BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Variationsgleichungen und finite Elemente

von

Hans Bufler, Stuttgart

Vorgelegt von Heinz Neuber in der Sitzung vom 13. 12. 1974

1. Einleitung

Die Methode der finiten Elemente wurde ursprünglich intuitiv begründet. Erst in den letzten Jahren erkannte man, daß sie sich als Spielart des Ritzschen oder des Galerkinschen Verfahrens interpretieren läßt [1] [2]. Diese besteht darin, anstelle von Globalansätzen Ansätze für die einzelnen Bereiche (Elemente) zu verwenden, ein Vorgehen, das bereits von Courant [3] im Jahre 1943 vorgeschlagen wurde. Beim Arbeiten mit Bereichsfunktionen sind neben den (auf die Außenränder bezogenen) Randbedingungen die (auf die Innenränder bezogenen) Übergangsbedingungen zu beachten. Die Methode der gewichteten Residuen – als Sonderfall jene von Galerkin – ist an kein Funktional gebunden; jedoch müssen beim Galerkin-Prozeß als Ansatzfunktionen Vergleichsfunktionen (die sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen) verwendet werden. Die Methode von Ritz hingegen beruht auf der Existenz eines Funktionals, das für die wahre Lösung einen Stationärwert annimmt; die Ansatzfunktionen brauchen nur „zulässig" sein, also (außer gewisser Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen) lediglich den wesentlichen Rand- und Übergangsbedingungen genügen.

Im Rahmen der Elastostatik kommen als Funktionale bei der Verschiebungsmethode das Potential (Lagrange, Green, Dirichlet), bei der Kraftmethode das Komplementärpotential (Menabrea, Castigliano) und bei den sog. hybriden Methoden die verallgemeinerten Potentiale nach Hellinger-Reißner sowie nach Hay-Chang Hu und K. Washizu in Betracht [4]. Bei letzteren sind die Ansatzfunktionen weitgehend frei; insbesondere sind sie nicht an die Randbedingungen – wohl aber jeweils an gewisse Übergangsbedingungen – gebunden. Wie von Prager [5], [6]

bzw. von Bufler [7], [8] gezeigt wurde, kann man sich auch von diesen Bindungen teilweise bzw. ganz befreien, indem man die zugrunde gelegten Funktionale durch entsprechende Zusatzglieder erweitert. Nimmt man diese Erweiterung nicht vor, so muß man mit Ansätzen, die die jeweils geforderten Übergangsbedingungen respektieren (sog. konforme Ansätze), arbeiten oder zumindest Ansätze verwenden, für welche die genannten Zusatzglieder verschwinden. Beispielsweise müssen in der Kirchhoffschen Plattentheorie bei Zugrundelegung des (nichterweiterten) Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials konforme Ansatzfunktionen so beschaffen sein, daß sowohl die Durchbiegung als auch die Neigung in Normalenrichtung an den Bereichsgrenzen stetig ineinander übergehen.

In all jenen Fällen, in denen kein Funktional existiert, wird man zunächst über die Methode der gewichteten Residuen zum Ziele zu kommen versuchen. Eine große Willkür bei dieser Methode liegt jedoch in der Wahl der Gewichtsfunktionen, sofern man nicht speziell das Galerkin-Verfahren bevorzugt, das allerdings wegen der dabei zu verwendenden Vergleichsfunktionen in der Anwendung auf Mehrbereichsaufgaben (finite Elemente) stark eingeschränkt ist. Man vermeidet diese Willkür, indem man auf die in der Elastostatik bekannten Prinzipien der virtuellen Verschiebungen und der virtuellen Kräfte – die man mit Hilfe der Langrange-Parameter von den jeweiligen Nebenbedingungen befreien kann – zurückgreift [7], [8]. Wenn also kein Funktional existiert (beispielsweise bei nicht elastischem Formänderungsverhalten oder bei nichtkonservativer Belastung), wenn man der Willkür in der Wahl der Gewichtsfunktionen bei der Methode der gewichteten Residuen entgehen will, und wenn man trotzdem Ansatzfunktionen mit möglichst wenig Restriktionen zu verwenden bestrebt ist, so hat man in den das verallgemeinerte Prinzip der virtuellen Verschiebungen (bzw. der virtuellen Kräfte) beinhaltenden Variationsgleichungen ein geeignetes Hilfsmittel.

Diese Prinzipien sind nun keineswegs an elastostatische Aufgabenstellungen gebunden, sondern sie bestehen auch bei verschiedenen anderen Problemen der mathematischen Physik. In der vorliegenden Notiz wird unter Beschränkung auf lineare

Operatoren* gezeigt, daß bei einer bestimmten Struktur der Ausgangsgleichungen zwei Prinzipien der virtuellen Variablen existieren, nämlich immer dann, wenn die Ausgangsgleichungen zwei adjungierte Systeme von algebraischen Gleichungen (bei diskreten Problemen, Ziff. 2) bzw. von Differentialgleichungen erster Ordnung (bei kontinuierlichen Problemen, Ziff. 3) sind. Bei der Anwendung dieser Prinzipien kommen das Eliminationsverfahren und die Lagrangesche Multiplikatorenmethode in Betracht. Letztere führt zwangsläufig zu den verallgemeinerten Variationsgleichungen; diese kann man (im Falle eines Kontinuums) auch für Mehrbereichsaufgaben, wie sie bei der Methode der finiten Elemente auftreten, nutzbar machen. Selbstverständlich benötigt man zur vollständigen Beschreibung in den Variationsgleichungen noch die konstitutiven Beziehungen, die die in einem System auftretenden Variablen mit jenen im adjungierten System verknüpfen. Sind diese so beschaffen, daß Funktionale (Potentiale, Komplementärpotentiale) existieren, so kommt man zu Variationsprinzipien, welche den in der Elastostatik bekannten Prinzipien entsprechen. Es werden systematische Herleitungen gegeben und die einzelnen Querverbindungen aufgezeigt.

2. Diskontinuierliche Probleme

Man könnte diese zwar als Sonderfall in die in Ziff. 3 verfolgte Konzeption von Skalarprodukten in Hilberträumen einbetten, doch kommt ihnen zumindest für Fragestellungen aus der Mechanik eine eigenständige Bedeutung zu. Deshalb sollen die für sie zuständigen Variationsgleichungen eigens entwickelt werden.

2.1 Ausgangsgleichungen

Im folgenden werden einige Tatsachen aus der Theorie der linearen Gleichungen benötigt; siehe z. B. [9].

A sei eine reelle Matrix der Ordnung (m, n) mit $n > m$; σ und ε seien reelle Spaltenmatrizen der Ordnung n, q und u solche der

* Über die entsprechenden nichtlinearen Probleme soll an anderer Stelle berichtet werden.

Ordnung m. Die transponierten Größen werden durch einen Stern gekennzeichnet. Dann besteht die bilineare Identität

$$u^* A \sigma = \sigma^* A^* u. \tag{2.0}$$

Ein physikalischer Sachverhalt werde durch die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{array}{lll} \text{I} & \boxed{A\sigma = q} & \text{(Grundsystem) und} \quad (2.1) \\ \text{II} & \boxed{A^* u = \varepsilon} & \text{(adjungiertes System)} \quad (2.2) \end{array}$$

sowie durch die eindeutigen Relationen (konstitutive Gleichungen)

$$\left.\begin{array}{l} \text{III} \quad \sigma = \sigma(\varepsilon) \\ \text{bzw.} \\ \text{III}' \quad \varepsilon = \varepsilon(\sigma) \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

beschrieben. (Gln. (2.3) werden erst später benötigt.)
Mit (2.1) und (2.2) liefert (2.0) die grundlegende skalare Beziehung

$$\boxed{\sigma^* \varepsilon = u^* q = q^* u}, \tag{2.4}$$

die in der Elastostatik als Arbeitssatz bekannt ist, sofern σ die inneren Kräfte, ε die Verzerrungen, q die äußeren Kräfte und u die Verschiebungen repräsentiert; in diesem Fall beinhaltet (2.1) die „Statik" (Gleichgewichtsbedingungen) und (2.2) die „Geometrie" (Verzerrungs-Verschiebungs-Gleichungen).

Mit dem linearen Gesetz $\sigma = E\varepsilon$ folgt $\sigma^{*(1)} \varepsilon^{(2)} = \sigma^{*(2)} \varepsilon^{(1)}$ und damit der Zusammenhang

$$q^{*(1)} u^{(2)} = q^{*(2)} u^{(1)}, \tag{2.5}$$

der in der Elastostatik als Betti-Maxwellscher Reziprozitätssatz bezeichnet wird (der obere Index 1 bzw. 2 deutet an, daß die betreffenden Größen der Relation (2.1) bzw. (2.2) genügen).

Wegen $n = m + p > m$ ist das System (2.1) unterbestimmt (in der Elastostatik: „statisch unbestimmt") und das System (2.2) überbestimmt. Aus (2.1) folgt daher

I′
$$\boxed{\sigma = [C^* \; B^*] \begin{bmatrix} q \\ x \end{bmatrix}}, \tag{2.6}$$

worin der zweite Anteil die Lösung der homogenen Gleichung und der erste Anteil eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung darstellt; die (unbestimmte) Spaltenmatrix x hat die Ordnung p, die Matrix B die Ordnung (p, n) und die Matrix C die Ordnung (m, n). Einsetzen von (2.6) in (2.1) führt zu

$$A\,B^* = 0; \quad AC^* = I \tag{2.7}$$

mit I als Einheitsmatrix der Ordnung (m, m).

Mit (2.6) in (2.4) resultiert

II′
$$\boxed{\begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} \varepsilon = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}}, \tag{2.8}$$

wobei die zweite Gleichung die Kompatibilitätsbedingung des überbestimmten Systems (2.2) darstellt, während die erste der Berechnung von u dient. Die dualen Beziehungen (2.6) und (2.8) sind grundsätzlich den Beziehungen (2.1) und (2.2) äquivalent.

Bemerkung: Im Fall $n < m$ ist (2.2) unterbestimmt (in der Elastostatik: „kinematisch unbestimmt") und (2.1) überbestimmt. Hier vertauschen σ und u bzw. q und ε ihre Rollen und es ergibt sich analog:

$$u = [F^* D^*] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ y \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} F \\ D \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$A^* D^* = 0; \qquad A^* F^* = I,$$

während Gleichung (2.4) bestehen bleibt.

Wir kehren zum Fall $n > m$ zurück und betrachten eine weitere spezielle Variante von (2.1) und (2.2):

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \sigma = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [A^*_1 \;\; A^*_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ z \end{bmatrix} = \varepsilon;$$

hierin sind u_1 und q_1 von der Ordnung $r < m$ und z ist von der Ordnung $m - r$. Ausführlich geschrieben lauten diese Beziehungen:

$$A_2\sigma = 0; \qquad A_1\sigma = q_1; \tag{2.9}$$

$$\varepsilon = A_1^* u_1 + A_2^* z. \tag{2.10}$$

Verwendet man in (2.3) das lineare Gesetz

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.11}$$

mit $E = E^*$ als symmetrischer positiv definierter Matrix der Ordnung (n, n), so gelangt man durch Eliminationsprozesse zu folgenden Methoden:

Auf (2.1), (2.2) und (2.11) beruhen

a) die „u-Methode"

$$AEA^*u = q \quad \text{mit } AEA^* = S = S^*, \tag{2.12}$$

b) die „$u - \sigma$-Methode"

$$\begin{bmatrix} E^{-1} & A^* \\ A & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Auf (2.6), (2.8) und (2.11) beruhen

c) die „x-Methode"

$$BE^{-1}B^*x = -BE^{-1}C^*q \text{ mit } BE^{-1}B^* = K = K^*, \tag{2.14}$$

d) die „$x - \varepsilon$-Methode"

$$\begin{bmatrix} E & B^* \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^* q \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Auf (2.9), (2.10) und (2.11) beruhen schließlich
e) die „z-Methode"

$$A_2EA_2^* z = -A_2EA_1^* u_1 \text{ mit } A_2EA_2^* = L = L^*, \tag{2.16}$$

f) die „$z - \sigma$-Methode"

$$\begin{bmatrix} E^{-1} & A_2^* \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* u_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

In der Elastostatik heißen die „u-Methode" und die „z-Methode" Verschiebungsmethoden und die „x-Methode" Kraftmethode

(x statisch Unbestimmte). Die Analogie zwischen der „x-Methode" und der „z-Methode" geht auf Argyris zurück [10].

Bei konkreten Aufgaben ist ein Teil der Elemente von q und der komplementäre Teil der Elemente von u vorgegeben. Dann schreibt man die Beziehungen (2.1) und (2.2) zweckmäßig in folgender Form:

$$\text{I} \qquad \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \sigma = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; \qquad q_1 = \hat{q}_1 \text{ (gegeben)}; \tag{2.18}$$

$$\text{II} \qquad [A_1^* \; A_2^*] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \varepsilon; \quad u_2 = \hat{u}_2 \text{ (gegeben)}, \tag{2.19}$$

wobei q_1 und u_1 bzw. q_2 und u_2 jeweils von gleicher Ordnung sind. Äquivalent sind gemäß (2.6) und (2.8) die dualen Beziehungen

$$\text{I}' \qquad \sigma = [C_1^* \; C_2^*] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + B^* x; \qquad q_1 = \hat{q}_1; \tag{2.20}$$

$$\text{II}' \qquad B\varepsilon = 0; \quad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \varepsilon = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \qquad u_2 = \hat{u}_2. \tag{2.21}$$

2.2 Prinzip der virtuellen „Verschiebungen" *

Die virtuellen (infinitesimalen) Änderungen von u bzw. ε werden mit δu bzw. $\delta\varepsilon$ bezeichnet. Das Prinzip der virtuellen „Verschiebungen" lautet, wie aus (2.4) ersichtlich ist, wegen $\delta u_2 = 0$

$$\boxed{\sigma^* \, \delta\varepsilon = q^* \, \delta u = \hat{q}_1^* \, \delta u_1}, \tag{2.22}$$

wobei für die virtuellen Größen die Nebenbedingungen (N. B.) II (nach (2.19)) oder (gleichwertig) II′ (nach (2.21)) bestehen. Es ist eine Folge der Beziehung I (nach (2.18)) bzw. I′ (nach (2.20)) (II bzw. II′ wird ja vorausgesetzt!). Umgekehrt folgt aus ihm I bzw. I′, so daß es eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Relationen I bzw. I′ darstellt. Dies kann man durch Elimination von $\delta\varepsilon$ bzw. von δu in (2.22) zeigen:

---

* Diese Bezeichnung wird hier und im folgenden in Anlehnung an die Begriffe der Elastostatik gewählt, obwohl es sich bei u keineswegs um Verschiebungen handeln muß.

a) Elimination von $\delta\varepsilon$ mittels (2.19) – nämlich $\delta\varepsilon = A_1^* \delta u_1$ – führt zu dem in u_1 freien Problem

$$(\sigma^* A_1^* - \hat{q}_1^*)\,\delta u_1 = 0.$$

Hieraus ergibt sich wegen der Willkürlichkeit von δu_1 das Verschwinden des Klammerausdrucks und damit (2.18):

$$A_1 \sigma - \hat{q}_1 = 0.$$

b) Heranziehung von (2.21) zur Elimination von δu_1; nämlich $\delta u_1 = C_1 \delta\varepsilon$:

$\sigma^* \delta\varepsilon = \hat{q}_1^* \delta u_1 = \hat{q}_1^* C_1 \delta\varepsilon$ mit den N. B. $B\,\delta\varepsilon = 0$ und $C_2 \delta\varepsilon = 0$.

Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren (λ, μ Spaltenmatrizen) liefert das in ε freie Problem

$$(\sigma^* - \hat{q}_1^* C_1 - \lambda^* C_2 - \mu^* B)\,\delta\varepsilon = 0,$$

aus dem man wegen der Willkürlichkeit von $\delta\varepsilon$ auf

$$\sigma - C_1^* \hat{q}_1 - C_2^* \lambda - B^* \mu = 0$$

und damit auf (2.20) schließt (die Bedeutung der Multiplikatoren λ und μ ist offensichtlich: $\lambda = q_2$, $\mu = x$).

c) Eine in den Variablen ε, u_1, u_2 sowie λ und μ (Lagrange-Multiplikatoren) freie Variationsgleichung erhält man durch Berücksichtigung von (2.19) mittels der Methode der Lagrange-Multiplikatoren:

$$\boxed{\sigma^* \delta\varepsilon - \hat{q}_1^* \delta u_1 - \delta\,\{\lambda^*(\varepsilon - A_1^* u_1 - A_2^* u_2) + \mu^*(u_2 - \hat{u}_2)\} = 0} \tag{2.23}$$

Ausführen der Variationen und Zusammenfassen liefert

$$\begin{aligned} &\delta\varepsilon^*(\sigma - \lambda) + \delta u_1^*(A_1 \lambda - \hat{q}_1) + \delta u_2^*(A_2 \lambda - \mu) - \\ &\quad - \delta\lambda^*(\varepsilon - A_1^* u_1 - A_2^* u_2) - \delta\mu^*(u_2 - \hat{u}_2) = 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

und damit

I $\quad A_1 \lambda - \hat{q}_1 = 0; \qquad A_2 \lambda - \mu = 0;$

II $\quad \varepsilon - A_1^* u_1 - A_2^* u_2 = 0; \qquad u_2 - \hat{u}_2 = 0;$

$\quad \lambda - \sigma = 0.$

Es folgt also $\lambda = \sigma$, während μ mit q_2 identifiziert werden kann.

d) Ebenso bekommt man eine in den Variablen ε, u_1, u_2 sowie λ, μ_1, μ_2 und ν (Lagrange-Multiplikatoren) freie Variationsgleichung, indem man in (2.22) die Beziehungen (2.21) geeignet berücksichtigt:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^* \delta\varepsilon - \hat{q}_1^* \delta u_1 - \delta\{\lambda^* B\varepsilon + \mu_1^*(C_1\varepsilon - u_1) + \\ + \mu_2^*(C_2\varepsilon - u_2) + \nu^*(u_2 - \hat{u}_2)\} = 0\end{aligned}} \tag{2.25}$$

Nach dem Variieren des Klammerausdrucks folgt

$$\begin{aligned}&\delta\varepsilon^*(\sigma - B^*\lambda - C_1^*\mu_1 - C_2^*\mu_2) + \delta u_1^*(\mu_1 - \hat{q}_1) + \delta u_2^*(\mu_2 - \nu) \\ &- \delta\lambda^* B\varepsilon - \delta\mu_1^*(C_1\varepsilon - u_1) - \delta\mu_2^*(C_2\varepsilon - u_2) - \delta\nu^*(u_2 - \hat{u}_2) = 0\end{aligned} \tag{2.26}$$

und daraus

$$\begin{aligned}&\text{I}' \quad \sigma - C_1^*\mu_1 - C_2^*\mu_2 - B^*\lambda = 0; \qquad \mu_1 - \hat{q}_1 = 0; \\ &\text{II}' \quad B\varepsilon = 0; \quad C_1\varepsilon - u_1 = 0; \quad C_2\varepsilon - u_2 = 0; \quad u_2 - \hat{u}_2 = 0; \\ &\qquad \mu_2 - \nu = 0.\end{aligned}$$

Es ist also $\nu = \mu_2$; ferner kann man μ_1 mit q_1, μ_2 mit q_2 und λ mit x identifizieren.

Bemerkung: Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren dient dazu, ein gebundenes Variationsproblem in ein freies überzuführen. Das gebundene Variationsproblem lautet mit $f = f(v_i)$

$$\delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i}\,\delta v_i = 0 \qquad \text{mit N. B. } g_j\,(v_i) = 0 \text{ (holonom) bzw.}$$

$$\sum_i \bar{g}_{ji}\,\delta v_i = 0 \text{ (nichtholonom).}$$

Das Prinzip der virtuellen „Verschiebungen" fordert das Verschwinden einer i. a. nicht integrablen Differentialform erster Ordnung:

$$\sum_i f_i \delta v_i = 0 \qquad \text{mit N. B.} \quad g_j(v_i) = 0 \quad \text{bzw.} \sum_j \bar{g}_{ji}\,\delta v_i = 0.$$

Bei holonomen Nebenbedingungen erhält man nach der Methode der Langrange-Multiplikatoren bekanntlich das freie Variationsproblem [11]

$$\delta(f + \sum_j \lambda_j\, g_j) = 0.$$

Ganz analog ergibt sich das freie Prinzip der virtuellen „Verschiebungen"

$$\sum_i f_i \delta v_i + \delta \sum_j \lambda_j g_j = 0;$$

dabei sind alle Variablen v_i sowie zusätzlich die Multiplikatoren λ_j frei zu variieren. Im Falle nichtholonomer Nebenbedingungen gilt

$$\delta f + \sum_i \sum_j \lambda_j \bar{g}_{ji} \delta v_i = 0$$

bzw. entsprechend

$$\sum_i (f_i + \sum_j \lambda_j \bar{g}_{ji}) \delta v_i = 0.$$

2.3 Prinzip der virtuellen „Verschiebungen" bei Existenz von Potentialen

Hat die konstitutive Gleichung die Form

III $$\sigma = \frac{d\Pi^{(i)}(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \tag{2.27}$$

so läßt sich (2.22) in folgende monogenetische Form transformieren:

$$\boxed{\Pi(u_1, \varepsilon) = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} = \text{stat.}} \tag{2.28}$$

mit den Nebenbedingungen II nach (2.19) oder II′ nach (2.21). Für die spezielle Relation (2.11) folgt das Gesamtpotential zu

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)}) = \frac{1}{2} \varepsilon^* E \varepsilon - \hat{q}_1^* u_1 \tag{2.29}$$

und es wird schließlich

$$\Pi(u_1, \varepsilon) = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} = \min \tag{2.30}$$

mit den Nebenbedingungen II oder II′, in der Elastizitätstheorie als Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials (Lagrange, Dirichlet, Green) bekannt.

Ebenso erhält man mit (2.27) aus (2.23)

$$\boxed{\begin{aligned} I_1(u_1, u_2, \varepsilon, q_2, \sigma) = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} - \sigma^*(\varepsilon - A_1^* u_1 - A_2^* u_2) - \\ - q_2^*(u_2 - \hat{u}_2) = \text{stat.} \end{aligned}} \tag{2.31}$$

ohne Nebenbedingungen. Hierbei ist I_1 das verallgemeinerte Gesamtpotential, das in der Elastizitätstheorie dem Funktional von Hu-Washizu entspricht [4], [12], [13].

Schließlich ergibt sich mit (2.27) aus (2.25) das Prinzip

$$\boxed{\begin{aligned} I_2(u_1, \varepsilon, q_1, q_2, x) = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} - x^* B\varepsilon - \\ - q_1^*(C_1\varepsilon - u_1) - q_2^*\,(C_2\varepsilon - \hat{u}_2) = \text{stat.} \end{aligned}} \tag{2.32}$$

ohne Nebenbedingungen.

2.4 Prinzip der virtuellen „Kräfte“ *

Verwendet man anstelle von σ und q in (2.4) die zugehörigen virtuellen Änderungen, die den Nebenbedingungen I (nach (2.18)) oder (gleichwertig) I′ (nach (2.20)) genügen müssen, so erhält man das Prinzip der virtuellen Kräfte

$$\boxed{\varepsilon^*\,\delta\sigma = u^*\,\delta q = \hat{u}_2^*\,\delta q_2} \tag{2.33}$$

Es ist eine Folge der Beziehung II (nach (2.19)) bzw. II′ (nach (2.21)) (I bzw. I′ wird ja vorausgesetzt!). Umgekehrt folgt aus ihm II bzw. II′, wie man durch Elimination von $\delta\sigma$ bzw. δq_2 in (2.33) zeigen kann, so daß es eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Relationen II bzw. II′ ist:

a) Elimination von $\delta\sigma$ mittels (2.20)

$$\delta\sigma = C_2^*\,\delta q_2 + B^*\,\delta x$$

führt zu dem in q_2 und x freien Problem

$$(\varepsilon^* C_2^* - \hat{u}_2^*)\,\delta q_2 + \varepsilon^* B^*\,\delta x = 0,$$

woraus

$$B\varepsilon = 0; \qquad C_2\varepsilon - \hat{u}_2 = 0,$$

also (2.21) folgt.

b) Elimination von δq_2 mittels (2.18) – nämlich $\delta q_2 = A_2\,\delta\sigma$ – liefert

$$(\varepsilon^* - \hat{u}_2^* A_2)\,\delta\sigma = 0 \qquad \text{mit der N. B. } A_1\,\delta\sigma = 0.$$

---

* Die Bezeichnung folgt der in der Elastostatik üblichen, ohne Rücksicht darauf, ob es sich bei σ und q um Kraftgrößen oder andere physikalische Größen handelt.

Das zugehörige freie Problem lautet mit dem Lagrange-Multiplikator λ

$$(\varepsilon^* - \hat{u}_2^* A_2 - \lambda^* A_1)\,\delta\sigma = 0.$$

Hieraus ergibt sich (2.19):

$$\varepsilon - A_1^* \lambda - A_2^* \hat{u}_2 = 0$$

(die Bedeutung von λ liegt auf der Hand: $\lambda = u_1$).

c) Eine in den Variablen σ, q_1, q_2, sowie λ_1, λ_2 und μ (Lagrange-Multiplikatoren) freie Variationsgleichung erhält man durch Berücksichtigung von (2.15) in (2.33):

$$\boxed{\begin{aligned}&\varepsilon^* \delta\sigma - \hat{u}_2^* \delta q_2 - \\ &\quad - \delta\{\lambda_1^*(A_1\sigma - q_1) + \lambda_2^*(A_2\sigma - q_2) + \mu^*(q_1 - \hat{q}_1)\} = 0.\end{aligned}} \tag{2.34}$$

Umformung liefert

$$\begin{aligned}&\delta\sigma^*(\varepsilon - A_1^*\lambda_1 - A_2^*\lambda_2) + \delta q_1^*(\lambda_1 - \mu) + \delta q_2^*(\lambda_2 - \hat{u}_2) - \\ &\quad - \delta\lambda_1^*(A_1\sigma - q_1) - \delta\lambda_2^*(A_2\sigma - q_2) - \delta\mu^*(q_1 - \hat{q}_1) = 0\end{aligned} \tag{2.35}$$

und damit

I $\qquad A_1\sigma - q_1 = 0; \qquad A_2\sigma - q_2 = 0; \qquad q_1 - \hat{q}_1 = 0$

II $\qquad \varepsilon - A_1^*\lambda_1 - A_2^*\lambda_2 = 0; \qquad \lambda_2 - \hat{u}_2 = 0;$
$\qquad \lambda_1 - \mu = 0.$

Folglich ist hier $\mu = \lambda_1$, während λ_1 mit u_1 und λ_2 mit u_2 identifiziert werden kann.

d) Auf ähnliche Weise bekommt man eine in den Variablen σ, q_1, q_2, x sowie λ und μ (Lagrange-Multiplikatoren) freie Variationsgleichung durch Hereinnahme von (2.20) in (2.33):

$$\boxed{\begin{aligned}&\varepsilon^* \delta\sigma - \hat{u}_2^* \delta q_2 - \\ &\quad - \delta\{\lambda^*(\sigma - C_1^* q_1 - C_2^* q_2 - B^* x) + \mu^*(q_1 - \hat{q}_1)\} = 0.\end{aligned}} \tag{2.36}$$

Ausführen der Variationen und Zusammenfassen liefert

$$\begin{aligned}&\delta\sigma^*(\varepsilon - \lambda) + \delta q_1^*(C_1\lambda - \mu) + \delta q_2^*(C_2\lambda - \hat{u}_2) + \delta x^* B\lambda \\ &\quad - \delta\lambda^*(\sigma - C_1^* q_1 - C_2^* q_2 - B^* x) - \delta\mu^*(q_1 - \hat{q}_1) = 0\end{aligned} \tag{2.37}$$

und damit

I′ $\sigma - C_1^* q_1 - C_2^* q_2 - B^* x = 0; \quad q_1 - \hat{q}_1 = 0;$

II′ $B\lambda = 0; \quad C_1\lambda - \mu = 0; \quad C_2\lambda - \hat{u}_2 = 0;$
$\lambda - \varepsilon = 0.$

Es folgt also $\lambda = \varepsilon$, während μ mit u_1 identifiziert werden kann.

2.5 Prinzip der virtuellen „Kräfte" bei Existenz von Komplementärpotentialen

Hat die konstitutive Gleichung die Form

III′ $$\varepsilon = \frac{d\tilde{\Pi}_{(\sigma)}}{d\sigma}, \tag{2.38}$$

so kann man (2.33) auf folgende monogenetische Form bringen:

$$\boxed{\tilde{\Pi}(q_2, \sigma) = \tilde{\Pi}^{(i)} + \tilde{\Pi}^{(a)} = \text{stat.}} \tag{2.39}$$

mit den Nebenbedingungen I nach (2.18) oder I′ nach (2.20).

Für die spezielle Relation (2.11) folgt das Gesamtkomplementärpotential zu

$$\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}^{(i)} + \tilde{\Pi}^{(a)} = \frac{1}{2}\,\sigma^* E^{-1}\sigma - \hat{u}_2^* q_2 \tag{2.40}$$

und es wird

$$\tilde{\Pi}(q_2, \sigma) = \min \tag{2.41}$$

mit den Nebenbedingungen I oder I′, was in der Elastizitätstheorie als Prinzip vom Minimum des Gesamtkomplementärpotentials (Menabrea-Castigliano) bekannt ist.

Ähnlich folgt aus (2.34) mit (2.38)

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{I}_1(u_1, u_2, q_2, \sigma) = &- \tilde{\Pi}^{(i)} - \tilde{\Pi}^{(a)} + u_1^*(A_1\sigma - \hat{q}_1) + \\ &+ u_2^*(A_2\sigma - q_2) = \text{stat.}\end{aligned}} \tag{2.42}$$

ohne Nebenbedingungen und aus (2.36) mit (2.38)

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{I}_2(u_1, \varepsilon, q_1, q_2, \sigma, x) = &- \tilde{\Pi}^{(i)} - \tilde{\Pi}^{(a)} + \\ &+ \varepsilon^*(\sigma - C_1^* q_1 - C_2^* q_2 - B^* x) + u_1^*(q_1 - \hat{q}_1) = \text{stat.}\end{aligned}} \tag{2.43}$$

ohne Nebenbedingungen. Das verallgemeinerte Komplementärpotential — $\bar{I}_1$ entspricht in der Elastizitätstheorie dem Funktional von Hu [12].

2.6 Transformationen

Mit (2.27) und (2.38) folgt

$$\delta(\Pi^{(i)} + \tilde{\Pi}^{(i)}) = \delta\varepsilon^* \frac{d\Pi^{(i)}}{d\varepsilon} + \delta\sigma^* \frac{d\tilde{\Pi}^{(i)}}{d\sigma} = \delta\varepsilon^*\sigma + \delta\sigma^*\varepsilon = \delta(\sigma^*\varepsilon),$$

und damit – bis auf eine unwesentliche Konstante –

$$\Pi^{(i)}(\varepsilon) + \tilde{\Pi}^{(i)}(\sigma) = \sigma^*\varepsilon. \tag{2.44}$$

Ferner gilt

$$\Pi^{(a)}(u_1) + \tilde{\Pi}^{(a)}(q_2) = -u_1^* \hat{q}_1 - \hat{u}_2^* q_2. \tag{2.45}$$

(2.27), (2.38) und (2.44) drücken die Transformation von Legendre [11] [14] aus, die das Umsteigen von der Variablen ε auf die Variable σ bewerkstelligt.

Mit (2.44) geht (2.31) über in

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{I}_1(u_1, u_2, q_2, \sigma) &= -\tilde{\Pi}^{(i)} + \Pi^{(a)} + \\ &+ \sigma^*(A_1^* u_1 + A_2^* u_2) - q^*(u_2 - \hat{u}_2) = \text{stat.} \end{aligned}} \tag{2.46}$$

ohne Nebenbedingungen. Die Funktion $\bar{I}_1$ entspricht in der Elastizitätstheorie dem Funktional von Hellinger-Reißner-Veubeke [4], [15], [16], [17].

Macht man weiterhin von (2.45) Gebrauch, so erhält man – wie ein Verleich mit (2.42) zeigt – $\tilde{I}_1$, womit der Zusammenhang

$$I_1 = \bar{I}_1 = \tilde{I}_1 \tag{2.47}$$

nachgewiesen ist.

Analog ergibt sich aus (2.43) mit (2.44)

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{I}_2(u_1, \varepsilon, q_1, q_2, x) &= \Pi^{(i)} - \tilde{\Pi}^{(a)} - \varepsilon^*(C_1^* q_1 + C_2^* q_2 + B^* x) + \\ &+ u_1^*(q_1 - \hat{q}_1) = \text{stat.} \end{aligned}} \tag{2.48}$$

Zieht man außerdem (2.45) heran, so folgt hieraus (2.32):

$$\tilde{I}_2 = \bar{I}_2 = I_2. \tag{2.49}$$

Übrigens läßt sich auch die Transformation von Friedrichs bestätigen: Diese führt bekanntlich [14] ein Minimumproblem mit Nebenbedingungen (N. B.) in ein Maximumproblem mit neuen Nebenbedingungen, welche die natürlichen Bedingungen des ursprünglichen Minimumproblems sind, über. Es gilt nämlich für den Fall des linearen Gesetzes (2.11) die Komplementärdarstellung:

Π = min mit N. B. II ist äquivalent I_1 = min mit N. B. II
und liefert I,

$\tilde{\Pi}$ = min mit N. B. I ist äquivalent $\tilde{I}_1$ = max mit N. B. I
und liefert II
und dual hierzu

Π = min mit N. B. II′ ist äquivalent I_2 = min mit N. B. II′
und liefert I′,

$\tilde{\Pi}$ = min mit N. B. I′ ist äquivalent $\tilde{I}_2$ = max mit N. B. I′
und liefert II′.

3. Kontinuierliche Probleme

3.1 Ausgangsgleichungen

Zunächst sollen einige, im folgenden benötigte Begriffe aus der linearen Funktionalanalysis zusammengestellt werden [9], [18], [19], [20]. Der Satz der Ableitungssymbole in einem linearen Differentialgleichungssystem wird als formaler Differentialoperator A bzw. B bezeichnet; er erzeugt aus einem Tensor σ einen neuen Tensor q von i. a. anderer Stufe:

$$q = A\sigma.$$

Unter dem Skalarprodukt zweier Elemente u und q (bzw. ε und σ) des aus allen Tensoren der Stufe α (bzw. der Stufe β) gebildeten reellen Hilbertraumes H_α (bzw. H_β) versteht man das über den (räumlichen, zeitlichen) Bereich V erstreckte Integral

$$(u, q)_\alpha = \int_V u q \, dV \qquad u, q \in H_\alpha$$

bzw.

$$(\varepsilon, \sigma)_\beta = \int_V \varepsilon \sigma \, dV \qquad \varepsilon, \sigma \in H_\beta$$

Die formal Adjungierte A^* des formalen Differentialoperators A, der linear sein soll, ist definiert durch die Beziehung

$$(A\sigma, u)_\alpha = (A^* u, \sigma)_\beta + R.\ T. \begin{cases} u \in D_{A^*} \subset H_\alpha \\ \sigma \in D_A \subset H_\beta \end{cases} \tag{3.0}$$

(R. T. = durch partielle Integration anfallende Randterme; D_A bzw. D_{A^*} Definitionsbereiche der Operatoren A bzw. A^*). Wenn $A = A^*$, dann heißt A formal symmetrisch.

Ein physikalischer Sachverhalt werde durch die beiden Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung (Tonti [20])

$$\begin{array}{lll} \text{I} & A\sigma = q & \text{(Grundsystem)} \qquad (3.1) \\ \text{II} & A^* u = \varepsilon & \text{(adjungiertes System)} \qquad (3.2) \end{array}$$

sowie durch die eindeutigen Relationen (konstitutive Gleichungen)

$$\left.\begin{array}{llll} \text{III} & \sigma = \sigma(\varepsilon) & \text{und} & q = q(u) \\ \text{bzw.} & & & \\ \text{III}' & \varepsilon = \varepsilon(\sigma) & \text{und} & u = u(q) \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

beschrieben. Dazu kommen Randbedingungen bezüglich u auf dem Teilrand F_u und bezüglich σ auf dem Teilrand $F_s = F - F_u$. Dann folgt aus (3.0) mit (3.1) und (3.2)

$$\boxed{(\sigma, \varepsilon)_\beta = (q, u)_\alpha - R.T.}. \tag{3.4}$$

Diese skalare Beziehung bringt in der Elastostatik (nach Präzisierung der Randterme) mit u bzw. q als Vektor der Verschiebungen bzw. Volumskräfte und ε bzw. σ als Verzerrungs- bzw. Spannungstensor den Arbeitssatz zum Ausdruck; dort beinhaltet (3.1) die „Statik" (Gleichgewichtsbedingungen) und (3.2) die „Geometrie" (Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen). Mit dem Hookeschen Gesetz $\sigma = E\varepsilon$ ergibt sich wegen der Symmetrie von

$E\ \sigma^{(1)}\varepsilon^{(2)} = \sigma^{(2)}\varepsilon^{(1)}$ und damit – nach Präzisierung der Randterme

$$\int_V q^{(1)} u^{(2)}\, dV + \int_F s^{(1)} u^{(2)}\, dF = \int_V q^{(2)} u^{(1)}\, dV + \int_F s^{(2)} u^{(1)}\, dF \tag{3.5}$$

mit s als auf die Flächeneinheit bezogenem Randkraftvektor (Der obere Index 1 bzw. 2 soll andeuten, daß die betreffenden Größen der Relation (3.1) bzw. (3.2) genügen.) Dies ist der Betti-Maxwellsche Reziprozitätssatz.

Die Stufe der Tensoren ε und σ sei höher als jene der Tensoren u und q. Dann ist das System (3.1) unterbestimmt und das System (3.2) überbestimmt. Das allgemeine Integral von (3.1) lautet mit der tensoriellen Lösungsfunktion ψ und dem partikulären Integral $\bar{\sigma} = C^* q$, falls q unabhängig von u ist,

$$\text{I}' \qquad \boxed{\sigma = [C^* B^*] \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix}} \tag{3.6}$$

worin B^* bzw. C^* die Adjungierte des formalen Operators B bzw. C gemäß

$$(B\varepsilon, \psi)_\beta = (B^*\psi, \varepsilon)_\beta + R.\ T.$$
$$(C\varepsilon, q)_\alpha = (C^* q, \varepsilon)_\beta + R.\ T.$$

bezeichnet. Einsetzen in (3.1) liefert

$$A B^* \psi = 0,\ A C^* q = q,$$

während man aus (3.4) notwendig

$$\text{II}' \qquad \boxed{\begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} \varepsilon = \begin{bmatrix} u \\ O \end{bmatrix}} \tag{3.7}$$

folgert. Der zweite Teil von (3.7) beinhaltet die differentiellen Kompatibilitätsbedingungen des überstimmten Systems (3.2). Bei einem mehrfach zusammenhängenden Bereich – darauf soll hier nicht weiter eingegangen werden – fallen außerdem integrale Kompatibilitätsbedingungen an [21].

Verwendet man in (3.3) das lineare Gesetz

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{3.8}$$

mit E als positiv definitem symmetrischen Tensor gerader Stufe, so gelangt man durch Eliminationsprozesse zu folgenden Methoden: Auf (3.1), (3.2) und (3.8) beruhen

a) die „u-Methode"

$$A E A^* u = q \quad \text{mit} \quad A E A^* = S = S^*, \tag{3.9}$$

b) die „u-σ-Methode" (kanonische Gleichungen)

$$\begin{bmatrix} E^{-1} & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Auf (3.6), (3.7) und (3.8) beruhen

c) die „ψ-Methode"

$$B E^{-1} B^* = -B E^{-1} C^* q \text{ mit } B E^{-1} B^* = K = K^*, \tag{3.11}$$

d) die „ψ-ε-Methode"

$$\begin{bmatrix} E & B^* \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ -\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^* q \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

In der Elastizitätstheorie beinhaltet (3.9) die Cauchy-Navierschen und (3.10) die Beltrami-Michellschen Differentialgleichungen; ferner bedeutet dort u den Verschiebungsvektor und ψ den Spannungsfunktionstensor von Beltrami.

Die in (3.0) bzw. (3.4) auftretenden Randterme sind vom formalen Differentialoperator A abhängig. Es ist daher günstig, das weitere an einem konkreten Beispiel vorzuführen, wobei man zweckmäßig neben der symbolischen Schreibweise die Indexschreibweise für die kartesischen Tensoren verwendet. Die Koordinaten werden mit x_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet; ∂_i ist das Symbol für die partielle Ableitung $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und n_i repräsentiert die nach außen zeigende Randnormale. e_{ijk} ist der e-Tensor, dessen Komponenten für eine gerade Permutation von 1, 2, 3 gleich 1, für eine ungerade gleich —1 und sonst gleich 0 sind. Ferner gelte die Summationskonvention.

Wir betrachten folgende Differentialgleichung:

I $$A \sigma = q \text{ oder } A_i \sigma_i = q \text{ mit } A_i = -\partial_i. \tag{3.13}$$

Dafür gilt (jeweils Eindeutigkeit, Integrierbarkeit und Stetigkeit einschließlich der ersten Ableitungen vorausgesetzt)

$$\begin{aligned}(A\sigma, u)_o &= \int_V u A_i \sigma_i \, dV = \int_V \sigma_i A_i^* u \, dV - \int_F u \sigma_i n_i \, dF \\ &= (A^* u, \sigma)_1 - \int_F u \sigma_i n_i \, dF \quad \text{mit} \quad A_i^* = \partial_i.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Mit A^* bilden wir

II $$A^* u = \varepsilon \quad \text{oder} \quad A_i^* u = \varepsilon_i. \tag{3.15}$$

Die differentiellen Kompatibilitätsbedingungen von (3.15) lauten, wie man leicht bestätigt

II′ $$B\varepsilon = 0 \quad \text{oder} \quad B_{ij}\varepsilon_j = 0 \quad \text{mit} \quad B_{ij} = e_{ijk}\, \partial_k. \tag{3.16}$$

Weiter gilt nun

$$\begin{aligned}(B\varepsilon, \psi)_1 &= \int_V \psi_i \; B_{ij}\varepsilon_j \, dV = \int_V \varepsilon_i B_{ij}^* \psi_j \, dV + \int_F e_{ijk} \psi_i \varepsilon_j n_k \, dF \\ &= (B^* \psi, \varepsilon)_1 + \int_F e_{ijk} \psi_i \varepsilon_j n_k \; dF \quad \text{mit} \quad B_{ij}^* = B_{ij}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Gemäß (3.6) erhält man sodann mit $\bar{\sigma} = C^* q$

I′ $$\sigma = \bar{\sigma} + B^* \psi \quad \text{oder} \quad \sigma_i = \bar{\sigma}_i + B_{ij}\psi_j. \tag{3.18}$$

Mit der speziellen konstitutiven Beziehung (3.8)

III $$\sigma = E\varepsilon \quad \text{oder} \quad \sigma_i = E_{ij}\varepsilon_j \quad \text{mit} \quad E_{ij} = E_{ji} \tag{3.19}$$

lautet (3.9)

$$-\partial_i (E_{ij} \partial_j) u = q. \tag{3.20}$$

Dies ist für $E_{ij} = \delta_{ij} c = \text{const}$ mit δ_{ij} als Kronecker-Symbol die Poissonsche Diffgl.

Der „Arbeitssatz" (3.4) nimmt nun folgende Gestalt an

$$\boxed{\int_V \sigma_i \varepsilon_i \, dV = \int_V q u \, dV + \int_F u \sigma_i n_i \, dF} \tag{3.21}$$

Wie man unschwer erkennt, handelt es sich physikalisch z. B. um das Wärmeleitproblem oder um die Sickerströmung. Bei letzterer bedeutet u den Druck, q die Quellenergiebigkeit, ε_i den

Druckgradienten, σ_i den Geschwindigkeitsvektor, während die konstitutive Beziehung (3.19) das Darcysche Gesetz für Anisotropie ausdrückt.

Im Blick auf die Anwendung der Methode der finiten Elemente zerlegen wir den Bereich V in mehrere Einzelbereiche $V^{(k)}$ (Elemente) mit den erwähnten Voraussetzungen für die jeweiligen Funktionen. Neben den Randbedingungen (R.B.) am Außenrand $F = F_u + F_s$ kommen auch die Übergangsbedingungen (Ü.B.) an den Innenrändern D in Betracht. Es gilt für die (nach der gedanklichen Trennung der Einzelbereiche) jeweils aus den Einzelbereichen zeigenden Flächennormalen

$$n_i^+ + n_i^- = 0 \tag{3.22}$$

wobei sich die Zeichen + und — auf die beiden Schnittufer eines Innenrandes beziehen. Schließlich ist die Einführung der Symbolik

$$[a] = \frac{1}{2}(a^+ + a^-); \; \langle a \rangle = a^+ - a^- \tag{3.23}$$

für die algebraische Mittelgröße bzw. Sprunggröße einer Funktion zweckmäßig. Damit ergibt sich

$$a^+ b^+ - a^- b^- = [a]\langle b \rangle + \langle a \rangle [b]. \tag{3.24}$$

Falls Unstetigkeiten an den Innenrändern vorgeschrieben sind, bestehen dort die Übergangsbedingungen

$$u^+ - u^- = \langle \hat{u} \rangle; \; \sigma_i^+ n_i^+ + \sigma_i^- n_i^- = (\sigma_i^+ - \sigma_i^-) n_i^+ = \langle \hat{s} \rangle. \tag{3.25}$$

Die vollständige Beschreibung des Problems ist dann durch die folgenden Beziehungen gegeben

$$\text{I} \quad -\partial_i \sigma_i = q \text{ in } V^{(k)}; \; \sigma_i n_i = \hat{s} \text{ auf } F_s; \; \langle \sigma_i \rangle n_i^+ = \langle \hat{s} \rangle \text{ auf } D \tag{3.26}$$

$$\text{II} \quad \partial_i u = \varepsilon_i \text{ in } V^{(k)}; \qquad u = \hat{u} \text{ auf } F_u; \quad \langle u \rangle = \langle \hat{u} \rangle \text{ auf } D \tag{3.27}$$

oder alternativ

$$\text{I}' \quad \sigma_i = \bar{\sigma}_i + e_{ijk} \partial_k \psi_j \quad \text{in} \quad V^{(k)} \text{ plus R. B. und Ü. B.} \tag{3.28}$$

$$\text{II}' \quad e_{ijk} \partial_k \varepsilon_j = 0 \quad \text{in} \quad V^{(k)} \text{ plus R. B. und Ü. B.} \tag{3.29}$$

wozu die konstitutiven Gleichungen (3.3) treten. Bei der hier vorgenommenen Bereichseinteilung ist im „Arbeitssatz" (3.21) das Flächenintegral nicht nur über den Außenrand, sondern auch über die Innenränder zu erstrecken, die jeweils zweimal durchlaufen werden (positives und negatives Schnittufer):

$$\boxed{\begin{aligned}\sum \int_{V^{(k)}} \sigma_i \varepsilon_i \, dV = \sum \int_{V^{(k)}} q u \, dV + \int_{F_u} \hat{u} \sigma_i n_i \, dF + \int_{F_s} \hat{s} u \, dF + \\ + \int_D ([\sigma_i] \langle \hat{u} \rangle n_i^+ + [u] \langle \hat{s} \rangle) \, dF\end{aligned}} \tag{3.30}$$

Das Summenzeichen deutet an, daß die über alle Einzelbereiche erstreckten Integrale zu summieren sind. Das Integral über D in (3.30) ist nur einfach zu nehmen.

3.2 Prinzip der virtuellen „Verschiebungen"

Das Prinzip der virtuellen „Verschiebungen" ergibt sich unmittelbar aus (3.30) nach Ersatz von u und ε_i durch die entsprechenden virtuellen Größen, wobei gefordert wird, daß diese die Nebenbedingungen II (nach (3.27)) oder II′ (nach (3.29)) erfüllen. Es ist eine Folge von I (nach (3.26)) bzw. I′ (nach (3.28)) und damit eine notwendige Bedingung für das Bestehen von I bzw. I′. Da umgekehrt aus ihm diese Beziehungen folgen, ist es auch eine hinreichende Bedingung hierfür. Es lautet:

$$\boxed{\sum \int_{V^{(k)}} \sigma_i \delta \varepsilon_i \, dV = \sum \int_{V^{(k)}} q \, \delta u \, dV + \int_{F_s} \hat{s} \, \delta u \, dF + \int_D \langle \hat{s} \rangle \delta [u] \, dF} \tag{3.31}$$

mit den Nebenbedingungen II oder II′.

Wir besprechen zwei Methoden:

a) Eliminationsmethode: Mit $\delta \varepsilon_i = \partial_i \delta u = \delta \partial_i u$ und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes folgt das in u freie Problem (vgl. (3.14)).

$$\begin{aligned}\sum \int_{V^{(k)}} (\partial_i \sigma_i + q) \, \delta u \, dV - \int_{F_s} (\sigma_i n_i - \hat{s}) \, \delta u \, dF - \\ - \int_D (\langle \sigma_i \rangle n_i^+ - \langle \hat{s} \rangle) \delta [u] \, dF = 0\end{aligned}$$

und hieraus wegen der Willkürlichkeit der Variationen direkt I in (3.26).

b) Multiplikatorenmethode:*

Hier werden die N. B. II mit den Lagrangeschen Multiplikatoren berücksichtigt [14], [8]. Man erhält eine in den Variablen ε_i, u sowie λ_i, μ und ν (Multiplikatoren) freie Variationsgleichung

$$\boxed{\begin{aligned}\sum \int_{V^{(k)}} \sigma_i \delta\varepsilon_i dV - \sum \int_{V^{(k)}} q \delta u dV - \int_{F_s} \hat{s} \delta u dF - \int_D \langle \hat{s} \rangle \delta[u] dF - \\ - \delta \Big\{ \sum \int_{V^{(k)}} \lambda_i (\varepsilon_i - \partial_i u) dV + \int_{F_u} \mu (u - \hat{u}) dF + \\ + \int_D \nu (\langle u \rangle - \langle \hat{u} \rangle) \, dF \Big\} = 0\end{aligned}} \tag{3.32}$$

Ausführen der Variationen und Zusammenfassen liefert:

$$\begin{aligned}&\sum \int_{V^{(k)}} (\sigma_i - \lambda_i) \delta\varepsilon_i dV - \sum \int_{V^{(k)}} (\partial_i \lambda_i + q) \delta u dV - \sum \int_{V^{(k)}} (\varepsilon_i - \partial_i u) \delta\lambda_i dV \\ &+ \int_{F_s} (\lambda_i n_i - \hat{s}) \delta u dF - \int_{F_u} (u - \hat{u}) \delta\mu dF + \int_{F_u} (\lambda_i n_i - \mu) \delta u dF \\ &+ \int_D \{[\lambda_i] n_i^+ - \nu\} \delta\langle u \rangle dF + \int_D (\langle \lambda_i \rangle n_i^+ - \langle \hat{s} \rangle) \delta[u] dF - \\ &\qquad - \int_D (\langle u \rangle - \langle \hat{u} \rangle) \delta\nu dF\end{aligned} \tag{3.33}$$

und damit

$$\text{I} \quad \begin{aligned} \partial_i \lambda_i + q = 0 \text{ in } V^{(k)};\ \lambda_i n_i - \hat{s} = 0 \text{ auf } F_s; \\ \langle \lambda_i \rangle n_i^+ - \langle \hat{s} \rangle = 0 \text{ auf } D \end{aligned}$$

$$\text{II} \quad \begin{aligned} \varepsilon_i - \partial_i u = 0 \text{ in } V^{(k)};\ u - \hat{u} = 0 \text{ auf } F_u; \\ \langle u \rangle - \langle \hat{u} \rangle = 0 \text{ auf } D \end{aligned}$$

sowie $\lambda_i - \sigma_i = 0$ in $V^{(k)}$; $\mu - \lambda_i n_i = 0$ auf F_u;
$[\lambda_i] n_i^+ - \nu = 0$ auf D,

woraus die Bedeutung der Multiplikatoren ersichtlich ist. Die in Ziff. 2.2 erörterten Varianten b) und d) sind hier prinzipiell auch möglich, sollen aber wegen ihrer Schwerfälligkeit nicht weiter verfolgt werden.

---

* Die in Ziff. 2.2 über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode gemachte Bemerkung gelte hier analog. Allerdings ist sie im Falle von partiellen Diffgl. als Nebenbedingungen nicht bewiesen [14].

3.3 Prinzip der virtuellen „Verschiebungen" bei Existenz von Potentialen

Lauten die konstitutiven Gleichungen (bei Zulassung von Nichtlinearitäten)

$$\text{III} \qquad \sigma_i = \frac{\partial \pi^{(i)}(x_j, \varepsilon_j)}{\partial \varepsilon_i}; \quad q = -\frac{\partial \pi^{(a)}(x_j, u)}{\partial u} \text{ in } V^{(k)}; \tag{3.34}$$

so läßt sich (3.31) in folgende monogenetische Form transformieren:

$$\boxed{\Pi(u, \varepsilon_i) = \Pi^{(i)}(\varepsilon_i) + \Pi^{(a)}(u) = \text{stat.}} \tag{3.35}$$

mit den Nebenbedingungen II nach (3.27) oder II′ nach (3.29) sowie

$$\Pi^{(i)} = \sum \int_{V^{(k)}} \pi^{(i)} dV; \; \Pi^{(a)} = \sum \int_{V^{(k)}} \pi^{(a)} dV - \int_{F_s} \hat{s} u dF - \int_D \langle \hat{s} \rangle [u] dF. \tag{3.36}$$

Für die spezielle Relation (3.19) sowie für $q = \hat{q}$ (unabhängig von u) wird

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum \int_{V^{(k)}} E_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j dV - \sum \int_{V^{(k)}} \hat{q} u dV - \int_{F_s} \hat{s} u dF - \int_D \langle \hat{s} \rangle [u] dF \tag{3.37}$$

(E_{ij} positiv definit) und daher, wie man leicht zeigt

$$\Pi(u, \varepsilon_i) = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} = \min \tag{3.38}$$

mit den Nebenbedingungen II in (3.27) (Dirichletsches Prinzip in der Elektrostatik entsprechend dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials in der Elastizitätstheorie). Als Eulergleichungen und natürliche Bedingungen ergeben sich die Relationen I in (3.26).

Ebenso erhält man mit (3.34) aus (3.32) nach Einsetzen der Multiplikatoren λ_i, μ, ν:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1(u, \varepsilon_i, \sigma_i) &= \Pi^{(i)}(\varepsilon_i) + \Pi^{(a)}(u) - \sum \int_{V^{(k)}} \sigma_i (\varepsilon_i - \partial_i u) dV \\ &- \int_{F_u} \sigma_i n_i (u - \hat{u}) dF - \int_D [\sigma_i] (\langle u \rangle - \langle \hat{u} \rangle) n_i^+ dF = \text{stat.} \end{aligned}} \tag{3.39}$$

ohne Nebenbedingungen. Dieses verallgemeinerte Gesamtpotential entspricht in der Elastizitätstheorie dem Funktional von

Hu-Washizu [4], [12], [13] bzw. bei Berücksichtigung der Diskontinuitätsterme dem Funktional von Prager und Bufler [5], [6], [7], [8]; bei Prager steht $\sigma_i n_i^+$ anstelle von $[\sigma_i] n_i^+$, d. h. $\sigma_i n_i^+$ wird dort über D als stetig vorausgesetzt. Die Euler-Gleichungen und natürlichen Bedingungen sind die Relationen I in (3.26), II in (3.27) sowie III in (3.34) (erste Gleichung).

3.4 Prinzip der virtuellen „Kräfte"

Verwendet man in (3.30) anstelle von σ_i und q_i die virtuellen Änderungen und verlangt von diesen, daß sie den Nebenbedingungen I (nach (3.26)) oder I′ (nach (3.28)) genügen, so gelangt man zum Prinzip der virtuellen „Kräfte":

$$\boxed{\sum \int_{V^{(k)}} \varepsilon_i \delta \sigma_i \, dV = \sum \int_{V^{(k)}} u \, \delta q \, dV + \int_{F_u} \hat{u} n_i \delta \sigma_i \, dF + \int_D \langle \hat{u} \rangle \delta [\sigma_i] n_i^+ \, dF} \tag{3.40}$$

Es ist eine Folge von II (nach (3.27)) bzw. II′ (nach (3.29)) und damit eine notwendige Bedingung für das Bestehen von II bzw. II′. Da umgekehrt aus ihm diese Beziehungen folgen, ist es auch eine hinreichende Bedingung hierfür.

Wir unterscheiden folgende Methoden:

a) Eliminationsmethode: Mit $\delta q = -\delta \partial_i \sigma_i = -\partial_i \delta \sigma_i$ und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes folgt das in σ_i freie Problem

$$\sum \int_{V^{(k)}} (\varepsilon_i - \partial_i u) \delta \sigma_i \, dV + \int_{F_u} (u - \hat{u}) \delta \sigma_i n_i \, dF + \\ + \int_D (\langle u \rangle - \langle \hat{u} \rangle) \delta [\sigma_i] n_i^+ \, dF = 0$$

und hieraus wegen der Willkürlichkeit der Variationen direkt II in (3.27).

b) Multiplikatorenmethode: Durch Berücksichtigung der N. B. I mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren ergibt sich eine in den Variablen σ_i, q sowie λ, μ und ν (Multiplikatoren) freie Variationsgleichung:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum \int_{V^{(k)}} \varepsilon_i \delta\sigma_i dV - \sum \int_{V^{(k)}} u \delta q dV - \int_{F_u} \hat{u} n_i \delta\sigma_i dF - \int_D \langle \hat{u} \rangle \delta[\sigma_i] n_i^+ dF \\ &- \delta\Big\{ - \sum \int_{V^{(k)}} \lambda(\partial_i \sigma_i + q) dV + \int_{F_s} \mu(\sigma_i n_i - \hat{s}) dF + \\ &\qquad + \int_D \nu(\langle \sigma_i \rangle n_i^+ - \langle \hat{s} \rangle) dF \Big\} = 0\end{aligned}} \tag{3.41}$$

Nach dem Umformen folgt

$$\begin{aligned}&- \sum \int_{V^{(k)}} (u - \lambda) \delta q dV + \sum \int_{V^{(k)}} (\varepsilon_i - \partial_i \lambda) \delta\sigma_i dV + \\ &\qquad + \sum \int_{V^{(k)}} (\partial_i \sigma_i + q) \delta\lambda dV \\ &+ \int_{F_u} (\lambda - \hat{u}) n_i \delta\sigma_i dF - \int_{F_s} (\sigma_i n_i - \hat{s}) \delta\mu dF + \\ &\qquad + \int_{F_s} (\lambda - \mu) n_i \delta\sigma_i dF \\ &+ \int_D ([\lambda] - \nu) n_i^+ \langle \sigma_i \rangle dF - \int_D (\langle \sigma_i \rangle n_i^+ - \langle \hat{s} \rangle) \delta\nu + \\ &\qquad + \int_D (\langle \lambda \rangle - \langle \hat{u} \rangle) n_i^+ \delta[\sigma_i] dF = 0\end{aligned} \tag{3.42}$$

und damit gemäß der bekannten Schlußweise

$$\begin{aligned}&\text{I} \qquad \partial_i \sigma_i + q = 0 \text{ in } V^{(k)}; \quad \sigma_i n_i - \hat{s} = 0 \text{ auf } F_s; \\ &\qquad\qquad \langle \sigma_i \rangle n_i^+ - \langle \hat{s} \rangle = 0 \text{ auf } D \\ &\text{II} \qquad \varepsilon_i - \partial_i \lambda = 0 \text{ in } V^{(k)}; \quad \lambda - \hat{u} = 0 \text{ auf } F_u; \\ &\qquad\qquad \langle \lambda \rangle - \langle \hat{u} \rangle = 0 \text{ auf } D\end{aligned} \tag{3.43}$$

sowie $\lambda - u = 0$ in $V^{(k)}$, $\mu - \lambda = 0$ auf F_s, $\nu - [\lambda] = 0$ auf D.

Die Bedeutung der Multiplikatoren ist offensichtlich.

Auch die beiden weiteren, den Varianten a) und d) von Ziff. 2.4 entsprechenden Vorgehensweisen sind hier möglich. So erhält man z. B. durch Elimination von $\delta\sigma_i = e_{ijk} \partial_k \delta\psi_j$

für den Spezialfall $F_u = 0$ und $q = \hat{q}$ (unabhängig von u)

$$\sum \int_{V^{(k)}} e_{ijk} \partial_k \varepsilon_j \delta\psi_i \, dV + R. \, T. = 0$$

und hieraus sofort wegen der Willkürlichkeit von $\delta\psi_j$ die differentiellen Kompatibilitätsbedingungen II′ in (3.29). Der Rand-

term liefert übrigens bei mehrfachem Bereichszusammenhang die integralen Kompatibilitätsbedingungen (vergl. hierzu [21]).

3.5 Prinzip der virtuellen „Kräfte" bei Existenz von Komplementärpotentialen

Die (nicht notwendig linearen) konstitutiven Beziehungen

$$\text{III} \qquad \varepsilon_i = \frac{\partial \tilde{\pi}^{(i)}(x_j, \sigma_j)}{\partial \sigma_i}; \quad u = -\frac{\partial \tilde{\pi}^{(a)}(x_j, q)}{\partial q} \text{ in } V^{(k)} \tag{3.44}$$

erlauben es, (3.40) in die monogenetische Form

$$\boxed{\tilde{\Pi}(\sigma_i, q) = \tilde{\Pi}^{(i)}(\sigma_i) + \tilde{\Pi}^{(a)}(\sigma_i, q) = \text{stat}} \tag{3.45}$$

mit den Nebenbedingungen I nach (3.26) oder I′ nach (3.28) sowie

$$\tilde{\Pi}^{(i)} = \sum \int_{V^{(k)}} \tilde{\pi}^{(i)} \, dV; \tag{3.46}$$

$$\tilde{\Pi}^{(a)} = \sum \int_{V^{(k)}} \tilde{\pi}^{(a)} \, dV - \int_{F_u} \hat{u} \sigma_i n_i \, dF - \int_D \langle \hat{u} \rangle [\sigma_i] n_i^+ \, dF$$

zu transformieren. Im einzelnen ergibt sich für das lineare Gesetz (3.19) sowie für $q = \hat{q}$ (unabhängig von u)

$$\tilde{\Pi} = \frac{1}{2} \sum \int_{V^{(k)}} E_{ij}^{-1} \sigma_i \sigma_j \, dV - \int_{F_u} \hat{u} \sigma_i n_i \, dF - \int_D \langle \hat{u} \rangle [\sigma_i] n_i^+ \, dF \tag{3.47}$$

(E_{ij}^{-1} positiv definit) und folglich, wie leicht zu zeigen ist

$$\tilde{\Pi}(\sigma_i) = \tilde{\Pi}^{(i)} + \tilde{\Pi}^{(a)} = \min \tag{3.48}$$

mit den N. B. I nach (3.26) (Thomsonsches Prinzip in der Elektrostatik analog dem Prinzip vom Minimum des Gesamtkomplementärpotentials bzw. für $F_u = 0$ dem Prinzip von Menabrea-Castigliano in der Elastostatik). Als Euler-Gleichungen und natürliche Bedingungen erhält man die Beziehungen II nach (3.27).

Verwendet man andererseits (3.44) in (3.41) und setzt die Multiplikatoren ein, so folgt bis auf das Vorzeichen das verallgemeinerte Gesamtkomplementärpotential, das in der Elastizitäts-

theorie für kontinuierliche Felder dem Funktional von Hu [12] entspricht:

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{I}_1(u,\sigma_i) = &-\tilde{\Pi}^{(i)}(\sigma_i) - \tilde{\Pi}^{(a)}(\sigma_i, q) - \sum_{V^{(k)}} \int (\partial_i \sigma_i + \hat{q}) u \, dV \\ &+ \int_{F_s} (\sigma_i n_i - \hat{s}) u \, dF + \int_D [u](\langle \sigma_i \rangle n_i^+ - \langle \hat{s} \rangle) \, dF = \text{stat}\end{aligned}} \tag{3.49}$$

ohne Nebenbedingungen. Die Berücksichtigung der Diskontinuitätsterme geht auf Prager [5], [6] und Bufler [7], [8] zurück; bei Prager steht u anstelle von $[u]$, d. h. u wird dort als stetig über D vorausgesetzt. Die Euler-Gleichungen und natürlichen Bedingungen sind die Relationen I in (3.26) und II in (3.27), mit ε_i nach III′ in (3.44).

3.6 Transformationen

Mit (3.34) und (3.44) erhält man

$$\delta(\pi^{(i)} + \tilde{\pi}^{(i)}) = \sigma_i \delta \varepsilon_i + \varepsilon_i \delta \sigma_i = \delta(\sigma_i \varepsilon_i) \tag{3.50}$$

$$\delta(\pi^{(a)} + \tilde{\pi}^{(a)}) = -q \delta u - u \delta q = -\delta(qu) \tag{3.51}$$

und damit – bis auf eine unwesentliche Konstante –

$$\pi^{(i)} + \tilde{\pi}^{(i)} = \sigma_i \varepsilon_i; \; \pi^{(a)} + \tilde{\pi}^{(a)} = -qu. \tag{3.52}$$

Ferner gilt nach (3.36), (3.46) und (3.51)

$$\begin{aligned}\Pi^{(a)} + \tilde{\Pi}^{(a)} = &-\sum \int_{V^{(k)}} q u \, dV - \int_{F_s} \hat{s} u \, dF - \int_{F_u} \hat{u} \sigma_i n_i \, dF - \\ &- \int_D (\langle \hat{s} \rangle [u] + \langle \hat{u} \rangle [\sigma_i] n_i^+) \, dF.\end{aligned} \tag{3.53}$$

Durch (3.34) und (3.44) sowie durch (3.52) kommt die Legendresche Transformation [14] bezüglich σ_i und ε_i sowie q und u zum Ausdruck.

Mit den je ersten Gleichungen in (3.52), (3.36) und (3.46) geht (3.39) über in

$$\boxed{\begin{aligned}\check{I}_1(u,\sigma_i) = &-\tilde{\Pi}^{(i)}(\sigma_i) + \Pi^{(a)}(u) + \sum \int_{V^{(k)}} \sigma_i \partial_i u \, dV \\ &- \int_{F_u} \sigma_i n_i (u - \hat{u}) \, dF - \int_D [\sigma_i](\langle u \rangle - \langle \hat{u} \rangle) n_i^+ \, dF = \text{stat}\end{aligned}} \tag{3.54}$$

ohne Nebenbedingungen. Das Funktional $\check{I}_1$ entspricht in der Elastizitätstheorie jenem von Hellinger-Reißner-Veubeke [4], [15], [16], [17] bzw. bei Berücksichtigung des letzten Terms jenem von Prager [5], [6] und Bufler [7], [8]; bei Prager steht $\sigma_i n_i^+$ anstelle von $[\sigma_i] n_i^+$, d. h. $\sigma_i n_i^+$ wird dort als stetig über D vorausgesetzt. Mit der Umformung

$$\sum \int_{V^{(k)}} \sigma_i \partial_i u \, dV = - \sum \int_{V^{(k)}} \partial_i \sigma_i u \, dV + \int_{F_u + F_s} \sigma_i n_i u \, dF + \\ + \int_D [\sigma_i] \langle u \rangle n_i^+ \, dF + \int_D \langle \sigma_i \rangle [u] n_i^+ \, dF$$

und der Elimination von $\Pi^{(a)}$ mittels (3.53) ergibt sich hieraus – wie ein Vergleich mit (3.49) lehrt – das Funktional $\tilde{I}_1$, womit der Zusammenhang

$$I_1 = \check{I}_1 = \tilde{I}_1 \tag{3.55}$$

nachgewiesen ist.

Ebenso wie bei den diskontinuierlichen Problemen kann man auch hier die Transformation von Friedrichs bestätigen. Denn es gilt mit Π nach (3.37) und $\tilde{\Pi}$ nach (3.47) die Komplementärdarstellung:

$\Pi = \min$ mit N. B. II ist äquivalent $I_1 = \min$ mit N. B. II und liefert I, $\tilde{\Pi} = \min$ mit N. B. I ist äquivalent $\tilde{I}_1 = \max$ mit N. B. I (und liefert II), d. h. ein ursprüngliches Minimumproblem mit Nebenbedingungen kann in ein Maximumproblem mit neuen Nebenbedingungen, die die natürlichen Bedingungen des ursprünglichen Problems sind, transformiert werden. Für das der exakten Lösung zugeordnete Funktional I_1 gilt mithin die Eingrenzung

$$-\min \tilde{\Pi} < I_1 < \min \Pi, \tag{356}$$

wobei die Schranken über zulässige (den N. B. I bzw. II genügenden) Ansatzfunktionen zu bestimmen sind.

Die Funktionale Π nach (3.37) und $\tilde{\Pi}$ nach (3.47) ohne Diskontinuitätsterme dienen in [22] als Grundlage für die Anwendung der Methode der finiten Elemente auf das Problem der ebenen Sickerwasserströmung.

3.7 Weitere Zusammenhänge und Bemerkungen

Beim Funktional $\tilde{I}_1$ handelt es sich, wie leicht gezeigt werden kann, um die kanonische Form des Funktionals Π [17]. Es kann entsprechend der in dieser Arbeit verfolgten Konzeption sowohl über das Prinzip der virtuellen „Verschiebungen" als auch über das Prinzip der virtuellen „Kräfte" erzeugt werden (siehe hierzu die Systematik in Abb. 1). Eine interessante Alternative der Herleitung der Funktionale I_1, Π und $\tilde{\Pi}$, die die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren vermeidet und auf der Konstruktion eines selbstadjungierten Operators aus den Ausgangsgleichungen I nach (3.1) und II nach (3.2) beruht, wird von Sewell [23] angegeben.

Die auf I′ in (3.28) und II′ in (3.29) beruhenden Darstellungen haben einen kleineren Anwendungsbereich als jene, die auf I in (3.26) und II in (3.27) beruhen: Denn sie gelten nur, wenn das System II überbestimmt ist; außerdem sind die Randbedingungen schwieriger unterzubringen. Aus diesem Grund wurde hier nicht auf weitere Variationsfunktionale (in Analogie zu den in Ziff. 2 diskutierten Funktionen $I_2, \tilde{I}_2$ und $\tilde{\tilde{I}}_2$) eingegangen; solche finden sich für Einbereichsaufgaben der Elastostatik ohne Bezugnahme auf allgemeine Randbedingungen bei Tonti [24].

Bei der approximativen Lösung von Aufgaben mittels bereichsweise vorgegebener Ansatzfunktionen mit freien Parametern (finite Elemente) nach Art des Ritzschen Verfahrens hat man auf die den einzelnen Prinzipien zugrundeliegenden Voraussetzungen, insbesondere auf die Nebenbedingungen zu achten. Falls keine physikalischen Diskontinuitäten längs der Innenränder D vorliegen (was wohl in den Anwendungen die Regel sein wird und im folgenden vorausgesetzt sei), gilt dort $\langle \hat{u} \rangle = \langle \hat{s} \rangle = 0$.

Bezüglich ihres Verhaltens auf D unterscheidet man Ansatzfunktionen mit folgenden Eigenschaften:

($1u$) u unterliegt keinen Restriktionen

($2u$) u erfüllt die Bedingung $\int\limits_D [\sigma_i] \langle u \rangle n_i^+ \, dF = 0$

($3u$) u erfüllt die Bedingung $\langle u \rangle = 0$

(1σ) σ_i unterliegt keinen Restriktionen

(2σ) σ_i erfüllt die Bedingung $\int\limits_D [u] \langle \sigma_i \rangle n_i^+ \, dF = 0$

(3σ) σ_i erfüllt die Bedingung $\langle \sigma_i \rangle n_i = 0$.

Arbeitet man gemäß ($1u$) bzw. (1σ), so müssen in den Funktionalen I_1 und $\bar{I}_1$ bzw. $\tilde{I}_1$ die Diskontinuitätsterme mitgenommen werden. Sie entfallen nur dann, wenn die (schwachen) Bedingungen ($2u$) bzw. (2σ) oder die (starken) Bedingungen ($3u$) bzw. (3σ) erfüllt sind. Insbesondere muß bei Verwendung des Funktionals Π (das als Sonderfall in I_1 enthalten ist) die Bedingungen ($2u$) oder ($3u$) erfüllt sein, und bei Verwendung des Funktionals $\bar{\Pi}$ (das als Sonderfall in $\bar{I}_1$ enthalten ist) die Bedingungen (2σ) oder (3σ). Genügt ein u-Ansatz der Bedingung ($3u$), so nennt man ihn „conforming"; erfüllt er jedoch nur ($2u$), so sagt man, er hat den „patch test" bestanden und ist damit zulässig für das am häufigsten verwendete Prinzip (3.35) (siehe hierzu die mathematischen Ausführungen in [25]).

Analoge Überlegungen treffen für die Variationsgleichungen (3.31) und (3.32) bzw. (3.40) und (3.41) zu, die eine nicht notwendig integrable Differentialform erster Ordnung darstellen und damit nicht an die Existenz von Funktionalen gebunden sind.

3.8 Anhang: Gegenüberstellung einiger formaler Differentialoperatoren

Es werden folgende tabellarisch zusammengestellte Fälle betrachtet:

a) Ein durch die Linienlast q beanspruchter Stab (eindimensionales Problem; σ Schnittkraft, ε Dehnung, u Verschiebung).

Da das System II nicht überbestimmt ist, gibt es keine Kompatibilitätsbedingung für ε.

Diese statische Aufgabe ist äquivalent der kinetischen Aufgabe der eindimensionalen Bewegung eines Massenpunktes. Hier bedeutet q die der Bewegungsrichtung entgegengesetzte Kraft, σ den Impuls, ε die Geschwindigkeit und u den Weg. Die in den Prinzipien vorkommenden Integrale sind über die Zeit zu erstrecken. Dann entspricht, wie leicht nachzuprüfen ist, (3.35) dem Hamiltonschen Prinzip mit $\pi^{(i)}$ als kinetischer Energie und $\pi^{(a)}$ als negativem Potential der Kraft q (sofern dieses existiert). Bei einer Diskretisierung des Zeitkontinuums kommt man so automatisch zu finiten Zeitelementen, siehe hierzu Argyris und Scharpf [26].

b) Das unter Ziffer 3 ausführlich behandelte Problem der räumlichen Sickerströmung mit q als Quellergiebigkeit, σ_i als negativer Geschwindigkeit, ε_i als Druckgradient und u als Druck. Analog behandelbar sind das Problem der stationären Wärmeleitung und das elektrostatische Feldproblem.

c) Die räumlichen Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie mit q_i als Volumskraft, σ_{ij} als Spannungstensor, ε_{ij} als Verzerrungstensor und u_i als Verschiebungsvektor.

	I $A\sigma = q$	II $A^*u = \varepsilon$	I′ $\sigma = \bar{\sigma} + B^*\psi$	II′ $B\varepsilon = 0$
a)	$A\sigma = q$ $A = -\partial$	$A^*u = \varepsilon$ $A^* = \partial$		
b)	$A_i\sigma_i = q$ $A_i = -\partial_i$	$A_i^*u = \varepsilon_i$ $A_i^* = \partial_i$	$\sigma_i = \bar{\sigma}_i + B_{ij}^*\psi_j$ $B_{ij}^* = e_{ijk}\partial_k$	$B_{ij}\varepsilon_j = 0$ $B_{ij} = B_{ij}^*$
c)	$A_j\sigma_{ji} = q_i$ $A_j = -\partial_j$	$A_{ijk}^*u_k = \varepsilon_{ij}$ $A_{ijk}^* = \frac{1}{2}$ $(\delta_{ik}\partial_j + \delta_{jk}\partial_i)$	$\sigma_{il} = \bar{\sigma}_{il} + B_{ijlm}^*\psi_{jm}$ $B_{ijlm}^* = e_{ijk}e_{lmn}\partial_k\partial_n$	$B_{ijlm}\varepsilon_{jm} = 0$ $B_{ijlm} = B_{ijlm}^*$

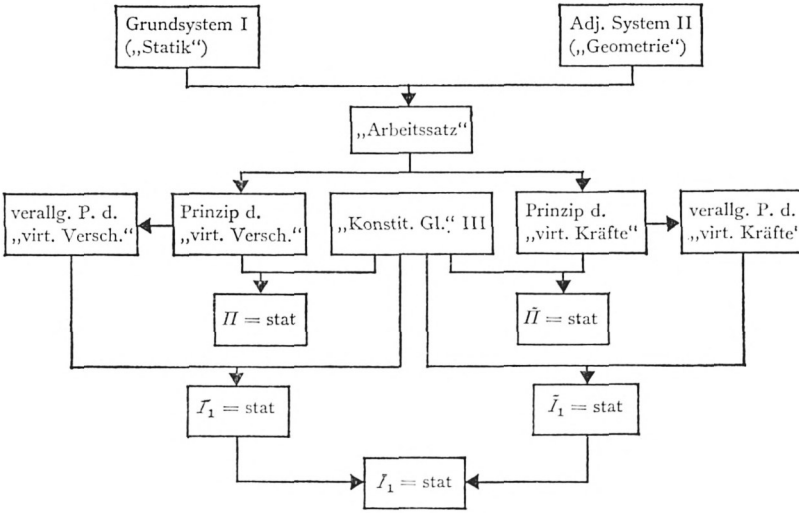

Abb. 1 Systematik der aus den Relationen I, II und III entwickelten Variationsprinzipien

Literatur

[1] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London 1971.

[2] J. T. Oden, Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York 1972.

[3] R. Courant, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943) S. 1.

[4] K. Washizu, Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, Oxford 1968.

[5] W. Prager, Beitrag in Recent Progress in Applied Mechanics, The Folke Odquist Volume, Stockholm, New-York, London, Sydney 1967, S. 463.

[6] W. Prager, Internat. J. Solids Struct. 4 (1968) S. 837.

[7] H. Bufler, ZAMM 50 (1970) S. T 105.

[8] H. Bufler, Ing.-Arch. 39 (1970) S. 330.

[9] C. Lanczos, Linear Differential Operators, D. Van Nostrand, London, Toronto, New York, Princeton, New Jersey 1961.

[10] J. H. Argyris, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 174.

[11] C. Lanczos, The Variational Principles of Mechanics, 3. ed., University of Toronto Press 1966.

[12] Hai Chang Hu, Scientia Sinica 4 (1955) S. 33.

[13] K. Washizu, Techn. Rep. 25–18 of the Aeroel. and Struct. Res. Lab. of the MIT (1955).

[14] R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, 3. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York 1968.

[15] E. Hellinger, Enzykl. d. math. Wiss. 4(1914).

[16] E. Reißner, J. Math. Phys. 29(1950) S. 90 und 32(1953) S. 129.

[17] F. de Veubeke, Bull. Serv. Techn. Aeron. No. 24, Brüssel (1951) und Beitrag in Stress Analysis, ed. O. C. Zienkiewicz u. G. S. Holster, New York 1965.

[18] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Differential Operators, Interscience 1963.

[19] S. G. Michlin, Variationsmethoden der mathematischen Physik, Berlin 1962.

[20] E. Tonti, Accad. Naz. Linc., Rend. Cl. di Sc. Fis. Mat. Nat., Ser. 8 Vol. 52 (1972) S. 49, 175 u. 350

[21] J. Stickforth, Techn. Mitt. Krupp, Forsch. Ber. 22 (1964) S. 83

[22] A. R. S. Ponter, Int. J. Num. Meth. Eng. 4 (1972) S. 85.

[23] M. J. Sewell, J. Struct. Mech. 2 (1973) S. 1 (Part I) u. S. 135 (Part II).

[24] E. Tonti, Meccanica 2 (1967) S. 1.

[25] G. Strang u. G. J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Englewood Cliffs N. Y. 1973.

[26] J. H. Argyris u. D. W. Scharpf, The Aeron. J. of the Royal Aeron. Soc. 74 (1970) S. 1041.