

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Kegelschnittpaare mit gegebenen harmonischen Kurven

Von Fritz Hohenberg, Graz

*Herrn Prof. Dr. Othmar Baier zum 70. Geburtstag gewidmet*

## 1. Einleitung

Zwei Kegelschnitte  $a, b$  seien in projektiven Punktkoordinaten  $x_1, x_2, x_3$  bzw. Linienkoordinaten  $u_1, u_2, u_3$  durch

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \Sigma b_{ik} x_i x_k = 0 \text{ bzw. } \Sigma A_{ik} u_i u_k = 0, \Sigma B_{ik} u_i u_k = 0 \quad (1)$$

gegeben.  $a$  und  $b$  bestimmen eine harmonische Kurve 2. Ordnung  $h$  und eine harmonische Kurve 2. Klasse  $\bar{h}$ , mit den Gleichungen<sup>1)</sup>

$$h(\Sigma h_{ik} x_i x_k = 0), \bar{h}(\Sigma \bar{H}_{ik} u_i u_k = 0), \quad (2)$$

deren Koeffizienten  $h_{ik}$  und  $\bar{H}_{ik}$

$$\begin{aligned} \varrho h_{11} &= A_{22} B_{33} + A_{33} B_{22} - 2 A_{23} B_{23}, \dots, \\ \varrho h_{12} &= A_{31} B_{32} + A_{32} B_{31} - A_{12} B_{33} - A_{33} B_{12}, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varrho} \bar{H}_{11} &= a_{22} b_{33} + a_{33} b_{22} - 2 a_{23} b_{23}, \dots, \\ \bar{\varrho} \bar{H}_{12} &= a_{31} b_{32} + a_{32} b_{31} - a_{12} b_{33} - a_{33} b_{12}, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

(und zyklisch weiter, Proportionalitätsfaktoren  $\varrho, \bar{\varrho}$ ) lauten.

$h$  geht durch die acht Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von  $a$  und  $b$ ; aus jedem Punkt von  $h$  gehen Tangenten an  $a$  und  $b$ , die ein harmonisches Quadrupel bilden.  $\bar{h}$  berührt die acht Geraden, die  $a$  und  $b$  in deren Schnittpunkten berühren; jede Tangente von  $\bar{h}$  schneidet  $a$  und  $b$  in Punkten, die ein harmonisches Quadrupel bilden. Das (im allgemeinen eindeutig bestimmte

---

<sup>1</sup> Enzyklopädie d. math. Wiss. III C 1, S. 92–93 und 104–105. E. Pascal, Repertorium d. höh. Math., II/1, S. 247 und 254, und die dort angegebene Literatur.

und nicht ausgeartete) gemeinsame Poldreieck  $\Delta$  von  $a$  und  $b$  ist auch Poldreieck von  $h$  und  $\bar{h}$ . Vertauschen sich  $a$  und  $b$  durch Polarität an einem Kegelschnitt  $p$ , so vertauscht die Polarität an  $p$  auch  $h$  und  $\bar{h}$ .

Hier werde die Frage behandelt: *Gegeben seien  $h$  und  $\bar{h}$ ; gesucht sind Kegelschnittpaare  $a, b$ , für die  $h$  und  $\bar{h}$  harmonische Kurve 2. Ordnung bzw. 2. Klasse sind.* Das bedeutet, daß in (3) und (4) die  $h_{ik}$  und  $\bar{h}_{ik}$  gegeben und die  $a_{ik}$  und  $b_{ik}$  gesucht sind. Da die  $A_{ik}$  und  $B_{ik}$  vom Grad 2 in den  $a_{ik}$  bzw.  $b_{ik}$  sind, erhält man nach Elimination von  $\varrho$  und  $\bar{\varrho}$  aus (3) fünf homogene Gleichungen 4. Grades, aus (4) fünf homogene Gleichungen 2. Grades für die  $a_{ik}$  und  $b_{ik}$ .

Dieses Gleichungssystem läßt sich auf geometrischem Wege stark vereinfachen, im allgemeinen Fall auf eine erste kubische Aufgabe (Bestimmung des gemeinsamen Poldreiecks von  $h$  und  $\bar{h}$ ) und auf eine zweite kubische Aufgabe (eine Winkeldreiteilung) und zwei quadratische Gleichungen; in Sonderfällen ergeben sich weitere Vereinfachungen.

*Haben  $h$  und  $\bar{h}$  getrennte Schnittpunkte, so erhält man drei Kegelschnittpaare  $a, b$ . Berühren  $h$  und  $\bar{h}$  einander in einem Punkt oder in zwei Punkten, so ergibt sich ein Paar  $a, b$ . Hingegen erhält man unendlich viele Paare  $a, b$ , wenn  $h$  und  $\bar{h}$  einander hyperoskulieren oder wenn  $h$  mit  $\bar{h}$  identisch ist oder wenn  $h$  und  $\bar{h}$  singulär sind.*

## 2. Fälle mit endlich vielen Lösungen

2.1. Der allgemeine Fall.  $h$  und  $\bar{h}$  seien nicht singulär und mögen vier getrennte Schnittpunkte (und Tangenten) haben; deren Diagonaldreieck  $\Delta$  werde als Koordinatendreieck verwendet.<sup>2)</sup> Die Bezeichnungen lassen sich dann gegenüber (1) — (4) vereinfachen. Hat  $h$  die Gleichung  $\Sigma h_i x_i^2 = 0$  und  $\bar{h}$  die Gleichung  $\Sigma \bar{h}_i x_i^2 = 0$  oder  $\Sigma u_i^2 / \bar{h}_i = 0$ , so gibt es vier Kegelschnitte  $p$ , durch deren Polarität sich  $h$  und  $\bar{h}$  vertauschen, nämlich  $\Sigma \pm \sqrt{h_i \bar{h}_i} x_i^2 = 0$ . Nun werde  $x_i$  durch  $x_i / \sqrt[4]{h_i \bar{h}_i}$  ersetzt

<sup>2)</sup> Sind  $h$  und  $\bar{h}$  reell (einteilig oder nullteilig), so kann  $\Delta$  drei reelle Ecken und Seiten oder eine reelle Ecke und Seite haben.

und dafür wieder  $x_i$  geschrieben.<sup>3)</sup> Dann lauten die Gleichungen von  $p$ ,  $h$  und  $\bar{h}$

$$p(\Sigma \pm x_i^2 = 0), h(\Sigma h_i x_i^2 = 0), \bar{h}(\Sigma \bar{h}_i x_i^2 = 0) \quad \text{mit } h_i \bar{h}_i = 1. \quad (5)$$

Das gemeinsame Poldreieck  $\Delta$  von  $h$  und  $\bar{h}$  ist zugleich Poldreieck von  $a$  und  $b$ . Überdies vertauscht die Polarität an  $p$  auch  $a$  und  $b$ . Daher kann statt (1) hier einfacher

$$a(\Sigma a_i x_i^2 = 0), b(\Sigma b_i x_i^2 = 0) \quad \text{mit } a_i b_i = 1 \quad (6)$$

geschrieben werden. In (3) ist daher  $A_{22} = a_1 a_3$ ,  $B_{33} = b_1 b_2$ , ... zu setzen; wegen  $a_i b_i = 1$  ist dann  $\varrho h_1 = (a_2^2 + a_3^2) / a_2 a_3$ , ... Ersetzt man noch  $\varrho$  durch  $1/\lambda$ , so folgt

$$\lambda = \frac{h_1 a_2 a_3}{a_2^2 + a_3^2} = \frac{h_2 a_3 a_1}{a_3^2 + a_1^2} = \frac{h_3 a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}. \quad (7)$$

Durch Zusammenfassung der mittleren zwei Ausdrücke in (7) erhält man  $a_3^2 = (h_1 a_1 - h_2 a_2) a_1 a_2 / (h_2 a_1 - h_1 a_2)$ ; setzt man dies in die Gleichung ein, die sich aus den letzten zwei Ausdrücken in (7) ergibt, so ergibt sich eine kubische Gleichung für  $a_1 a_2 / (a_1^2 + a_2^2) = \lambda / h_3$ . Sie lautet

$$4\lambda^3 - (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)\lambda + h_1 h_2 h_3 = 0. \quad (8)$$

Diese Gleichung geht durch die Substitution

$$\lambda = \lambda_1 \sqrt{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) / 3}$$

in die Gleichung

$$4\lambda_1^3 - 3\lambda_1 + 3\sqrt{3} h_1 h_2 h_3 / \sqrt{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^3} = 0$$

über, die sich unmittelbar durch Vergleich mit der Formel für  $\cos 3\varphi$  lösen läßt. Setzt man

$$-3\sqrt{3} h_1 h_2 h_3 / \sqrt{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^3} = \cos 3\varphi, \quad (9)$$

so ist  $|\cos 3\varphi|$  bis auf Vielfache von  $360^\circ$ ,  $|\varphi|$  bis auf Vielfache von  $120^\circ$  bestimmt, und (8) hat die drei Wurzeln

<sup>3</sup> Reell ist das nur möglich, wenn die Radikanden  $h_i \bar{h}_i$  positiv sind, wenn also  $h$  und  $\bar{h}$  jede Seite von  $\Delta$  zugleich nach reellen oder nach konjugiert komplexen Punkten schneiden.

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}{3}} \cdot \cos(\varphi + n \cdot 120^\circ), \quad (n = 0, 1, 2). \quad (10)$$

Nach Voraussetzung ist  $h$  nicht singular, daher ist in (8) das absolute Glied  $\neq 0$ , also jede Wurzel  $\lambda \neq 0$ . In (7) eingesetzt, liefert jede Wurzel  $\lambda$  eine quadratische Gleichung für  $a_2 / a_3$ , eine für  $a_3 / a_1$ , eine für  $a_1 / a_2$ , mit den Lösungen

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{h_1 \pm \sqrt{h_1^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda}, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{h_2 \pm \sqrt{h_2^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda}, \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{h_3 \pm \sqrt{h_3^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda}. \quad (11)$$

Das Produkt der linken Seiten in (11) ist 1, daher sind die Vorzeichen der Wurzeln  $W_i = \sqrt{h_i^2 - 4\lambda^2}$  so zu kombinieren, daß auch das Produkt der rechten Seiten = 1 ist. Dieses Produkt ist = 1, wenn  $8\lambda^3 = (h_1 + \eta_1 W_1)(h_2 + \eta_2 W_2)(h_3 + \eta_3 W_3)$  zufolge (8) durch passende Wahl von  $\eta_i = \pm 1$  identisch erfüllt ist. Nun findet man, indem man  $\lambda^3$  und höhere Potenzen von  $\lambda$  nach (8) durch lineare Ausdrücke in  $\lambda$  ersetzt, daß  $W_1 W_2 = \bar{\eta}_3(h_1 h_2 - 2\lambda h_3)$  mit  $\bar{\eta}_3 = \pm 1$  ist, analog  $W_2 W_3$  und  $W_3 W_1$ . Daher ist  $8\lambda^3 = h_1 h_2 h_3 + [h_3 \eta_1 \eta_2 \bar{\eta}_3 (h_1 h_2 - 2\lambda h_3) + \dots] + [h_2 h_3 \eta_1 W_1 + \dots + \eta_1 \eta_2 \eta_3 W_1 W_2 W_3]$ , wobei die Punkte zyklisches Vorücken bedeuten. Man stellt leicht fest, daß der Ausdruck in der zweiten eckigen Klammer zufolge (8) identisch verschwindet. Das Übrige ist zufolge (8) identisch erfüllt, wenn  $\eta_2 \eta_3 \bar{\eta}_1 = \eta_3 \eta_1 \bar{\eta}_2 = \eta_1 \eta_2 \bar{\eta}_3 = -1$  ist. Daraus folgt  $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2 = \bar{\eta}_3 = -1$  und  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \pm 1$ . Daher sind in (11) die Wurzeln  $W_i$  zugleich mit positivem oder mit negativem Vorzeichen zu nehmen.

Die zwei Kegelschnitte, die sich für eine bestimmte Wurzel aus (11) ergeben, sind wegen  $[(h_i + W_i) / 2\lambda] \cdot [(h_i - W_i) / 2\lambda] = 1$  polar bezüglich  $p$ . Sie sind also ein Lösungspaar.

*Nun zu Realitätsfragen!* 1) Das gemeinsame Poldreieck  $\Delta$  von  $h$  und  $\bar{h}$  habe drei reelle Ecken (und Seiten). 2)  $h$  und  $\bar{h}$  seien reell (einteilig oder nullteilig). 3) Ferner mögen  $h$  und  $\bar{h}$  jede Seite von  $\Delta$  zugleich nach reellen oder nach konjugiert komplexen Punkten schneiden (Fußnote 3). In (9) ist dann  $|\cos 3\varphi| \leq 1$ , also  $\varphi$  reell; denn  $(\cos \varphi)^{2/3}$  ist nach (9) der Quotient aus dem geometrischen Mittel  $\sqrt[3]{h_1^2 h_2^2 h_3^2}$  und dem arithmetischen Mittel  $(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) / 3$  von  $h_1^2, h_2^2, h_3^2$  und ist demnach im allgemeinen  $< 1$ . Daher ist  $\varphi \neq 0^\circ$  und  $\neq 180^\circ$ , außer wenn  $h_1^2 = h_2^2 = h_3^2$  ist;

dieser Fall wird in 3.2. erörtert. Da  $\varphi$  reell ist, sind alle drei Wurzeln  $\lambda$  von (8) reell, daher sind auch die Radikanden in (11) reell.

Sollen für eine bestimmte Wurzel  $\lambda$  von (8) alle Radikanden in (11) positiv sein, so muß  $h_i^2 > 4\lambda^2$  sein, daher  $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 > > 12\lambda^2$ . Wegen (10) folgt daraus  $|\cos(\varphi + n \cdot 120^\circ)| < \frac{1}{2}$ . Da von den drei Winkeln  $\varphi + n \cdot 120^\circ$  genau einer zwischen  $60^\circ$  und  $120^\circ$  oder zwischen  $240^\circ$  und  $300^\circ$  liegt, sind die Radikanden in (11) für genau eine Wurzel  $\lambda$  positiv. Es gilt also

**Satz 1.** *Haben die nichtsingulären Kegelschnitte  $h$  und  $\bar{h}$  getrennte Schnittpunkte, so gibt es drei Kegelschnittpaare  $a, b$ , für die  $h$  die harmonische Kurve 2. Ordnung und  $\bar{h}$  die harmonische Kurve 2. Klasse ist. Man findet die Paare  $a, b$  durch Bestimmung des gemeinsamen Poldreiecks  $\Delta$  von  $h$  und  $\bar{h}$  und Auflösung der Gleichungen (8) (eine Winkeldreiteilung) und (11). Unter den Voraussetzungen 1), 2), 3) besteht genau ein Paar  $a, b$  aus reellen Kegelschnitten, in den anderen zwei Paaren sind  $a$  und  $b$  konjugiert komplex.*

**2.2. Einfache Berührung von  $h$  und  $\bar{h}$ .** Berühren  $a$  und  $b$  einander in einem Punkt  $U$  und haben sie in  $U$  die Tangente  $u$ , so werde das Koordinatensystem so gewählt, daß  $U(0,1,0)$  und  $u$  die Gerade  $x_3 = 0$  ist. Es vereinfacht und veranschaulicht die Formeln, wenn man durch  $x = x_1 / x_3, y = x_2 / x_3$  zu inhomogenen Koordinaten  $x, y$  übergeht, so daß man

$$a(2y = a_1x^2 + 2a_2x + a_3), b(2y = b_1x^2 + 2b_2x + b_3) \quad (12)$$

schreiben und  $a$  und  $b$  als Parabeln ansehen kann, die die Ferngerade  $u$  in  $U$  berühren. Dabei ist  $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ , da  $a$  bzw.  $b$  sonst singulär wäre. Im allgemeinen haben  $a$  und  $b$  noch zwei eigentliche Schnittpunkte  $P_1, P_2$  und zwei eigentliche gemeinsame Tangenten  $t_1, t_2$ . Die  $x$ -Achse sei irgend eine Gerade durch den Schnittpunkt von  $P_1P_2$  mit  $u$ , die  $y$ -Achse gehe durch  $U$  und den Schnitt von  $t_1$  und  $t_2$ . In (12) ist dann  $a_2 = b_2 = 0$ . Nach (1) — (4) lauten  $h$  und  $\bar{h}$  hier

$$h \left( 2y = \frac{2a_1b_1}{a_1 + b_1} x^2 + \frac{a_1a_3 + b_1b_3}{a_1 + b_1} \right), \bar{h} \left( 2y = \frac{a_1 + b_1}{2} x^2 + \frac{a_1b_3 + a_3b_1}{a_1 + b_1} \right). \quad (13)$$

Es ist  $a_1 + b_1 \neq 0$  vorauszusetzen; zum Fall  $a_1 + b_1 = 0$  siehe 3.3.

Nun seien umgekehrt  $h(2y = h_1x^2 + h_3)$  und  $\bar{h}(2y = \bar{h}_1x^2 + \bar{h}_3)$  gegeben. Wir setzen  $h_1 \neq \bar{h}_1$ ,  $h_3 \neq \bar{h}_3$  voraus; (zum Fall  $h_1 = \bar{h}_1$  siehe 3.1., zum Fall  $h_3 = \bar{h}_3$  siehe 2.3.). Durch Wahl des Ursprungs  $O$  auf der  $y$ -Achse kann man erreichen, daß  $h_3 + \bar{h}_3 = 0$  ist. Dann erhält man durch Koeffizientenvergleich mit (13) das Kegelschnittpaar  $a, b$

$$2y = [\bar{h}_1 \pm \sqrt{\bar{h}_1(\bar{h}_1 - h_1)}] x^2 \pm \sqrt{\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_1 - h_1}} \cdot h_3. \quad (14)$$

**Satz 2.** *Berühren die nichtsingulären Kegelschnitte  $h$  und  $\bar{h}$  einander in genau einem Punkt  $U$ , so kann man sie kollinear in Parabeln mit gemeinsamem Fernpunkt und zwei eigentlichen Schnittpunkten überführen. Es gibt dann genau ein Kegelschnittpaar  $a, b$ , für das  $h$  die harmonische Kurve 2. Ordnung und  $\bar{h}$  die harmonische Kurve 2. Klasse ist.  $a$  und  $b$  sind die Parabeln (14) mit dem Fernpunkt  $U$ ; sie entsprechen einander in den Polaritäten an den Parabeln  $p(2y = \pm \sqrt{h_1\bar{h}_1} \cdot x^2)$ . In diesen Polaritäten werden auch  $h$  und  $\bar{h}$  vertauscht.*

**2.3. Doppelte Berührung von  $h$  und  $\bar{h}$ .** Berühren  $a$  und  $b$  einander in zwei Punkten  $U, V$ , so kann man  $a$  und  $b$  wie in (12) ansetzen und  $V$  als Ursprung verwenden, so daß  $a_3 = b_3 = 0$  und nach (13) auch  $h_3 = \bar{h}_3 = 0$  ist. Aus  $h(2y = h_1x^2)$  und  $\bar{h}(2y = \bar{h}_1x^2)$  mit  $h_1 \neq \bar{h}_1$  ergibt sich nach (14) das Kegelschnittpaar, das man aus (14) für  $h_3 = 0$  erhält.

Sind  $U$  und  $V$  reell, so kann man  $a$  und  $b$  bzw.  $h$  und  $\bar{h}$  durch reelle Kollineation in zwei Parabeln, die einander im Fernpunkt  $U$  und in einem eigentlichen Punkt  $V$  berühren, überführen.

Sind  $U$  und  $V$  konjugiert komplex, so kann man  $a$  und  $b$  durch reelle Kollineation in zwei konzentrische Kreise überführen, etwa  $a(x^2 + y^2 = r_a^2)$  und  $b(x^2 + y^2 = r_b^2)$ . Aus (2) — (4) folgt  $h(x^2 + y^2 = r^2)$  und  $\bar{h}(x^2 + y^2 = \bar{r}^2)$  mit  $r^2 = 2r_a^2r_b^2 / (r_a^2 + r_b^2)$  und  $\bar{r}^2 = (r_a^2 + r_b^2) / 2$ . Durch Polarität an  $x^2 + y^2 = r_p^2$  (mit  $r_p^2 = r_a r_b = r\bar{r}$ ) vertauschen sich  $a$  und  $b$ , ebenso  $h$  und  $\bar{h}$ . Daher:

**Satz 3.** *Berühren die nichtsingulären Kegelschnitte  $h$  und  $\bar{h}$  einander in zwei Punkten  $U, V$ , so existiert genau ein Kegel-*

schnittpaar  $a, b$  mit  $h$  und  $\bar{h}$  als harmonischer Kurve 2. Ordnung bzw. 2. Klasse.  $a$  und  $b$  berühren  $h$  und  $\bar{h}$  in  $U$  und  $V$ . Je nachdem  $U$  und  $V$  reell oder konjugiert komplex sind, können  $h, \bar{h}, a, b$  durch reelle Kollineation in Parabeln, die einander im Fernpunkt und in einem eigentlichen Punkt berühren, oder in konzentrische Kreise übergeführt werden.<sup>4)</sup>

### 3. Fälle mit unendlich vielen Lösungen

3.1. Hyperoskulation von  $h$  und  $\bar{h}$ . Wenn  $a$  und  $b$ , gegeben durch (12), einander in  $U$  oskulieren, aber nicht hyperoskulieren, so sind in  $U$  drei Schnittpunkte und in  $u$  drei gemeinsame Tangenten von  $a$  und  $b$  vereinigt. Es existiert noch ein eigentlicher Schnittpunkt  $P$  und noch eine eigentliche gemeinsame Tangente  $t$ . Als  $y$ -Achse in (12) sei die Gerade  $g = UP$  gewählt; die  $x$ -Achse gehe durch den Schnittpunkt  $T$  von  $t$  mit  $u$ . In (12) ist dann  $a_1 = b_1, a_2 = -b_2, a_3 = b_3$ , so daß  $a$  und  $b$  jetzt  $2y = a_1x^2 \pm \pm 2a_2x + a_3$  lauten. Dabei sei  $a_2 \neq 0$ , denn für  $a_2 = 0$  wäre  $a \equiv b$ . Nach (1) — (4) ist

$$h\left(2y = a_1x^2 + \frac{a_1a_3 - 2a_2^2}{a_1}\right), \bar{h}\left(2y = a_1x^2 + \frac{a_1a_3 + a_2^2}{a_1}\right).$$

$h$  und  $\bar{h}$  sind kongruente Parabeln mit der gemeinsamen Achse  $x = 0$ , sie hyperoskulieren einander demnach in  $U$ . Um die Gleichungen zu vereinfachen, setzen wir  $a_2^2/a_1 = 4c$ . Wegen  $a_2 \neq 0$  ist  $c \neq 0$ ; wegen  $a_1 \neq 0$  ist  $c$  endlich. Wegen  $c \neq 0$  kann man ferner durch Verschiebung in  $y$ -Richtung erreichen, daß  $a_3 = 2c$  ist. Dann lauten  $h, \bar{h}$  und der Kegelschnitt  $p$ , dessen Polarität  $h$  mit  $\bar{h}$  und  $a$  mit  $b$  vertauscht,

$$h(2y = a_1x^2 - 6c), \bar{h}(2y = a_1x^2 + 6c), p(2y = a_1x^2). \quad (15)$$

Sind umgekehrt  $h$  und  $\bar{h}$  in der Form (15) gegeben, so erhält man daraus wegen  $a_2^2 = 4a_1c$  und  $a_3 = 2c$  das Kegelschnittpaar  $a, b$

$$2y = a_1x^2 \pm 4\sqrt{a_1c} \cdot x + 2c. \quad (16)$$

<sup>4</sup> Im zweiten Fall ist  $r^2$  das harmonische,  $\bar{r}^2$  das arithmetische,  $r_p^2$  das geometrische Mittel von  $r_a^2$  und  $r_b^2$ . Bei den Parabeln sind die Beziehungen zwischen den Koeffizienten von  $x^2$  analog.



$a$  und  $b$  schneiden einander in  $(o, c)$  und haben die gemeinsame Tangente  $y = -c$ .

Aus diesem Paar  $a, b$  erhält man weitere  $\infty^1$  Paare, indem man statt  $g$  eine andere durch  $U$  gehende Gerade  $g^1$  als  $y$ -Achse verwendet.  $g^1$  schneide  $h$  in  $H^1$ ,  $\bar{h}$  in  $\bar{H}^1$ ,  $p$  in  $P^1$ . Als  $x$ -Achse werde dann die Tangente von  $p$  in  $P^1$  verwendet. Dann ergibt sich ein anderes Paar  $a^1, b^1$ ; der eigentliche Schnittpunkt von  $a^1$  und  $b^1$  liegt auf  $g^1$ , die eigentliche gemeinsame Tangente von  $a^1$  und  $b^1$  schneidet die Tangente im Punkt  $P^1$  von  $p$  auf  $u$ . Aus dem Paar (16) geht  $a^1, b^1$  durch eine Kollineation hervor, die  $h, \bar{h}, p$  je in sich und  $g$  in  $g^1$  überführt. Daher:

**Satz 4.** *Wenn  $h$  und  $\bar{h}$  einander in  $U$  hyperoskulieren, gibt es  $\infty^1$  Kegelschnittpaare  $a, b$ , für die  $h$  die harmonische Kurve 2. Ordnung und  $\bar{h}$  die harmonische Kurve 2. Klasse ist.  $h, \bar{h}, p$  und alle Paare  $a, b$  lassen sich kollinear in kongruente Parabeln mit gemeinsamem Fernpunkt überführen. Aus dem Paar (16) entstehen die übrigen Paare durch die Gruppe der Kollineationen, die  $h$  und  $\bar{h}$  (und  $p$ ) in sich überführen.*

Diese Kollineationen lauten (mit beliebigem  $s$ )

$$x = x^1 + 2s, \quad y = 2a_1 s x^1 + y^1 + 2a_1 s^2. \quad (17)$$

3. 2. Der Fall  $h \equiv \bar{h}$ . Haben zwei Kegelschnitte  $a, b$  ein nicht-ausgeartetes Poldreieck  $\Delta$  gemein, und soll  $h$  mit  $\bar{h}$  identisch sein, so muß nach (5)  $h_1 = h_2 = h_3 = 1$  sein. (8) lautet dann  $4\lambda^3 - 3\lambda + 1 = 0$  und hat die Doppelwurzel  $1/2$  und die einfache Wurzel  $-1$ . Für  $\lambda = 1/2$  ergibt sich aus (11)  $a_1 = a_2 = a_3$ , also der triviale Fall  $a \equiv b \equiv h \equiv \bar{h}$ . Für  $\lambda = -1$  folgt

$$a(\varepsilon x_1^2 + \bar{\varepsilon} x_2^2 + x_3^2 = 0), \quad b(\bar{\varepsilon} x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2 = 0), \quad (18)$$

wo  $\varepsilon$  und  $\bar{\varepsilon}$  die beiden primitiven dritten Einheitswurzeln ( $-1 \pm \pm i\sqrt{3}$ )/2 bedeuten. Die nichtsinguläre Kollineation

$$x_1 = (\xi_1 + i\xi_2) / \sqrt{2}, \quad x_2 = (\xi_1 - i\xi_2) / \sqrt{2}, \quad x_3 = \xi_3$$

führt  $h \equiv \bar{h}$  (also  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ ) und  $a$  und  $b$  in die Kegelschnitte  $\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$  und  $\xi_1^2 \pm 2\sqrt{3}\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 - 2\xi_3^2 = 0$  über. Das sind, wenn man  $\xi_1 / \xi_3$  und  $\xi_2 / \xi_3$  als inhomogene kartesische Koordinaten deutet, drei kongruente gleichseitige

Hyperbeln, die denselben Mittelpunkt  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ,  $\xi_3 = 1$  besitzen und deren Hauptsachen paarweise den Winkel  $120^\circ$  einschließen. Daher gilt

**Satz 5.** *Ist  $h \equiv \bar{h}$ , so gibt es zu jedem der  $\infty^3$  nichtausgearteten Poldreiecke  $\Delta$  von  $h$  ein Kegelschnittpaar  $a, b$ , für das  $h \equiv \bar{h}$  harmonische Kurve 2. Ordnung und zugleich harmonische Kurve 2. Klasse ist.  $a, b$  und  $h \equiv \bar{h}$  haben das gemeinsame Poldreieck  $\Delta$ . Sie lassen sich durch Kollineation in drei konzentrische gleichseitige Hyperbeln überführen, deren reelle Scheitel ein regelmäßiges Sechseck bilden. Die Kollineation ist komplex, wenn  $\Delta$  drei reelle Ecken hat; sie ist reell, wenn  $\Delta$  eine reelle Ecke und zwei konjugiert komplexe Ecken hat.<sup>5)</sup>*

$h$  und  $\bar{h}$  können aber auch identisch sein, ohne daß  $a, b$  und  $h \equiv \bar{h}$  ein nichtausgeartetes Poldreieck  $\Delta$  gemein haben. Die in 3.1. verwendete Normierung ( $y$ -Achse = Gerade  $g = UP$ ) versagt, wenn  $P = U$  ist, wenn also  $h$  und  $\bar{h}$  einander in  $U$  hyperoskulieren. Aus (13) findet man: Aus der Berührung von  $a$  und  $b$  folgt  $h = \bar{h}$ , wenn  $a_1 = b_1$  ist; dann hyperoskulieren  $a(2y = a_1x^2 + a_3)$  und  $b(2y = a_1x^2 + b_3)$  einander, und  $h$  und  $\bar{h}$  sind ein und derselbe Kegelschnitt  $2y = a_1x^2 + (a_3 + b_3) / 2$ , der „mitten zwischen  $a$  und  $b$ “ verläuft. Daher gilt

**Satz 6.** *Ist  $h \equiv \bar{h}$ , so gibt es außer den  $\infty^3$  Paaren  $a, b$  von Satz 5. noch andere  $\infty^2$  Paare  $a, b$ . Jedes solche Paar  $a, b$  besteht hier aus zwei Kegelschnitten, die  $h \equiv \bar{h}$  in einem gewählten Punkt  $U$  hyperoskulieren, wobei für die zweiten Schnittpunkte  $A, B, H$  von  $a, b, h$  mit jeder Geraden durch  $U$  gilt:  $(ABHU) = -1$ .*

3.3. Singuläre Kurven  $h$  und  $\bar{h}$ . Bisher wurde vorausgesetzt, daß  $h$  und  $\bar{h}$  nicht singulär seien. Aus (2) — (4) läßt sich schließen, daß  $h$  und  $\bar{h}$  zugleich regulär oder zugleich singulär sind. Besteht  $h$  aus zwei Geraden  $h^I, h^{II}$  durch  $O(0, 0, 1)$ ,  $\bar{h}$  aus zwei Strahlbüscheln, deren Träger  $\bar{H}', \bar{H}''$  auf  $x_3 = 0$  liegen, so kann man  $h$  und  $\bar{h}$  in der Form

<sup>5)</sup> Je zwei dieser Hyperbeln spannen ein Büschel und eine Schar auf. Im Büschel und in der Schar sind sie die äquianharmonischen Kegelschnitte. Die dritte Hyperbel ist die Kombinate des Büschels bzw. der Schar.

$$h(h_1 x_1^2 + h_2 x_2^2 = 0), \bar{h}\left(\frac{u_1^2}{\bar{h}_1} + \frac{u_2^2}{\bar{h}_2} = 0\right) \quad (19)$$

schreiben, indem man als Koordinatenachsen jene Geraden verwendet, die harmonisch zu  $h^I, h^{II}$  und zu  $O\bar{H}', O\bar{H}''$  liegen. Aus (2) — (4) folgt dann mit den Bezeichnungen von (6) in 2.1., daß  $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$  ist. Man kann  $b_1 = a_1, b_2 = -a_2$  setzen. Dann folgt weiter aus (2) — (4), daß  $a_3 : b_3 = (h_2 a_1 + h_1 a_2) : (h_2 a_1 - h_1 a_2) = (\bar{h}_1 a_2 - \bar{h}_2 a_1) : (\bar{h}_1 a_2 + \bar{h}_2 a_1)$  sein muß. Daraus ergeben sich  $\infty^1$  Kegelschnittpaare  $a, b$ , nämlich (mit beliebigem  $\mu$ )

$$\pm W x_1^2 + x_2^2 + \mu(h_1 \pm W h_2) x_3^2 = 0, W = \sqrt{-h_1 \bar{h}_1 / h_2 \bar{h}_2}. \quad (20)$$

*Satz 7. Sind  $h$  und  $\bar{h}$  (einfach) singular, so gibt es die  $\infty^1$  Kegelschnittpaare (20), für die  $h$  bzw.  $\bar{h}$  die harmonische Kurve 2. Ordnung bzw. Klasse ist. Diese Paare entsprechen einander in den perspektiven Kollineationen mit dem Zentrum  $(0,0,1)$  und der Achse  $x_3 = 0$ . Für reelles  $\mu$  sind  $a$  und  $b$  reell (einteilig oder nullteilig), wenn  $h$  und  $\bar{h}$  reell, aber nicht beide einteilig oder beide nullteilig sind (denn in (20) ist  $W$  reell, wenn  $h_1 h_2$  und  $\bar{h}_1 \bar{h}_2$  verschiedene Vorzeichen haben).*