BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Topologische Garben

Von **Klaus Wolffhardt** in München

In der klassischen Garbentheorie versteht man unter einer Prägarbe von Mengen über einem topologischen Raum X einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der offenen Mengen in X in die der Mengen [3]. Man definiert einen Funktor von der Kategorie der Prägarben von Mengen über X in die der topologischen Räume über X, der jeder Prägarbe ihren Totalraum, den Raum ihrer Keime, zuordnet. Es gibt einen dazu rechtsadjungierten Funktor, der jedem Raum Y über X die Prägarbe der Schnitte in Y zuordnet. Y ist genau dann zum Totalraum dieser Prägarbe natürlich homöomorph, wenn Y lokal topologisch über X liegt; und eine Prägarbe über X ist genau dann eine Garbe, wenn sie zur Prägarbe der Schnitte in ihrem Totalraum natürlich isomorph ist. Insbesondere erhält man eine Äquivalenz der Kategorie der Garben von Mengen über X und der Kategorie der über X lokal topologischen Räume.

Diese Ergebnisse lassen sich vollständig auf Prägarben und Garben mit Werten in einer algebraischen Kategorie übertragen (z. B. auf Prägarben von Ringen, Gruppen oder Vektorräumen). Schwieriger ist der Fall der Prägarben mit Werten in topologischen Räumen, mit dem wir uns hier beschäftigen. Adjungierte Funktoren „Totalraum“ und „Prägarbe der Schnitte“ werden ähnlich wie im klassischen Fall erklärt. Auf der Menge aller Keime einer Prägarbe und auf der aller Schnitte in einem topologischen Raum über einer offenen Menge in X werden dabei Topologien definiert, die in der klassischen Garbentheorie nicht betrachtet werden. Unsere Topologie auf dem Totalraum einer Prägarbe von topologischen Räumen ist gröber als die klassische; sie induziert auf jedem Halm eben die Topologie, die er als direkter Limes besitzt.

Entscheidend für die Brauchbarkeit dieser Begriffe sind die Fragen:

1. Welche topologischen Räume über X sind zum Totalraum der Prägarbe ihrer Schnitte natürlich homöomorph?

2. Welche topologischen Prägarben über X sind topologische Garben, d. h. zur Prägarbe der Schnitte in ihrem Totalraum natürlich isomorph?

Zu Frage 1: Die Schnittflächen in einem solchen Raum müssen – wie im klassischen Fall – die Basis einer Topologie des Raums bilden; doch darf die gegebene Topologie echt gröber als diese sein.

Zu Frage 2: Alle topologischen Garben sind im Sinne von Grothendieck [5] Garben mit Werten in der Kategorie der topologischen Räume. Eine topologische Garbe muß aber zusätzliche Bedingungen erfüllen, die u. a. sicherstellen, daß die Halme genügend feine Topologien besitzen.

Beispiele topologischer Garben sind die analytischen Garben auf einem komplexen Raum X mit ihrer „natürlichen Topologie", die wir hier definieren. Die bekannte „kanonische Topologie" [1, S. 203] des Schnittraums über einem im unendlichen abzählbaren offenen Teil von X kann aus der natürlichen Topologie abgeleitet werden als die feinste, in der dieselben Folgen konvergieren.

Offen bleiben hier genug Fragen. So wären weitere Klassen von topologischen Garben und eine Charakterisierung ihrer Totalräume interessant, oder die Struktur von Schnitträumen analytischer Garben als Vektorräumen mit der natürlichen Topologie. Weiter ergibt sich die Aufgabe, eine ähnliche Theorie für Prägarben von lokal konvexen Vektorräumen oder anderen Objekten zu entwickeln.

§ 1. Topologische Prägarben und Räume über X

Ist $\boldsymbol{A}$ eine Kategorie, so soll $A \in \boldsymbol{A}$ bedeuten, daß A ein Objekt von $\boldsymbol{A}$ ist, und $\boldsymbol{A}(A, B)$ für $A, B \in \boldsymbol{A}$ die Menge aller Morphismen von A nach B in $\boldsymbol{A}$ bezeichnen.

$\boldsymbol{T}$ sei die Kategorie der topologischen Räume und der stetigen Abbildungen. $X \in \boldsymbol{T}$ sei fest gegeben. $\boldsymbol{S}$ sei die Kategorie der topologischen Räume über X; ein Objekt von $\boldsymbol{S}$ ist demnach ein $Y \in \boldsymbol{T}$ zusammen mit einer „Projektion" aus $\boldsymbol{T}(Y, X)$. Wir werden ein solches Objekt einfach Y und die Projektion immer π nennen. Für $Y, Z \in \boldsymbol{S}$ ist $\boldsymbol{S}(Y,Z)$ die Menge aller $f \in \boldsymbol{T}(Y,Z)$, für die

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die offenen Unterräume von X sind mit der kanonischen Einbettung in X Objekte von $\boldsymbol{S}$. Die von ihnen gebildete volle Unterkategorie von $\boldsymbol{S}$ nennen wir $\boldsymbol{U}$.

Sei $Y \in \boldsymbol{S}$. Alle Unterräume von Y sind in kanonischer Weise Objekte von $\boldsymbol{S}$. Diejenigen unter ihnen, die in $\boldsymbol{S}$ zu einem Objekt von $\boldsymbol{U}$ isomorph sind, heißen *Schnittflächen* von Y. Ist $M \subset Y$ eine Schnittfläche, so ist $\pi(M) \in \boldsymbol{U}$ und $\pi \mid M \to \pi(M)$ ein Homöomorphismus. Ist $U \in \boldsymbol{U}$ und s ein *Schnitt* in Y über U (d. h. $s \in \boldsymbol{S}(U, Y)$), so ist $s(U)$ eine Schnittfläche und $s \mid U \to s(U)$ ein Homöomorphismus mit dem Inversen $\pi \mid s(U) \to U$. Für $x \in X$ heißt $\pi^{-1}(x)$ die *Faser* von Y über x.

Topologische Prägarbe über X nennen wir jeden kontravarianten Funktor $P : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{T}$. Sind P und Q topologische Prägarben über X, so ist ein Morphismus $f : P \to Q$ eine natürliche Transformation von P in Q. Jedem $U \in \boldsymbol{U}$ ordnet f ein $f(U) \in \boldsymbol{T}(P(U), Q(U))$ zu; statt $f(U)$ schreiben wir oft einfach f. Die Kategorie der topologischen Prägarben über X sei mit $\boldsymbol{P}$ bezeichnet.

Sei $P \in \boldsymbol{P}$. Ist $U, V \in \boldsymbol{U}$, $i \in \boldsymbol{S}(U, V)$ und $s \in P(V)$, so sei $s \mid U := P(i)(s)$. Für $x \in X$ heißt der direkte Limes der $P(U)$ in $\boldsymbol{T}$, wenn U alle offenen Umgebungen von x durchläuft, der *Halm* P_x von P über x. Diese direkten Limites seien so gebildet, daß $P_x \cap P_y = \emptyset$ ist, falls $x, y \in X$ verschieden sind. Für $x \in U \in \boldsymbol{U}$ und $s \in P(U)$ heißt das Bild von s bei der kanonischen Abbildung $P(U) \to P_x$ der *Keim* s_x von s im Punkt x. Wir sagen, s *repräsentiert* s_x oder ist ein *Repräsentant* von s_x.

Zu $P \in \boldsymbol{P}$ definieren wir den *Totalraum* $SP \in \boldsymbol{S}$. Die zugrunde liegende Menge sei $\bigcup_{x \in X} P_x$. Die Topologie von SP sei die feinste, für die alle Abbildungen

$$U \times P(U) \to SP \qquad (U \in \boldsymbol{U})$$
$$(x, s) \mapsto s_x$$

partiell stetig sind, mit anderen Worten die feinste, für die alle folgenden Abbildungen stetig sind:

$$\begin{aligned} P(U) &\to SP && \text{für } x \in U \in \boldsymbol{U} \\ s &\mapsto s_x && \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{s}\colon U &\to SP && \text{für } U \in \boldsymbol{U},\ s \in P(U). \\ x &\mapsto s_x && \end{aligned}$$

Demnach ist ein Teil M von SP genau dann abgeschlossen, wenn alle folgenden Mengen abgeschlossen sind: $\{s \in P(U) : s_x \in M\}$ in $P(U)$ für $x \in U \in \boldsymbol{U}$ und $\tilde{s}^{-1}(M)$ in U für $U \in \boldsymbol{U}$ und $s \in P(U)$.

Sei $\pi\colon SP \to X$ die Abbildung mit $\pi^{-1}(x) = P_x$ für alle $x \in X$. Sie ist stetig; denn ist C in X abgeschlossen, so ist $\pi^{-1}(C)$ in SP abgeschlossen: Einmal ist für $x \in U \in \boldsymbol{U}$ stets

$$\{s \in P(U)\colon s_x \in \pi^{-1}(C)\} = \begin{cases} P(U), \text{ falls } x \in C, \\ \emptyset \text{ sonst}, \end{cases}$$

also in $P(U)$ abgeschlossen; zum andern ist für alle $U \in \boldsymbol{U}$ und $s \in P(U)$ die Menge $\{x \in U : s_x \in \pi^{-1}(C)\} = C \cap U$ in U abgeschlossen. Mit dieser Projektion π ist $SP \in \boldsymbol{S}$.

Wir erweitern nun S zu einem Funktor $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{S}$. Seien $P, Q \in \boldsymbol{P}$ und $f \in \boldsymbol{P}(P, Q)$. Dann wird $Sf \in \boldsymbol{S}(SP, SQ)$ so definiert: Für $x \in U \in \boldsymbol{U}$ und $s \in P(U)$ sei $(Sf)(s_x) := f(s)_x$. (Man beachte, daß $f \in \boldsymbol{T}(P(U), Q(U))$ ist.) Wie man leicht beweist, ist $Sf : SP \to SQ$ wohldefiniert. Die Stetigkeit bedeutet, daß für alle $U \in \boldsymbol{U}$ die Verkettung

$$\begin{aligned} U \times P(U) &\to SP \xrightarrow{Sf} SQ \\ (x, s) &\mapsto s_x \quad \mapsto f(s)_x \end{aligned}$$

partiell stetig ist. Das ist der Fall, da diese gleich der Verkettung

$$\begin{aligned} U \times P(U) &\to U \times Q(U) \to SQ \\ (x, s) &\mapsto (x, f(s)) \quad \mapsto f(s)_x \end{aligned}$$

ist, wobei $f : P(U) \to Q(U)$ stetig und $U \times Q(U) \to SQ$ partiell stetig ist. Die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} SP \arrow[rr, "Sf"] \arrow[dr] & & SQ \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

ist klar, so daß $S(f) \in \boldsymbol{S}(SP, SQ)$. Die Funktoreigenschaft ist trivial nachzuprüfen. Wir haben also einen Funktor $S : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{S}$ definiert.

Wir wollen nun die Topologie von SP anders beschreiben. Zunächst gilt:

Satz 1. Sei $P \in \boldsymbol{P}$. Dann trägt SP die feinste Topologie, für die die Abbildungen

$$P_x \to SP,\ s_x \mapsto s_x \text{ für } x \in X$$

und $\tilde{s} : U \to SP$ für $U \in \boldsymbol{U}$, $s \in P(U)$
stetig sind.

Beweis. Für jedes $x \in X$ ist die Stetigkeit der kanonischen Einbettung $P_x \to SP$ gleichwertig dazu, daß $P(U) \to SP$, $s \mapsto s_x$ für alle $U \in \boldsymbol{U}$ mit $x \in U$ stetig ist.

Satz 2. Sei $P \in \boldsymbol{P}$ und $x \in X$. Dann ist P_x Unterraum von SP.

Beweis. Nach Satz 1 ist die kanonische Einbettung $P_x \to SP$ stetig. Es ist noch zu zeigen: Sei A ein abgeschlossener Teil von P_x. Dann gibt es einen abgeschlossenen Teil C von SP mit $A = C \cap P_x$. Diese Gleichung gilt trivialerweise für $C := \{s_y \in SP$: Jeder Repräsentant von s_y repräsentiert auch ein Element von $A\}$.

C ist in SP abgeschlossen; denn

1. für $y \in U \in \boldsymbol{U}$ ist

$$\{s \in P(U) : s_y \in C\} = \begin{cases} \emptyset, \text{ falls } y \notin \overline{\{x\}} \text{ ist,} \\ \{s \in P(U) : s_x \in A\} \text{ sonst} \end{cases}$$

in $P(U)$ abgeschlossen;

2. für $U \in \boldsymbol{U}$ und $s \in P(U)$ ist

$$\tilde{s}^{-1}(C) = \begin{cases} \overline{\{x\}} \cap U, \text{ falls } x \in U \text{ und } s_x \in A \text{ ist,} \\ \emptyset \text{ sonst} \end{cases}$$

in U abgeschlossen.

Satz 3. Sei $P \in \boldsymbol{P}$ und $A \subset SP$. Genau dann ist A in SP abgeschlossen, wenn

1. $A \cap P_x$ für alle $x \in X$ in P_x abgeschlossen ist und

2. $A \cap \tilde{s}(U)$ für alle $U \in \boldsymbol{U}$ und alle $s \in P(U)$ in $\tilde{s}(U)$ abgeschlossen ist.

Beweis. Nach Satz 1 ist A genau dann abgeschlossen, wenn das Urbild von A in P_x und $\tilde{s}^{-1}(A)$ in U stets abgeschlossen sind. Das erste ist aber gleich $A \cap P_x$ und $\tilde{s}^{-1}(A)$ ist in U genau dann abgeschlossen, wenn $A \cap \tilde{s}(U)$ in $\tilde{s}(U)$ abgeschlossen ist, da $\tilde{s} \mid U \to \tilde{s}(U)$ ein Homöomorphismus ist.

Korollar. Sei $A \subset Y \in \boldsymbol{S}$. Es gebe ein solches $P \in \boldsymbol{P}$, daß Y in $\boldsymbol{S}$ zu SP isomorph ist. Dann gilt: A ist genau dann in Y abgeschlossen, wenn $A \cap F$ für jede Faser F und für jede Schnittfläche F von Y in F abgeschlossen ist.

Beweis. „Nur dann" ist nach Definition der Relativtopologie auf F trivial. – „Immer dann." Nehmen wir o. B. d. A. $Y = SP$ an! Ist $A \cap F$ für jede Faser oder Schnittfläche F von Y in F abgeschlossen, so sind die Bedingungen 1 und 2 von Satz 3 erfüllt und die Behauptung folgt.

Wir wollen jetzt umgekehrt einen Funktor $G: \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{P}$ erklären. Sei $Y \in \boldsymbol{S}$. Für $U \in \boldsymbol{U}$ sei $GY(U) := \boldsymbol{S}(U, Y) \in \boldsymbol{T}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Für $U, V \in \boldsymbol{U}$ und $i \in \boldsymbol{S}(U, V)$ sei $GY(i) \in \boldsymbol{T}(GY(V), GY(U))$ die Beschränkung von Abbildungen, $s \mapsto s \mid U = s \circ i$. Offenbar ist damit $GY \in \boldsymbol{P}$. Wir nennen GY die *Prägarbe der Schnitte* in Y.

Sei $Y, Z \in \boldsymbol{S}$ und $h \in \boldsymbol{S}(Y, Z)$. Für jedes $U \in \boldsymbol{U}$ ist dann $GY(U) = \boldsymbol{S}(U, Y) \ni f \mapsto h \circ f \in \boldsymbol{S}(U, Z) = GZ(U)$ eine Abbildung $Gh(U) \in \boldsymbol{T}(GY(U), GZ(U))$ (stetig nach [2, Chap. 1, § 8 Cor. 3 du Théor. 1]), die von $U \in \boldsymbol{U}$ natürlich abhängt. Wir haben also $Gh \in \boldsymbol{P}(GY, GZ)$ definiert. Gh hängt funktoriell von h ab. Wir haben also einen Funktor $G: \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{P}$ erklärt.

§ 2. Adjunktion der Funktoren S und G

Wir wollen eine Adjunktion der Funktoren S und G herstellen, und zwar durch zwei natürliche Transformationen

$$g : \mathrm{id}_P \to GS$$

und
$$r : SG \to \mathrm{id}_S .$$

Zunächst die Definition von g! Sei $P \in \boldsymbol{P}$. Für $U \in \boldsymbol{U}$ haben wir eine Abbildung

$$g(P)(U) : P(U) \to GSP(U) = \boldsymbol{S}(U, SP).$$
$$s \mapsto \tilde{s}$$

Sie ist nach Definition der Topologie von $GSP(U)$ stetig, wenn $s \mapsto \tilde{s}(x) = s_x$ für jedes $x \in U$ eine stetige Abbildung $P(U) \to SP$ ist; das ist aber nach Definition der Topologie von SP der Fall. Die Stetigkeit ist somit gegeben. Da für $U, V \in \boldsymbol{U}$ mit $V \subset U$ und $s \in P(U)$ stets $\widetilde{s|V} = \tilde{s} \mid V$ ist, hängt $g(P)(U)$ natürlich von U ab, d. h. wir haben $g(P) \in \boldsymbol{P}(P, GSP)$ erklärt. Daß g eine natürliche Transformation ist, bedeutet: für $P, Q \in \boldsymbol{P}$ und $f \in \boldsymbol{P}(P, Q)$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g(P)"'] & Q \arrow[d, "g(Q)"] \\ GSP \arrow[r, "GSf"] & GSQ \end{tikzcd} ,$$

d. h. für alle $U \in \boldsymbol{U}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g(P)"'] & Q(U) \arrow[d, "g(Q)"] \\ \boldsymbol{S}(U, SP) = GSP(U) \arrow[r, "GSf"] & GSQ(U) = \boldsymbol{S}(U, SQ). \end{tikzcd}$$

Nun ist aber für alle $s \in P(U)$ und $x \in U$

$$g(Q)(f(s))(x) = \widetilde{f(s)}(x) = f(s)_x$$

und ebenso

$$GSf(g(P)(s))(x) = GSf(\tilde{s})(x) = Sf \circ \tilde{s}(x) = Sf(s_x) = f(s)_x .$$

Somit haben wir tatsächlich eine natürliche Transformation $g : \mathrm{id}_P \to GS$ erklärt.

Nun zur Definition von r! Sei $Y \in \boldsymbol{S}$. Für $s_x \in SGY$ bilden wir mit $x := \pi(s_x)$ und einem Repräsentanten s von s_x das Element $s(x) \in Y$. Da $s(x)$ nicht von der Wahl von s abhängt, haben wir eine Abbildung $r(Y)$: $SGY \to Y$, $s_x \mapsto s(x)$, erklärt.

Nach Definition der Topologie von SGY ist $r(Y)$ stetig, wenn für jedes $U \in \boldsymbol{U}$ die Verkettung der Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} U \times GY(U) & \to & SGY & \xrightarrow{r(Y)} & Y \\ (x,s) & \mapsto & s_x & \mapsto & s(x) \end{array}$$

partiell stetig ist. Das ist der Fall: Bei festem $s \in GY(U) = \boldsymbol{S}(U, Y)$ hängt $s(x)$ stetig von x ab und bei festem $x \in U$ ist

$$GY(U) \ni s \mapsto s(x) \in Y$$

nach Definition der Topologie von $GY(U)$ stetig. $r(Y)$ ist also stetig, und da offenbar stets $\pi(s(x)) = x$ ist, folgt $r(Y) \in \boldsymbol{S}(SGY, Y)$.

Wir haben noch zu zeigen, daß $r(Y)$ natürlich von Y abhängt, daß also für $Y, Z \in \boldsymbol{S}$ und $f \in \boldsymbol{S}(Y, Z)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} SGY \arrow[r, "SGf"] \arrow[d, "r(Y)"'] & SGZ \arrow[d, "r(Z)"] \\ Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist $s_x \in SGY$, $x = \pi(s_x)$ und s ein Repräsentant von s_x, so ist

$$\begin{aligned} r(Z)(SGf(s_x)) &= r(Z)(Gf(s)_x) = r(Z)((f \circ s)_x) = (f \circ s)(x) = \\ &= f(s(x)) = f(r(Y)(s_x)), \end{aligned}$$

q. e. d.

Wir wollen nun zeigen:

Satz 4. Vermöge der natürlichen Transformationen

$$g : \mathrm{id}_P \to GS$$

und

$$r : SG \to \mathrm{id}_S$$

ist S zu G linksadjungiert. Das heißt:

Für alle $Y \in \boldsymbol{S}$ ist $G(r(Y)) \circ g(GY) = \mathrm{id}_{GY}$ und
für alle $P \in \boldsymbol{P}$ ist $r(SP) \circ S(g(P)) = \mathrm{id}_{SP}$.

Beweis. Für $Y \in \boldsymbol{S}$, $U \in \boldsymbol{U}$ und $s \in GY(U) = \boldsymbol{S}(U, Y)$ ist $G(r(Y))(g(GY)(s)) = G(r(Y))(\bar{s}) = r(Y) \circ \bar{s} = s$. Für $P \in \boldsymbol{P}$, $s_x \in SP$ mit $\pi(s_x) = x$ und einem Repräsentanten s ist

$$r(SP)(S(g(P))(s_x)) = r(SP)(g(P)(s)_x) = r(SP)(\tilde{s}_x) = \tilde{s}(x) = s_x,$$

q. e. d.

Die Adjunktion der Funktoren G und S durch die natürlichen Transformationen r und g wirft insbesondere folgende Fragen auf:

1. Für welche topologischen Räume Y über X ist $r(Y) : SGY \to Y$ ein Homöomorphismus?
2. Für welche topologischen Prägarben P ist $g(P) : P \to GSP$ ein Isomorphismus?

Über $r(Y)$ sei nur der folgende Satz bewiesen.

Satz 5. Sei $Y \in \boldsymbol{S}$. Genau dann ist $r(Y)$ bijektiv, wenn die Schnittflächen von Y eine Basis einer Topologie auf Y bilden. Diese Topologie ist dann feiner als die gegebene Topologie von Y.

Bemerkungen. Mit dieser Topologie ist Y bekanntlich der «espace étalé» der Garbe GY (s. [3, p. 111]). Eine notwendige Bedingung dafür, daß $r(Y)$ ein Homöomorphismus ist, gibt auch das Korollar zu Satz 3.

Beweis. 1. $r(Y)$ ist genau dann surjektiv, wenn Y Vereinigung aller seiner Schnittflächen ist. Denn das Bild von $r(Y)$ ist $\{r(Y)(s_x) : s_x \in SGY\} = \{s(x) : s : U \to Y$ ist Schnitt und $x \in U\}$, das ist die Vereinigung aller Schnittflächen in Y.

2. $r(Y)$ ist genau dann injektiv, wenn der Durchschnitt zweier Schnittflächen stets eine Schnittfläche ist. Denn folgende Aussagen sind sukzessive äquivalent: $r(Y)$ ist injektiv; für alle $s_x, t_x \in SGY$ mit $r(Y)(s_x) = r(Y)(t_x)$ ist $s_x = t_x$; für alle Schnitte s und t in Y über Umgebungen von $x \in X$ mit $s(x) = t(x)$ ist $s_x = t_x$; für alle Schnitte s und t in Y ist $\{x : s(x) = t(x)\} \in \boldsymbol{U}$; für alle Schnittflächen F_1 und F_2 in Y ist $\pi(F_1 \cap F_2) \in \boldsymbol{U}$; für alle Schnittflächen F_1 und F_2 in Y ist $F_1 \cap F_2$ eine Schnittfläche.

3. Für Schnittflächen F_1 und F_2 in Y ist $\pi(F_1 \cap F_2) \in \boldsymbol{U}$ genau dann, wenn $F_1 \cap F_2$ Vereinigung von Schnittflächen ist. Aus 1. und 2. folgt daher: $r(Y)$ ist genau dann bijektiv, wenn Y und jeder Durchschnitt zweier Schnittflächen in Y Vereinigung

von Schnittflächen ist, d. h. aber wenn die Schnittflächen eine Basis einer Topologie auf Y bilden.

4. Die zweite Behauptung folgt daraus, daß wenn Y Vereinigung von Schnittflächen ist, jede offene Menge in Y Vereinigung der darin enthaltenen Schnittflächen ist.

§ 3. Topologische Garben

Definition. Eine *topologische Garbe* über X ist eine topologische Prägarbe P, für die $g(P) : P \to GSP$ ein Isomorphismus in $\boldsymbol{P}$ ist.

Die Frage, welche $P \in \boldsymbol{P}$ topologische Garben sind, wird formal durch folgenden Satz beantwortet.

Satz 6. Eine topologische Prägarbe P über X ist genau dann eine topologische Garbe, wenn folgende drei Bedingungen gelten:

a Die P zugrunde liegende Prägarbe von Mengen ist eine Garbe [3, p. 109].

b Für alle $U \in \boldsymbol{U}$ trägt $P(U)$ die Initialtopologie der Familie der kanonischen Abbildungen $P(U) \to P_x (x \in U)$.

c Für alle $U \in \boldsymbol{U}$, $s \in P(U)$ und $\sigma \in \boldsymbol{S}(U, SP)$ ist $\tilde{s}^{-1}(\sigma(U)) \in$ $\in \boldsymbol{U}$.

Der Beweis wird nach Satz 10 gegeben.

Bedingung c ist schwer nachzuprüfen. Wir werden jedoch in Satz 11 hinreichende Bedingungen für c angeben.

Satz 7. Sei $P \in \boldsymbol{P}$. Es gebe ein solches $Y \in \boldsymbol{S}$, daß P in $\boldsymbol{P}$ zu GY isomorph ist. Dann gilt a und b.

Beweis. Sei o. B. d. A. $P = GY$. Dann ist a trivial. Sei nun $U \in \boldsymbol{U}$. Sei $\varphi : Z \to P(U)$ eine Abbildung eines topologischen Raums Z in $P(U)$, derart, daß die Verkettungen $Z \xrightarrow[\varphi]{} P(U) \to P_x$ für alle $x \in U$ stetig sind. Dann ist für jedes $x \in U$ auch die Verkettung mit $r(Y) \mid P_x$ stetig, d. i. $Z \xrightarrow[\varphi]{} P(U) \xrightarrow[f \mapsto f(x)]{} Y$. Nach Definition von $P(U)$ folgt, daß φ stetig ist. Das zeigt b.

Bemerkung. Erfüllt $P \in \boldsymbol{P}$ die Bedingungen a und b, so ist P eine Garbe mit Werten in $\boldsymbol{T}$ im Sinne von Grothendieck [5, Seite 72].

Satz 8. Erfüllt $P \in \boldsymbol{P}$ die Bedingung a, so ist $g(P) : P(U) \to GSP(U)$ für alle $U \in \boldsymbol{U}$ injektiv.

Beweis. Sei $s, t \in P(U)$ mit $\tilde{s} = \tilde{t}$. Für alle $x \in U$ ist dann $s_x = t_x$, d. h. es gibt eine Umgebung $U_x \subset U$ mit $s \mid U_x = t \mid U_x$. Da $\bigcup_{x \in U} U_x = U$ ist und a gilt, folgt $s = t$.

Satz 9. Sei $P \in \boldsymbol{P}$ so, daß $g(P) : P(U) \to \boldsymbol{S}(U, SP)$ für alle $U \in \boldsymbol{U}$ surjektiv ist. Dann gilt c.

Beweis. Sei $U \in \boldsymbol{U}$, $s \in P(U)$ und $\sigma \in \boldsymbol{S}(U, SP)$. Nach Voraussetzung existiert $t \in P(U)$ mit $\sigma = \tilde{t}$. Es ist $\tilde{s}^{-1}(\sigma(U)) = \tilde{s}^{-1}(\tilde{t}\,(U))$; das ist offen, q. e. d.

Satz 10. Sei $P \in \boldsymbol{P}$. Dann gilt gleich:

1. Die Bedingungen a und c sind erfüllt.
2. Für alle $U \in \boldsymbol{U}$ ist $g(P) : P(U) \to \boldsymbol{S}(U, SP)$ bijektiv.

Beweis. „1. impliziert 2." a und c seien wahr. Nach Satz 8 ist $g(P)(U)$ für alle $U \in \boldsymbol{U}$ injektiv. Sei nun $U \in \boldsymbol{U}$ und $\sigma \in \boldsymbol{S}(U, SP)$ gegeben. Zu jedem $x \in U$ sei $V_x \subset U$ eine offene Umgebung von x und $s^{(x)} \in P(V_x)$ ein Repräsentant von $\sigma(x)$. Nach c gilt $\boldsymbol{U} \ni \widetilde{s^{(x)}}^{-1}(\sigma(V_x)) =: W_x \ni x$. Daher ist $(W_x)_{x \in U}$ eine offene Überdeckung von U und für $y \in W_x \cap W_{x'}$ ist stets $s_y^{(x)} = \sigma(y) = s_y^{(x')}$. Nach a gibt es somit ein $s \in P(U)$ mit $s \mid W_x = s^{(x)} \mid W_x$ für alle $x \in U$. Da $\tilde{s} = \sigma$ ist, ist damit auch die Surjektivität von $g(P)(U)$ gezeigt, q. e. d.

„2. impliziert 1." Sei $g(P)(U)$ für alle $U \in \boldsymbol{U}$ bijektiv. Nach Satz 9 gilt c. Um a zu zeigen, betrachten wir die P zugrunde liegende Prägarbe von Mengen. Sie ist isomorph zur Garbe der stetigen Schnitte in SP, also eine Garbe, q. e. d.

Beweis von Satz 6. Ist $g(P)$ ein Isomorphismus, so ist $g(P)(U)$ für alle $U \in \boldsymbol{U}$ ein Homöomorphismus, daher gilt c nach Satz 9. Da weiter P zu GSP isomorph ist, gilt a und b nach Satz 7.

Seien andererseits a, b und c gültig, $U \in \boldsymbol{U}$. Zu zeigen ist, daß $g(P)(U)$ ein Homöomorphismus ist. Nach Satz 10 ist $g(P)(U)$ bijektiv. Nun trägt (nach b) $P(U)$, aber (nach Definition) auch $\boldsymbol{S}(U, SP)$ die gröbste Topologie, für die die kanonischen Abbildungen von $P(U)$ bzw. von $\boldsymbol{S}(U, SP)$ in P_x für alle $x \in U$ stetig sind. Daher ist $g(P)(U)$ sogar ein Homöomorphismus, q. e. d.

Wir wollen eine hinreichende Bedingung für c angeben.

Satz 11. X habe folgende Eigenschaft:

(1) $\left\{\begin{array}{l}\text{Ist } y \text{ Häufungspunkt von } C \subset X, \text{ so existiert ein Teil von} \\ C \text{ mit } y \text{ als einzigem Häufungspunkt.}\end{array}\right.$

Sei weiter $P \in \boldsymbol{P}$ mit folgender Eigenschaft:

(2) $\left\{\begin{array}{l}\text{Ist } D \subset U \in \boldsymbol{U},\ x \in U \text{ und } t \in P(U), \text{ so ist} \\ \{r_x \in P_x\colon \text{für einen Repräsentanten } r \text{ von } r_x \text{ ist } x \in \\ \in \overline{\tilde{r}^{-1}(\tilde{t}(D))}\} \text{ in } P_x \text{ abgeschlossen.}\end{array}\right.$

Dann gilt c.

Beweis. Sei $U \in \boldsymbol{U}$ und $s \in P(U)$ und $\sigma \in \boldsymbol{S}(U, SP)$. Die Behauptung besagt, daß $C := U \setminus \tilde{s}^{-1}(\sigma(U))$ in U abgeschlossen ist. Sei also $y \in U$ Häufungspunkt von C. Zu zeigen ist: $y \in C$.

1. Fall: Es existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von y und ein $t \in P(V)$, so daß y Häufungspunkt von $\tilde{t}^{-1}(\sigma(C))$ ist. Dann sei $D \subset \tilde{t}^{-1}(\sigma(C))$ mit y als einzigem Häufungspunkt in X. Nach Voraussetzung (2) ist $A_y := \{r_y \in P_y$: für einen Repräsentanten r von r_y ist $y \in \overline{\tilde{r}^{-1}(\tilde{t}(D))}\}$ in P_y abgeschlossen. Weiter ist $\tilde{s}(y) \notin A_y$; denn $\tilde{s}^{-1}(\tilde{t}(D)) \subset \tilde{s}^{-1}(\sigma(C)) = \emptyset$. Aus (2) folgt weiter (man setzte dort $D = \{x\}$), daß in den Halmen von P jede einpunktige Menge abgeschlossen ist. Die Menge $A := \sigma(D) \cup A_y = \tilde{t}(D) \cup A_y$ trifft daher jeden Halm von P in einer abgeschlossenen Menge. Für $W \in \boldsymbol{U}$ und $r \in P(W)$ ist außerdem $\tilde{r}^{-1}(A) = \tilde{r}^{-1}(\tilde{t}(D)) \cup \tilde{r}^{-1}(A_y)$ in W abgeschlossen: ist nämlich $y \in W$ Häufungspunkt von $\tilde{r}^{-1}(A)$, so ist $y \in \tilde{r}^{-1}(A_y)$ nach Definition von A_y, und andere Häufungspunkte können nach Wahl von D nicht auftreten, da $\tilde{r}^{-1}(A) \subset D \cup \{y\}$. Daher ist A nach Satz 1 abgeschlossen. Es folgt: $\sigma^{-1}(A)$ ist abgeschlossen, $\sigma^{-1}(A) \supset \bar{D} \ni y$, also $\sigma(y) \in A$. Falls $\sigma(y) \in \sigma(D)$, folgt $y \in D \subset C$, q. e. d.; andernfalls ist $\sigma(y) \in A_y$, also $\sigma(y) \neq \tilde{s}(y)$, also wieder $y \in C$, q. e. d.

2. Fall: Es existiert kein t wie oben beschrieben. Dann sei $D \subset C$ mit y als einzigem Häufungspunkt in X. Dann ist

$A := \sigma(D)$ in SP abgeschlossen, $\sigma^{-1}(A) = D$ folglich in U abgeschlossen. Daher ist $y \in D \subset C$, q. e. d.

§ 4. Analytische Garben als topologische Garben

In diesem Paragraphen sei X ein komplexer Raum (im Sinn von Grauert) und M eine kohärente analytische Garbe über X. Für alle $x \in X$ trägt M_x die „kanonische Topologie" (in [4, S. 87] als „Folgentopologie" eingeführt). Sie ist hausdorffsch (l. c. S. 87, Satz 10). Für $U \in \mathbf{U}$ nennen wir die gröbste Topologie auf $M(U)$, für die alle kanonischen Abbildungen $M(U) \to M_x$ $(x \in U)$ stetig sind, die *natürliche Topologie* auf $M(U)$. Sie ist auch hausdorffsch. Ist die Topologie von U abzählbar erzeugt, so kennt man daneben die „kanonische Topologie" auf $M(U)$ (s. etwa [1, Seite 203]).

Satz 12. Die natürliche Topologie auf $M(U)$ ist i. a. von der kanonischen verschieden.

Beweis. Sei M die Strukturgarbe und K eine unendliche kompakte Teilmenge eines holomorph separablen reduzierten komplexen Raums X. In $M(X)$ ist $W := \{s \in M(X) : \|s\|_K < 1\}$ eine Nullumgebung bzgl. der kanonischen Topologie. Nehmen wir an, W ist auch Nullumgebung bzgl. der natürlichen Topologie. Dann gibt es Punkte $x_j \in X$ $(j = 1, \ldots, n)$ und Nullumgebungen W_j in M_{x_j} mit $\{s \in M(X) : s_{x_j} \in W_j$ für alle $j\} \subset W$. Sei $a \in K \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $f \in M(X)$ mit $f(a) = 1$, $f(x_j) = 0$ für alle j. Ist s eine genügend hohe Potenz von f, so gilt $s_{x_j} \in W_j$ für alle j und $s(a) = 1$, also $s \notin W$. Widerspruch!

Trotzdem sind diese beiden Topologien sehr nah verwandt:

Satz 13. Die Topologie von X sei abzählbar erzeugt. Sei $f \in M(X)$ und (f_n) eine Folge in $M(X)$. Dann gilt gleich:

1. $f_n \to f$ für $n \to \infty$ bzgl. der natürlichen Topologie.
2. $f_n \to f$ für $n \to \infty$ bzgl. der kanonischen Topologie.
3. $f_{nx} \to f_x$ für $n \to \infty$ in jedem M_x $(x \in X)$ bzgl. der kanonischen Topologie von M_x.

Beweis. 1 und 3 gelten nach Definition der natürlichen Topologie gleich. Weiter wollen wir die Äquivalenz von 2 und 3 zeigen. 2 bedeutet bekanntlich: Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung W von x, natürliche Zahlen m und p, eine abgeschlossene Einbettung ϱ von W in einen offenen Teil B von $\mathbf{C}^m$, über B einen Epimorphismus von analytischen Garben

$$\boldsymbol{O}^p \to \varrho(M)$$

und in $\boldsymbol{O}^p(B)$ Urbilder g und g_n von $f \mid W, f_n \mid W \in \varrho(M)(B) = M(W)$, derart, daß $g_n \to g$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in B. (Dabei bezeichnet $\varrho(M)$ die direkte Bildgarbe von $M|W$ und $\boldsymbol{O}$ die Strukturgarbe von B.) Das aber ist dazu äquivalent, daß $f_{nx} \to f_x$ in der kanonischen Topologie von M_x, q. e. d.

Satz 13 läßt sich zu folgender Behauptung verschärfen, die besagt, daß auf $M(X)$ die kanonische Topologie feiner als die natürliche ist und aus ihr abgeleitet werden kann.

Satz 14. Die Topologie von X sei abzählbar erzeugt. Dann ist auf $M(X)$ die kanonische Topologie die feinste, bzgl. deren jede bzgl. der natürlichen Topologie konvergierende Folge gegen denselben Grenzwert konvergiert.

Beweis. Es gibt eine feinste solche Topologie $\mathfrak{T}_0$, nämlich die Finaltopologie all der Abbildungen $\mathbf{N} \cup \{\infty\} \to M(X)$, welche mit der natürlichen Topologie auf $M(X)$ stetig sind. Nach Satz 13 ist $\mathfrak{T}_0$ feiner als die kanonische Topologie von $M(X)$. Aber $\mathfrak{T}_0$ kann nicht echt feiner sein; denn da die kanonische Topologie metrisierbar ist, gibt es keine echt feinere Topologie, in der dieselben Folgen konvergieren [2, Chap. 9, § 2, Prop. 10].

Wir betrachten jetzt die Mengen $M(U)$ für alle $U \in \boldsymbol{U}$ als topologische Räume mit der natürlichen Topologie. Dann gilt:

Satz 15. M ist eine topologische Garbe.

Beweis. Da die Bedingungen a und b von Satz 6 erfüllt sind, geht es nur noch um c. Dazu verwenden wir Satz 11. Daß (1) in diesem Satz für jeden komplexen Raum X gilt, ist klar: Ist y Häufungspunkt von C in X, so gibt es eine gegen y konvergierende Folge $(y_0, y_1, \ldots)$ in $C \setminus \{y\}$ und y ist der einzige Häufungspunkt von $\{y_0, y_1, \ldots\}$.

Zu zeigen ist somit nur noch, daß (2) für M gilt. Sei also $D \subset U \in \boldsymbol{U}$, $x \in U$ und $t \in M(U)$. Behauptung: $A_x := \{r_x \in M_x:$

für einen Repräsentanten r von r_x ist $x \in \overline{\tilde{r}^{-1}(\tilde{t}(D))}\}$ ist in M_x abgeschlossen. Sei o. B. d. A. $t = 0$. Für $r_x \in M_x$ sei supp r_x der Keim im Punkt x des Trägers eines Repräsentanten von r_x. Dann ist supp r_x ein analytischer Mengenkeim in x. Sei D_x der von D repräsentierte Mengenkeim in x und D'_x der kleinste D_x umfassende analytische Mengenkeim. $D^i_x (i \in I)$ seien die irreduziblen Komponenten von D'_x. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A_x &= \{r_x \in M_x\colon \text{ jeder Repräsentant von } r_x \text{ repräsentiert auch} \\ &\qquad\qquad \text{ein } 0_y \in M_y \text{ mit } y \in D\} \\ &= \{r_x \in M_x\colon\ D_x \not\subset \operatorname{supp} r_x\} \\ &= \{r_x \in M_x\colon\ D'_x \not\subset \operatorname{supp} r_x\} \\ &= \{r_x \in M_x\colon\ D^i_x \not\subset \operatorname{supp} r_x \text{ für wenigstens ein } i \in I\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{r_x \in M_x\colon\ D^i_x \not\subset \operatorname{supp} r_x\}. \end{aligned}$$

Das ist die Vereinigung von endlich vielen Untermoduln von M_x, somit in M_x abgeschlossen, q. e. d.

Literatur

[1] Behnke, H. und P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1970.

[2] Bourbaki, N.: Topologie générale. Chap. 1 und 9. 2ième éd. Hermann, Paris 1951 und 1958.

[3] Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris 1964.

[4] Grauert, H., R. Remmert und O. Riemenschneider: Analytische Stellenalgebren. Springer-Verlag, Berlin 1971.

[5] Grothendieck, A. und J. A. Dieudonné: Eléments de Géométrie Algébrique I. Springer-Verlag, Berlin 1971.