sei isoton, endlich additiv und subadditiv mit der folgenden Zusatzeigenschaft:

Für jede kompakte Menge $K \in \mathfrak{K}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $U \supset K$, so daß $\varphi(K) < \varphi(K') + \varepsilon$ für alle $K' \in \mathfrak{K}$ mit $K' \subset U$ gilt.[12]

Aus einem Ergebnis von Kisyński [14, Theorem 1.1] folgt sofort, daß φ unter diesen Voraussetzungen stark $\mathfrak{C}$-regulär ist. Daher folgt aus Satz 8.10 das bekannte Ergebnis, daß φ zu einem regulären Borelmaß fortgesetzt werden kann (vgl. Kisyński [14, Theorem 1.2]).

Symbole und Bezeichnungen

1.1. $\cup$-, $\cap$-, $(\cup, \cap)$-stabil
$\mathfrak{M}_{\cup}$, $\mathfrak{M}_{\cap}$, $\mathfrak{M}_{(\cup,\cap)}$
Ring, σ-Ring, Algebra,
σ-Algebra
Inhalt, Maß

1.2. $\mathfrak{M}$-beschränkt
1.3. $\mathfrak{K}$-regulär
1.4. I
$X, Y_i, \mathfrak{R}, \mathfrak{Q}_i, f_i, \mu_i, \mathfrak{K}$
1.5. $\mathfrak{Q}_i^e, \mu_i^e, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}^e, \mathfrak{K}^e, \mathfrak{R}^e$

[12] Bei Kisyński [14] heißt eine solche Mengenfunktion auf $\mathfrak{K}$ „*semiregular content*", bei Halmos [11, §§ 53, 54] und Berberian [5, § 64] heißt sie „*regular content*".

Literatur

[1] Andenaes, P. R.: Hahn-Banach extensions which are maximal on a given cone. Math. Ann. 188, 90–96 (1970).

[2] Anger, B.: Minimale Fortsetzungen additiver Funktionale. S.-ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München (1975).

[3] Anger, B.-Lembcke, J.: Hahn-Banach type theorems for hypolinear functionals on preordered topological vector spaces. Pacific J. Math. 54, 13–33 (1974).

[4] Bauer, H.: Probability theory and elements of measure theory. New York: Holt, Rinehart & Winston 1972.

[5] Berberian, St. K.: Measure and integration. New York: Macmillan Comp. 1965.

[6] Bourbaki, N.: Topologie générale, chap. I–II (3ᵉ édition). Act. Sci. et Ind. 1142, Paris 1961.

[7] – Intégration, chap. I–IV (2ᵉ édition). Act. Sci. et Ind. 1175, Paris 1965.

[8] – Intégration, chap. IX. Act. Sci. et Ind. 1343, Paris 1969.

[9] Courrège, P.: Théorie de la mesure (2ᵉ édition). Paris: CDU 1965.

[10] Gihman, I. I.-Skorohod, A. V.: The theory of stochastic processes I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1974.

[11] Halmos, P. R.: Measure theory. New York: Van Nostrand 1950.

[12] Kellerer, H. G.: Maßtheoretische Marginalprobleme. Math. Ann. 153, 168–198 (1964).

[13] – Verteilungsfunktionen mit gegebenen Marginalverteilungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 3, 247–270 (1964).

[14] Kisyński, J.: On the generation of tight measures. Studia Math. 30, 141–151 (1968).

[15] Lembcke, J.: Konservative Abbildungen und Fortsetzung regulärer Maße. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 15, 57–96 (1970).

[16] – Simultaneous inverse image measures. Papers from the „Open house for probabilists" 1971. Aarhus Univ., Various Publications Series 21, 179–186 (1972).

[17] – Gemeinsame Urbilder endlich additiver Inhalte. Math. Ann. 198, 239–258 (1972).

[18] Maharam, D.: Consistent extensions of linear functionals and of probability measures. Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. 2, 127–147 (1971).

[19] Marczewki, E.: On compact measures. Fundamenta Math. 40, 113–124 (1953).

[20] Prohorov, Yu. V.: Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. Theor. Probability Appl. 1, 159–214 (1956).

[21] Scheffer, C. L.: Sur l'existence de la limite projective dans la catégorie des espaces de probabilité tendus. C. R. Acad. Sci. Paris 269, 205–207 (1969).

[22] Topsøe, F.: Measure spaces connected by correspondences. Math. Scand. 30, 5–45 (1972).

[23] – On construction of measures. (Preprint 1974).