

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1976

MÜNCHEN 1977

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Relative Probleme von Poincaré und Cousin auf nicht-reduzierten komplexen Räumen

Günther Kraus

Vorgelegt von Herrn Prof. Dr. Karl Stein

Sei X ein komplexer Raum über einem komplexen Raum S – es sei also eine holomorphe Abbildung $p: X \rightarrow S$ ausgezeichnet – und sei Σ eine Teilmenge von S . In dieser Arbeit werden meromorphe Funktionen auf X betrachtet, deren meromorphe Beschränkung auf jede Faser $X_s, s \in \Sigma$, definiert ist; diese Funktionen werden meromorphe Funktionen relativ Σ genannt. Ferner wird der Begriff des Divisors relativ Σ eingeführt. Für $\Sigma = \emptyset$ erhält man die klassischen Begriffe.

Unter dem relativen Problem von Poincaré verstehe ich die folgende Frage: Gegeben sei eine meromorphe Funktion f relativ Σ . Gibt es eine globale Quotientendarstellung $f = g/h$, die durch analytische Beschränkung auf die Fasern $X_s, s \in \Sigma$, eine globale Quotientendarstellung von $f|X_s$ induziert? Gesucht wird also ein „Nichtnullteiler relativ Σ “ h , derart, daß $h \cdot f$ holomorph ist. Es wird bewiesen:

1. Ist Σ diskret und gilt in X Theorem A, so ist das Poincaré-Problem relativ Σ lösbar (Satz 4.4).

2. Ist X eine Steinsche Mannigfaltigkeit mit $H^2(X, \mathbf{Z}) = 0$, so ist das Poincaré-Problem relativ S lösbar (Satz 4.5).

Als relatives Cousin-II-Problem sehe ich an, notwendige und hinreichende Bedingungen für die „Lösbarkeit“ relativer Divisoren zu finden. Ein Divisor D relativ Σ wird dabei lösbar genannt, wenn D der durch eine invertierbare meromorphe Funktion f , deren meromorphe Beschränkungen auf die Fasern $X_s, s \in \Sigma$, definiert und invertierbar sind, bestimmte Hauptdivisor ist. Im Fall $H^1(X, \mathbf{O}_X) = 0$ ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit eines relativen Divisors D das Verschwinden der durch D bestimmten Cohomologieklassse $\gamma(D) \in H^2(X, \mathbf{Z})$ – es liegt also die gleiche topologische Charakterisie-

nung vor wie im klassischen Fall. Insbesondere ist $H^2(X, \mathbf{Z}) = 0$ bei Räumen mit $H^1(X, \mathbf{O}_X) = 0$ eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit aller relativen Divisoren auf X . Um die Notwendigkeit dieser Bedingung zu beweisen, muß man prüfen, ob jede Cohomologieklassse $c \in H^2(X, \mathbf{Z})$ Bild eines Divisors relativ Σ ist. Sei $\mathbf{D}_{X/\Sigma}$ die Garbe der Divisoren relativ Σ auf X , $\mathbf{D}_{X/\Sigma}^+$ die Untergarbe der positiven Divisoren relativ Σ . Es wird gezeigt:

1. Ist Σ diskret und gilt in X Theorem A , so ist die kanonische Abbildung

$$\mathbf{D}_{X/\Sigma}^+(X) \rightarrow H^1(X, \mathbf{O}_X^*)$$

surjektiv (Satz 5.3).

2. Ist $X = S \times T$ mit Steinschen komplexen Räumen S, T und gilt $H^2(S, \mathbf{Z}) = 0$, so ist die kanonische Abbildung

$$\mathbf{D}_{X/\Sigma}(X) \rightarrow H^1(X, \mathbf{O}_X^*)$$

surjektiv (Satz 5.5).

Mit diesen Sätzen ist das relative Cousin-II-Problem in den betrachteten Fällen vollständig gelöst.

Für den Spezialfall $\Sigma = \emptyset$ ergeben sich aus den Sätzen 4.4 und 5.3 Verschärfungen von [1, Theorema 2 bzw. 1]; die dortigen Fallunterscheidungen können unterbleiben.

1. Bezeichnungen

In dieser Arbeit sei stets X ein komplexer Raum über einem komplexen Raum S ; es ist also eine holomorphe Abbildung $p: X \rightarrow S$ ausgezeichnet. Die komplexen Räume werden nicht als reduziert vorausgesetzt, jedoch Hausdorffsch und mit einer abzählbaren Basis der Topologie.

Ist Y ein komplexer Raum, so sei

\mathbf{O}_Y die Strukturgarbe von Y ,

\mathbf{O}_Y^* die Garbe der Einheiten von \mathbf{O}_Y ,

\mathbf{S}_Y die Garbe der Nichtnullteiler von \mathbf{O}_Y ,

\mathfrak{m}_y ($y \in Y$) das maximale Ideal von $\mathbf{O}_{Y,y}$.

Eine offene Teilmenge $V \subset Y$ wird als komplexer Raum mit der Strukturgarbe $\mathbf{O}_V := \mathbf{O}_Y|_V$ aufgefaßt. Für $f \in \mathbf{O}_V(V)$ und $y \in V$ sei f_y der Keim von f im Punkt y und $f(y) := f_y + \mathfrak{m}_y \in \mathbf{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y \cong \mathcal{C}$ der Funktionswert von f im Punkt y .

Sind \mathbf{F} , \mathbf{G} kohärente analytische Garben auf Y , so ist die Idealgarbe

$$\mathbf{G} :_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{F} = \mathbf{G} : \mathbf{F} \subset \mathcal{O}_Y,$$

definiert durch $(\mathbf{G} : \mathbf{F})_y := \mathbf{G}_y : \mathbf{F}_y := \{f \in \mathcal{O}_{Y,y} : f \cdot \mathbf{F}_y \subset \mathbf{G}_y\}$ für alle $y \in Y$, ebenfalls kohärent; wir verwenden die Abkürzungen $\circ : \mathbf{F} := \circ \cdot \mathcal{O}_Y : \mathbf{F}$, $\circ : f := \circ \cdot \mathcal{O}_Y : f \cdot \mathcal{O}_Y$ ($f \in \mathbf{F}(Y)$). Sei ferner

$$|\mathbf{F}| := \{y \in Y : \mathbf{F}_y \neq \circ\}.$$

Eine abgeschlossene Teilmenge A von Y heißt analytisch dünn, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ der Beschränkungshomomorphismus $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_Y(V \setminus A)$ injektiv ist.

Sei $s \in S$, $U \subset X$ offen, $f \in \mathcal{O}_X(U)$ und \mathbf{F} eine kohärente analytische Garbe auf X . Dann sei

$X_s := p^{-1}(s) := \{s\} \times_S X$ die Faser im Punkt s ,

\mathbf{J}_s die definierende Idealgarbe von X_s ,

$U_s := U \cap X_s$,

f_s die analytische Beschränkung von f auf U_s , also $f_s = f \circ j_s$, wobei $j_s : U_s \rightarrow U$ die Einbettungsabbildung ist.

2. Ein Lemma

In X gelte Theorem A (vgl. [3, § 2, Satz 4]). Sei \mathbf{F} eine kohärente \mathcal{O}_X -Modulgarbe. Zu jedem $x \in X$ existiere eine offene Umgebung $U^{(x)}$, eine Idealgarbe $\mathbf{J}^{(x)} \subset \mathcal{O}_X|_{U^{(x)}}$ und ein Garbenisomorphismus $\varphi^{(x)} : \mathbf{F}|_{U^{(x)}} \rightarrow \mathbf{J}^{(x)}$.

Für alle $x \in X$ und $f \in \mathbf{F}(U^{(x)})$ sei dann

$$f(x) = \circ : \Leftrightarrow \varphi^{(x)}(f)_x \in \mathfrak{m}_x.$$

2.1 Lemma. Sei $R \subset X$ eine diskrete Teilmenge; für alle $x \in R$ sei $\mathbf{F}_x \cong \mathcal{O}_{X,x}$. Dann existiert ein $f \in \mathbf{F}(X)$ mit $f(x) \neq \circ$ für alle $x \in R$.

Beweis. Da X abzählbare Topologie hat, ist R endlich oder abzählbar unendlich, also gibt es eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $M \rightarrow R$, $n \mapsto x_n$. Für jedes $n \in M$ sei \mathbf{J}_n die Idealgarbe der analytischen Menge $R \setminus \{x_n\}$; wegen $(\mathbf{J}_n \mathbf{F})_{x_n} \cong \mathcal{O}_{X,x_n}$ gibt es dann nach Theorem A ein $f_n \in \mathbf{J}_n \mathbf{F}(X)$

mit $f_n(x_n) \neq 0$. Sei $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Seminormen, welche die kanonische Fréchetraum-Topologie auf $F(X)$ definiert; man kann o. E. voraussetzen: $p_k \leq p_{k+1}$ für alle k . Für $n \in M$ sei $a_n := \max \{1, p_n(f_n)\}$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \in M} \frac{2^{-n}}{a_n} f_n$$

gegen ein $f \in F(X)$, und für alle $n \in M$ ist $f(x_n) = \frac{2^{-n}}{a_n} f_n(x_n) \neq 0$.

3. Relativ analytisch dünne Mengen und relative Nichtnullteiler

Sei Σ eine Teilmenge von S , und sei $A \subset X$ eine analytisch dünne Teilmenge. A heißt analytisch dünn relativ Σ , wenn für alle $s \in \Sigma$ gilt: $A_s := A \cap X_s$ ist analytisch dünn in X_s .

Die Garbe $S_{X/\Sigma}$ der Nichtnullteiler relativ Σ ist definiert durch $S_{X/\Sigma}(U) := \{f \in S_X(U) : \text{Für alle } s \in \Sigma \text{ ist } f_s \in S_{X_s}(U_s)\}$ für offene Mengen $U \subset X$. Es gilt $S_{X/\emptyset} = S_X$.

3.1 Lemma. Für ein kohärente Idealgarbe $J \subset O_X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

3.1.1 $|O_X/J|$ ist analytisch dünn relativ Σ .

3.1.2 $(J \cap S_{X/\Sigma})_x \neq \emptyset$ für alle $x \in X$.

3.1.3 $o : o_X J = 0$ und $o : o_{X_s} J = 0$ für alle $s \in \Sigma$.

Der Beweis benutzt den Nullstellensatz; er darf hier übergangen werden.

Für unsere Zwecke ist noch eine weitere Charakterisierung von „analytisch dünn“ wichtig. Für einen komplexen Raum Y und alle $n \in \mathbb{N}$ sei $O_{[n]} \subset O_Y$ die n -te Lückengarbe der Nullidealgarbe; für alle $y \in Y$ ist

$$O_{[n],y} := \{s \in O_{Y,y} : \text{Es gibt eine offene Umgebung } V \text{ von } y, \\ \text{eine analytische Menge } B \text{ in } V \text{ mit } \dim B \\ \leq n \text{ und ein } t \in O_Y(V) \text{ mit } t|_{V \setminus B} \\ = 0 \text{ und } t_y = s\}.$$

Nach Thimm [6] ist $O_{[n]}$ kohärent und daher $E_n := |O_{[n]}|$ analytisch. Das Komponentensystem \mathfrak{M}_Y sei die Menge aller irredu-

ziblen Komponenten der Mengen E_n , $n \in N$. Dann gilt [5, Lemma 2.3]:

3.2 *Lemma.* Eine analytische Menge $B \subset Y$ ist genau dann analytisch dünn, wenn sie keine der Mengen $A \in \mathfrak{M}_Y$ umfaßt.

3.3 *Korollar.* Sei $f \in \mathbf{O}(X)$. Genau dann gilt $f \in S_{X/\Sigma}(X)$, wenn $|\mathbf{O}_X/f\mathbf{O}_X|$ keine analytische Menge des Systems

$$\mathfrak{M}_X \cup \bigcup_{s \in \Sigma} \mathfrak{M}_{X_s}$$

umfaßt.

3.4 *Lemma.* In X gelte Theorem A. Sei $\Sigma \subset X$ eine diskrete Teilmenge und $\mathbf{J} \subset \mathbf{O}_X$ eine kohärente Idealgarbe, derart, daß $|\mathbf{O}_X/\mathbf{J}|$ analytisch dünn relativ Σ ist. Dann gilt:

$$\mathbf{J}(X) \cap S_{X/\Sigma}(X) \neq \emptyset.$$

Beweis. Wegen Lemma 3.2 und wegen der Voraussetzungen gibt es in X eine diskrete Punktmenge R mit folgenden Eigenschaften:

- i) $R \cap |\mathbf{O}_X/\mathbf{J}| = \emptyset$.
- ii) R trifft jede analytische Menge des Systems $\mathfrak{M}_X \cap \bigcup_{s \in \Sigma} \mathfrak{M}_{X_s}$.

Nach 2.1 gibt es ein $f \in \mathbf{J}(X)$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in R$; nach 3.3 gilt $f \in S_{X/\Sigma}(X)$.

4. Relative meromorphe Funktionen und das relative Poincaré-Problem

4.1 *Lemma.* Sei $\mathbf{S} \subset \mathbf{O}_X$ eine Untergarbe von Mengen. Es gibt eine \mathbf{O}_X -Modulgarbe $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{O}_X$ von lokalen Ringen und einen Garbenhomomorphismus $h: \mathbf{O}_X \rightarrow \mathbf{S}^{-1}\mathbf{O}_X$ mit folgenden Eigenschaften:

4.1.1 Für jede offene Menge $U \subset X$ sind die Elemente von $h_U(\mathbf{S}(U))$ invertierbar in $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{O}_X(U)$.

4.1.2 Ist \mathbf{F} eine weitere \mathbf{O}_X -Modulgarbe von lokalen Ringen und $k: \mathbf{O}_X \rightarrow \mathbf{F}$ ein Garbenhomomorphismus, derart, daß für jede offene Menge $U \subset X$ die Elemente von $k_U(\mathbf{S}(U))$ invertier-

bar in $\mathbf{F}(U)$ sind, so existiert genau ein Garbenhomomorphismus $l: \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O}_X \rightarrow \mathbf{F}$ mit $k = l \circ h$.

Die Garbe $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{O}_X$ ist als Lösung eines universellen Problems eindeutig bestimmt bis auf kanonische Isomorphie.

Der Beweis dieses Lemmas ist eine einfache Folgerung z. B. von [2, chap. II, § 2, N° 1, Prop. 1]. Man erhält $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{O}_X$ als die der durch

$$U \mapsto \mathbf{O}_X(U) [\mathbf{S}(U)^{-1}]$$

definierten Prägarbe zugeordnete Garbe.

4.2 Definition. Sei Σ eine Teilmenge von S . $\mathbf{M}_{X/\Sigma} := \mathbf{S}_{X/\Sigma}^{-1} \mathbf{O}_X$ heißt die Garbe der meromorphen Funktionen relativ Σ .

Wir schreiben \mathbf{M}_X an Stelle von $\mathbf{M}_{X/\emptyset}$. Die folgende Aussage ist leicht zu zeigen:

4.3 Sei $f \in \mathbf{M}_X(X)$. Dann ist die Idealgarbe $\mathbf{P}_f \subset \mathbf{O}_X$, definiert durch $\mathbf{P}_{f,x} := \{h \in \mathbf{O}_{X,x} : h \cdot f_x \in \mathbf{O}_{X,x}\}$ für $x \in X$, kohärent.

4.4 Satz. In X gelte Theorem A. Sei Σ eine diskrete Teilmenge von S . Dann gilt

$$\mathbf{M}_{X/\Sigma}(X) = \mathbf{S}_{X/\Sigma}(X)^{-1} \mathbf{O}_X(X),$$

d. h.: Zu jeder meromorphen Funktion $f \in \mathbf{M}_{X/\Sigma}(X)$ gibt es holomorphe Funktionen $g \in \mathbf{O}_X(X)$, $h \in \mathbf{S}_{X/\Sigma}(X)$ mit $f = g/h$.

Beweis. Für alle $x \in X$ gibt es Funktionskeime $\tilde{g}_x \in \mathbf{O}_{X,x}$, $\tilde{h}_x \in \mathbf{S}_{X/\Sigma,x}$ mit $\tilde{h}_x \cdot f_x = \tilde{g}_x$, also $\tilde{h}_x \in \mathbf{P}_{f,x} \cap \mathbf{S}_{X/\Sigma,x}$. Nach 3.1 ist daher $|\mathbf{O}_X/\mathbf{P}_f|$ analytisch dünn relativ Σ . Nach 3.4 existiert ein $h \in \mathbf{P}_f(X) \cap \mathbf{S}_{X/\Sigma}(X)$, und es ist $g := h \cdot f \in \mathbf{O}_X(X)$.

Unter speziellen Voraussetzungen an X bleibt die Aussage von Satz 4.4 auch richtig für $\Sigma = S$. Es gilt nämlich:

4.5 Satz. Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $H^1(X, \mathbf{O}_X^*) = 0$. Dann gilt

$$\mathbf{M}_{X/S}(X) = \mathbf{S}_{X/S}(X)^{-1} \mathbf{O}(X).$$

¹⁾ Diese Voraussetzung ist für Steinsche Mannigfaltigkeiten mit $H^2(X, \mathbf{Z}) = 0$ erfüllt.

Der Beweis ist eine Folgerung von Satz 5.1 über die Lösbarkeit des relativen Cousin-II-Problems und wird im Anschluß an Satz 5.1 gegeben.

5. Relative Divisoren und das relative Cousin-II-Problem

Sei Σ eine Teilmenge von S . Dann definieren wir:

$\mathbf{M}_{X/\Sigma}^* \subset \mathbf{M}_{X/\Sigma}$ durch $\mathbf{M}_{X/\Sigma, x}^* := \{f \in \mathbf{M}_{X/\Sigma, x} : \text{Es gibt } g, h \in \mathbf{S}_{X/\Sigma, x} \text{ mit } f = g/h\}$ für alle $x \in X$ (Garbe der invertierbaren (oder regulären) meromorphen Funktionen relativ Σ),

$\mathbf{D}_{X/\Sigma} := \mathbf{M}_{X/\Sigma}^* / \mathbf{O}_X^*$ (Garbe der Divisoren relativ Σ); dies ist eine Garbe abelscher Gruppen, die Verknüpfung wird als Addition geschrieben.

$\mathbf{D}_{X/\Sigma}^+$ sei das Bild von $\mathbf{S}_{X/\Sigma}$ unter dem kanonischen Garbenhomomorphismus $\pi_\Sigma : \mathbf{M}_{X/\Sigma}^* \rightarrow \mathbf{D}_{X/\Sigma}$; $\mathbf{D}_{X/\Sigma}^+$ heißt Garbe der positiven (oder effektiven) Divisoren relativ Σ .

Wir schreiben wieder \mathbf{M}_X^* , \mathbf{D}_X und \mathbf{D}_X^+ an Stelle von $\mathbf{M}_{X/\emptyset}^*$, $\mathbf{D}_{X/\emptyset}$ bzw. $\mathbf{D}_{X/\emptyset}^+$. Die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbf{O}_X^* \rightarrow \mathbf{M}_{X/\Sigma}^* \xrightarrow{\pi_\Sigma} \mathbf{D}_{X/\Sigma} \rightarrow 0$$

liefert die exakte Cohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \mathbf{O}_X^*(X) \rightarrow \mathbf{M}_{X/\Sigma}^*(X) \xrightarrow{\pi_\Sigma} \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X) \xrightarrow{\delta_\Sigma} H^1(X, \mathbf{O}_X^*) \rightarrow \dots$$

Ein relativer Divisor $D \in \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X)$ heißt lösbar (oder Hauptdivisor relativ Σ), wenn er im Bild der Abbildung π_Σ liegt. Wegen der Exaktheit ist dies äquivalent mit $\delta_\Sigma(D) = 0$. Gilt $H^1(X, \mathbf{O}_X^*) = 0$, so hat man einen Monomorphismus $\delta^1 : H^1(X, \mathbf{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})^2$ und erhält somit (es sei $\gamma_\Sigma := \delta^1 \circ \delta_\Sigma$):

5.1 Satz. Gilt $H^1(X, \mathbf{O}_X^*) = 0$, so ist ein relativer Divisor $D \in \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X)$ genau dann lösbar, wenn $\gamma_\Sigma(D) = 0$ ist.

Wir können nun den Beweis von Satz 4.5 nachtragen: Sei $f \in \mathbf{M}_{X/S}(X)$. Für jedes $x \in X$ gibt es dann eine teilerfremde

2) δ^1 ist der „verbindende Homomorphismus“ in der exakten Cohomologiesequenz, die aus der folgenden exakten Sequenz $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{O}_X \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{O}_X^* \rightarrow 0$ abgeleitet ist: Sei U eine offene Teilmenge von X und $f \in \mathbf{O}_X(U)$. Dann sei $\varepsilon(f) := e \circ f$ mit $e : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^*$, $z \mapsto \exp(2\pi iz)$. Ist X Steinsch, also auch $H^2(X, \mathbf{O}_X) = 0$, ist δ^1 ein Isomorphismus.

Darstellung $f = g/h$ mit $g \in \mathbf{O}_{X,x}$, $h \in \mathbf{S}_{X/S,x}$; wegen der Teilerfremdheit folgt $\mathbf{P}_{f,x} = h \cdot \mathbf{O}_{X,x}$. Es gibt eine offene Umgebung $U^{(x)}$ von x und einen Repräsentanten $H^{(x)} \in \mathbf{S}_{X/S}(U^{(x)})$, der \mathbf{P}_f über $U^{(x)}$ erzeugt. Für $x, y \in X$ folgt hieraus $(H^{(x)} | U^{(x)} \cap U^{(y)}) \cdot (H^{(y)} | U^{(x)} \cap U^{(y)})^{-1} \in \mathbf{O}_X^*(U^{(x)} \cap U^{(y)})$; die Familie $(U^{(x)}, H^{(x)})_{x \in X}$ definiert also einen positiven relativen Divisor $P_f \in \mathbf{D}_{X/S}^+(X)$. Wegen $H^1(X, \mathbf{O}_X^*) = 0$ gibt es ein $H \in \mathbf{M}_{X/S}^*(X)$ mit $\pi_S^\circ(H) = P_f$; für alle $x \in X$ folgt $H_x \in \mathbf{P}_{f,x} \cap \mathbf{S}_{X/S,x}$; daraus ergibt sich $H \in \mathbf{P}_f(X) \cap \mathbf{S}_{X/S}(X)$, also $F = G/H$ mit $G := H \cdot F \in \mathbf{O}_X(X)$.

Bemerkung: Die Funktionen G, H in dem obigen Beweis sind teilerfremd in $\mathbf{O}_X(X)$.

Nach Satz 5.1 ist das Verschwinden der Cohomologiegruppe $H^2(X, \mathbf{Z})$ bei Räumen mit $H^1(X, \mathbf{O}_X) = 0$ eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit aller relativen Divisoren auf X . Die Frage nach der Notwendigkeit dieser Bedingung führt auf die Frage nach der Surjektivität der Abbildung $\gamma_\Sigma: \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$. Ist X Steinsch, so gilt $H^1(X, \mathbf{O}_X^*) \cong H^2(X, \mathbf{Z})$, und γ_Σ ist genau dann surjektiv, wenn $\delta_\Sigma^\circ: \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X) \rightarrow H^1(X, \mathbf{O}_X^*)$ es ist. Der folgende Satz gibt eine Antwort auf diese Frage.

5.2 Satz. In X gelte Theorem A. Sei Σ eine diskrete Teilmenge von S . Dann ist die Abbildung

$$\delta_\Sigma^\circ | \mathbf{D}_{X/\Sigma}^+(X) \rightarrow H^1(X, \mathbf{O}_X^*)$$

surjektiv.

Beweis. Sei $z \in H^1(X, \mathbf{O}_X^*)$. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X , so daß z repräsentiert wird durch eine Familie $(h_{ij})_{i,j \in I}$ mit $h_{ij} \in \mathbf{O}_X^*(U_i \cap U_j)$, $h_{ij}h_{jk} = h_{ik}$ über $U_i \cap U_j \cap U_k$ ($i, j, k \in I$). Für $i \in I$ sei $F_i := \mathbf{O}_X | U_i$. Die Zuordnung $\varphi \mapsto h_{ij}\varphi$ definiert dann Isomorphismen von Modulgarben.

$$\Theta_{ij}: F_j | U_i \cap U_j \rightarrow F_i | U_i \cap U_j \quad (i, j \in I)$$

mit $\Theta_{ij} \circ \Theta_{jk} = \Theta_{ik}$ über $U_i \cap U_j \cap U_k$ ($i, j, k \in I$). Es gibt daher (vgl. [4,0,3.3.1]) eine \mathbf{O}_X -Modulgarbe \mathbf{F} und eine Familie $(\eta_i)_{i \in I}$ von Isomorphismen von \mathbf{O}_{U_i} -Modulgarben $\eta_i: \mathbf{F} | U_i \rightarrow F_i$ mit $\eta_i \circ \eta_j^{-1} = \Theta_{ij}$ über $U_i \cap U_j$ ($i, j \in I$).

Man wähle eine diskrete Punktmenge $R \subset X$, die jede analytische Menge des Systems $\mathfrak{M}_X \cup \bigcup_{s \in \Sigma} \mathfrak{M}_{X_s}$ trifft. Nach Lemma 2.1 gibt es ein $g \in \mathbf{F}(X)$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in R$. Setzt man $f_i := \eta_i(g | U_i)$ für $i \in I$, so folgt $f_i \in \mathbf{S}_{X|\Sigma}(U_i)$.

Denn für jedes $A \in \mathfrak{M}_X$ gibt es ein $x \in R \cap A$; aus $g(x) \neq 0$ folgt $(0 : g)_x = 0$; für $h \in \mathbf{O}_{X,x}$ ist nämlich $hg_x = 0$ äquivalent mit $hf_{i,x} = 0$ ($i \in I$ so gewählt, daß $x \in U_i$), also mit $h = 0$. Nach 3.2 ist $|0 : g|$ analytisch dünn in X ; daraus folgt $0 : g = 0$. Für alle $i \in I$ folgt hieraus $f_i \in \mathbf{S}_X(U_i)$.

Ebenso gibt es für alle $s \in \Sigma$ und $A \in \mathfrak{M}_{X_s}$ ein $x \in R \cap A$, also mit $g(x) \neq 0$. Hieraus folgt auf analoge Weise $(\mathbf{J}_s \mathbf{F} : \mathbf{O}_{X_s} g)_x = \mathbf{J}_{s,x}$, also $(0 : \mathbf{O}_{X_s} g_s)_x = 0$, also wie oben $0 : \mathbf{O}_{X_s} g_s = 0$ und somit $f_{i,s} \in \mathbf{S}_{X_s}(U_{i,s})$ für alle $i \in I$.

Für alle $i, j \in I$ gilt $(f_i | U_i \cap U_j)(f_j | U_i \cap U_j)^{-1} = h_{ij} \in \mathbf{O}_X^*(U_i \cap U_j)$; daher wird durch die Familie $(U_i, f_i)_{i \in I}$ ein positiver Divisor $D \in \mathbf{D}_{X|\Sigma}^+(X)$ mit $\delta_\Sigma^\circ(D) = z$ definiert.

5.3 *Corollar.* Für einen Steinschen komplexen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

5.3.1 Es gibt eine diskrete Teilmenge Σ von S , derart, daß jeder positive Divisor relativ Σ lösbar ist.

5.3.2 Für jede Teilmenge Σ von S ist jeder Divisor relativ Σ lösbar.

$$3.3.3 \quad H^1(X, \mathbf{O}_X^*) = 0.$$

Die Aussage von Satz 5.2 ist nicht völlig zufriedenstellend. Es interessiert insbesondere, ob es zu jedem $z \in H^1(X, \mathbf{O}_X^*)$ einen Divisor relativ S gibt, der auf z abgebildet wird. Die Antwort auf diese Frage ist schwieriger und kann in dieser Arbeit nur für den Fall $X = S \times T$ gegeben werden, wobei S und T Steinsche komplexe Räume sind und $H^2(S, \mathbf{Z}) = 0$ gelten muß; zum Beweis wird das Ergebnis von Satz 5.2 verwendet werden. Zunächst benötigen wir weitere Hilfsaussagen über relative Divisoren.

Ein relativer Divisor $D \in \mathbf{D}_{X|\Sigma}(X)$ definiert eine Familie $(U_i, f_i)_{i \in I}$, wobei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist und $f_i \in \mathbf{M}_{X|\Sigma}^*(U_i)$ ($i \in I$) relative meromorphe Funktionen sind

mit $(f_i | U_i \cap U_j)(f_j | U_i \cap U_j)^{-1} \in \mathbf{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ für alle $i, j \in I$; umgekehrt definiert jede solche Familie einen relativen Divisor. Wir können nun eine invertierbare Untergarbe $\mathbf{O}_X(D)$ von $\mathbf{M}_{X/\Sigma}$ definieren: Für $x \in U_i$ sei $\mathbf{O}_X(D)_x := f_{i,x}^{-1} \mathbf{O}_{X,x}$. Diese Zuordnung bildet $\mathbf{D}_{X/\Sigma}(X)$ bijektiv auf die Menge der invertierbaren Untergarben von $\mathbf{M}_{X/\Sigma}$ ab.

Sei $|D| := \{x \in X: \text{Ist } i \in I \text{ mit } x \in U_i, \text{ so gilt } f_{i,x} \notin \mathbf{O}_{X,x}^*\}$; diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Familie $(U_i, f_i)_{i \in I}$; ferner ist $|D| = |(\mathbf{O}_X(D) + \mathbf{O}_X) / (\mathbf{O}_X(D) \cap \mathbf{O}_X)|$ und daher analytisch (mit $\mathbf{O}_X(D)$ ist auch $\mathbf{O}_X(D) + \mathbf{O}_X$ eine Untergarbe endlichen Typs von $\mathbf{M}_{X/\Sigma}$ und daher, wie man leicht sieht, kohärent).

5.4 Lemma. Sei Σ eine diskrete Teilmenge von S , und sei $D \in \mathbf{D}_X(X)$ ein Divisor. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

5.4.1 $D \in \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X)$.

5.4.2 $|D|$ ist analytisch dünn relativ Σ .

Beweis. Sei $x \in X$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x und ein $f \in \mathbf{M}_X^*(U)$ mit $D|U = \pi_U(f)$, und es ist zu zeigen: $f \in \mathbf{M}_{X/\Sigma}^*(U) \Leftrightarrow |D| \cap U$ analytisch dünn relativ Σ .

5.4.1 \Rightarrow 5.4.2: Sei $f \in \mathbf{M}_{X/\Sigma}^*(U)$. Nach eventueller Verkleinerung von U findet man $g, h \in \mathbf{S}_{X/\Sigma}(U)$ mit $f = g/h$. Es ist $|D| \cap U \subset |O_U|(g) \cup |O_U|(h)$ und daher nach 3.1 analytisch dünn relativ Σ .

5.4.2 \Rightarrow 5.4.1: U sei Steinsch gewählt, und $|D| \cap U$ sei analytisch dünn relativ Σ . Sei R eine diskrete Teilmenge, die mit $|D|$ leeren Durchschnitt hat, aber jede analytische Menge des Systems $\mathfrak{M}_X \cup \bigcup_{s \in \Sigma} \mathfrak{M}_{X_s}$ trifft. Nach 2.1 gibt es ein $h \in \mathbf{P}_f(U)$ mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in R$. Sei $g := fh$; nach 3.3 folgt $g, h \in \mathbf{S}_{X/\Sigma}(U)$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Im Beweis des nächsten Satzes wird folgende Bemerkung benutzt: Sei $\Sigma' \subset S$ eine Teilmenge, $s \in \Sigma'$ und $D \in \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X)$. Dann induziert D in kanonischer Weise einen Divisor $D_s \in \mathbf{D}_{X_s}(X_s)$: Wird D in $x \in X$ durch $f \in \mathbf{M}_{X/\Sigma, x}^*$ gegeben, so wird D in x durch $f_s \in \mathbf{M}_{X_s, x}^*$ definiert. Ist D positiver Divisor, so auch D_s .

5.5 Satz. Es seien S und T Steinsche komplexe Räume, $X := S \times T$ und $p: X \rightarrow S$, $q: X \rightarrow T$ die Projektionsabbildungen. Ferner gelte $H^2(S, \mathbf{Z}) = 0$. Dann ist der Homomorphismus

$$\delta_S^\circ: \mathbf{D}_{X/S}(X) \rightarrow H^1(X, \mathbf{O}_X^*) \cong H^2(X, \mathbf{Z})$$

surjektiv.

Beweis. X wird als komplexer Raum über S (bzgl. p) und über T (bzgl. q) aufgefaßt. Es gibt abzählbare, diskrete Punkt-
mengen $\Sigma \subset T$ und $R \subset X$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Σ trifft jede analytische Menge des Komponentensystems \mathfrak{M}_T .
2. R trifft jede analytische Menge des Komponentensystems \mathfrak{M}_X , die nicht in einer Faser X_t , $t \in \Sigma$, enthalten ist.
3. $R \cap X_t = \emptyset$ für alle $t \in \Sigma$.

Sei $\mathbf{J}_0 \subset \mathbf{O}_X$ die kohärente Idealgarbe aller auf R verschwindenden holomorphen Funktionen, $\mathbf{J}_1 := \bigcap_{t \in \Sigma} \mathbf{J}_t$ und $\mathbf{J} := \mathbf{J}_0 \cap \mathbf{J}_1$; dann ist \mathbf{J} kohärent. Sei Y der durch \mathbf{J} definierte komplexe Unterraum von X . Der kanonische Homomorphismus $\tau: \mathbf{O}_X(X) \rightarrow \mathbf{O}_Y(Y)$ ist nach Theorem B surjektiv.

Sei nun $z \in H^1(X, \mathbf{O}_X^*)$. Nach Satz 5.2 gibt es einen positiven relativen Divisor $D' \in \mathbf{D}_{X/\Sigma}^*(X)$ mit $\delta_\Sigma^\circ(D') = z$.

a) Sei $t \in \Sigma$, und sei D'_t der durch D' auf X_t induzierte positive Divisor. Wegen $H^2(X_t, \mathbf{Z}) = H^2(S, \mathbf{Z}) = 0$ gibt es nach Satz 5.1 ein $f^{(t)} \in \mathbf{S}_{X_t}(X_t)$ mit $\pi^\circ(f^{(t)}) = D'_t$, und man sieht – da D' ein Divisor ist – leicht: Ist $A \in \mathfrak{M}_X$ mit $A \subset X_t$, so gibt es ein $x \in A$ mit $f^{(t)}(f^{(t)}(x)) \neq 0$.

Da X_t Zusammenhangskomponente von Y ist, gibt es ein $g^{(t)} \in \mathbf{O}_Y(Y)$ mit $g^{(t)}|_{X_t} = f^{(t)}$ und $g^{(t)}|_{Y \setminus X_t} = 0$. Wähle $G^{(t)} \in \mathbf{O}_X(X)$ mit $\tau(G^{(t)}) = g^{(t)}$.

b) Sei $x \in R$. Dann gibt es ein $h^{(x)} \in \mathbf{O}_Y(Y)$ mit $h^{(x)}(x) \neq 0$ und $h^{(x)}|_{Y \setminus \{x\}} = 0$. Sei $H^{(x)} \in \mathbf{O}_X(X)$ mit $\tau(H^{(x)}) = h^{(x)}$.

Man wähle nun Teilmengen M und N von N und bijektive Abbildungen $M \rightarrow \Sigma$, $m \mapsto t_m$, und $N \rightarrow R$, $n \mapsto x_n$. Wie im Beweis von Lemma 2.1 kann man nun positive reelle Faktoren a_m , b_n definieren, derart, daß die Reihe

$$\sum_{m \in M} \frac{2^{-m}}{a_m} G^{(t_m)} + \sum_{n \in N} \frac{2^{-n}}{b_n} H^{(x_n)}$$

in der Fréchetraum-Topologie von $\mathbf{O}_X(X)$ gegen ein $F \in \mathbf{O}_X(X)$ konvergiert, welches folgende Eigenschaften hat:

- i) Zu jedem $A \in \mathfrak{M}_X$ existiert ein $x \in A$ mit $F(x) \neq 0$.
- ii) Für jedes $t \in \Sigma$ gilt $F = \alpha_t f^{(t)}$ mit $\alpha_t \in \mathbf{R}$, $\alpha_t \neq 0$.

Aus i) folgt $F \in \mathbf{S}_X(X)$ (zusammen mit ii) ergibt sich $F \in \mathbf{S}_{X/\Sigma}(X)$). Sei $D'' = \pi^\circ(F)$ der durch F bestimmte Hauptdivisor, und sei $D := D' - D''$. Dann gilt $\delta^\circ(D) = \delta^\circ(D') = z$, und zum Beweis des Satzes genügt es zu zeigen: $D \in \mathbf{D}_{X/S}(X)$.

Aus $D_t = 0$ für jedes $t \in \Sigma$ folgt, da Σ alle analytischen Mengen von \mathfrak{M}_T trifft, daß $|D_s|$ analytisch dünn ist für jedes $s \in S$ (Man beachte, daß X_s isomorph zu T ist). Nach Lemma 5.4 folgt die Behauptung.

Literatur

- [1] Acquistapace, F. und F. Broglia: Problemi di Cousin e di Poincaré per spazi di Stein non ridotti. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 27 (1973).
- [2] Bourbaki, N.: Algèbre commutative, Paris: Hermann 1961–1965.
- [3] Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. math. I. H. E. S. 5 (1960).
- [4] Grothendieck, A. und J. A. Dieudonné: Eléments de Géométrie Algébrique I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1971.
- [5] Kraus, G.: Holomorphe Korrespondenzen und meromorphe Abbildungen allgemeiner komplexer Räume – Fortsetzungssätze. Manusc. math. 6, 1–15 (1972).
- [6] Thimm, W.: Lückengarben von kohärenten analytischen Modulgarben. Math. Ann. 148, 372–394 (1962).