BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1968

MÜNCHEN 1969

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Berechnung einer Gewichtskoeffizientenmatrix für die Zwecke der europäischen Satellitentriangulation

Von **Martha Näbauer**, München

Vorgelegt am 6. Dezember 1968

Mit 5 Figuren

Bei einer Satellitentriangulation wird die Richtung von der Bodenstation zum Satelliten auf photogrammetrischem Wege bestimmt. Aus den Plattenkoordinaten des Satellitenbildpunktes und aus der bekannten Kammerorientierung berechnet man die Koordinaten des Bildpunktes im Äquatorsystem und daraus dann die Richtung zum Satelliten selbst. Es erweist sich als vorteilhaft diese Richtung durch ihren Stundenwinkel t und ihre Deklination δ festzulegen und diese beiden Größen als Beobachtungen in die Triangulationsausgleichung einzuführen. Man braucht dann für die Ausgleichung natürlich auch die Gewichtskoeffizientenmatrix $\mathbf{Q}_{t,\delta}$ dieser Beobachtungen und bei deren Berechnung hat man zu berücksichtigen, daß nicht nur die Plattenkoordinaten, sondern auch die Parameter der Kammerorientierung, die ihrerseits aus einer Kalibrierungsausgleichung hervorgegangen sind, stochastische Variable darstellen.

In der Praxis tritt noch eine Erweiterung dieses Problems auf. Denn in Wirklichkeit hat man pro Platte nicht nur einen Satellitenbildpunkt, sondern die Bildspur des Satelliten wird durch einen rotierenden Verschluß in einzelne Punkte zerhackt, deren jeder der Bildpunkt einer anderen Satellitenposition ist. Bei der Plattenauswertung werden die Richtungen zu diesen sämtlichen Satellitenpositionen berechnet und sie alle werden in die Triangulationsausgleichung einbezogen, in dem man ihre t und δ dort als Beobachtungen einführt. Es sind aber diese t und δ ein und derselben Platte sämtlich miteinander korreliert, denn in sie alle gehen die Fehler in der Orientierung bzw. Kalibrierung dieser Platte ein. Deshalb benötigt man für eine fehlertheoretisch einwandfreie Ausgleichung die Gewichtskoeffizientenmatrix des Gesamtsystems der t und δ dieser Platte. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man diese Matrix berechnet.

Dazu müssen wir erst einige Definitionen und eine übersichtliche Zusammenstellung der Bezeichnungsweise geben.

Sowohl das Äquatorsystem als auch das Kammersystem sind rechtwinkelig-kartesische Rechtssysteme, deren Ursprung im Projektionszentrum liegt.

Äquatorsystem x, y, z:

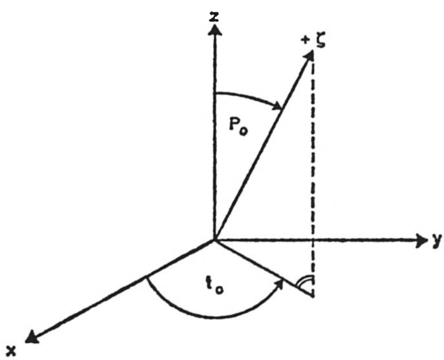
$+z$-Achse in Richtung der Rotationsachse der Erde, $+x$-Achse parallel zur Meridianebene von Greenwich.

(1)

Kammersystem ξ, η, ζ:

Die $+\zeta$-Achse ist die Kammerachse in Richtung vom Beobachter zum Satelliten, ξ- und η-Achse sind parallel zur Platte.

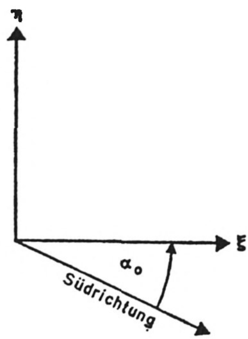
$$
\begin{aligned}
t_0 &= \text{Stundenwinkel[1] der } \zeta\text{-Achse; } 0 \leqq t_0 < 2\pi \\
p_0 &= \text{Polabstand der } \zeta\text{-Achse; } 0 \leqq p_0 \leqq \pi \qquad (2)\\
&\quad \text{(siehe Figur 1)}
\end{aligned}
$$



Figur 1

[1] Stundenwinkel in bezug auf den Meridian von Greenwich, aber entgegen der üblichen astronomischen Vorzeichenfestsetzung positiv nach Ost um in Übereinstimmung mit dem positiven Drehsinn der x, y-Ebene zu bleiben. Man bezeichnet den in diesem Sinne gemessenen Stundenwinkel einer Richtung auch als ihre Länge λ.

α_0 = Winkel zwischen der Südrichtung der Platte und der $+\xi$-Achse (positiv gezählt im positiven Drehsinn der ξ, η-Ebene, siehe Figur 2). (3)



Figur 2

c = Kammerkonstante; $c > 0$.

u, v, w = Koordinaten des Bildpunktes des Satelliten im Äquatorsystem (4)

$\xi, \eta, -c$ = Koordinaten des Bildpunktes des Satelliten im Kammersystem

λ = Entfernung des Bildpunktes des Satelliten vom Projektionszentrum;

$$\lambda^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \xi^2 + \eta^2 + c^2 \qquad (5)$$

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Drehmatrix oder Orientierungsmatrix, d.h. Transformationsmatrix zwischen den beiden Systemen (1). Die letzte Spalte gibt die Richtungskosinusse der ζ-Achse im Äquatorsystem. (6)

Aus (6) und (4) folgt

$$\begin{aligned} u &= \xi\alpha_1 + \eta\alpha_2 - c\alpha_3 \\ v &= \xi\beta_1 + \eta\beta_2 - c\beta_3 \\ w &= \xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 - c\gamma_3 . \end{aligned} \tag{7}$$

Man findet unmittelbar anschaulich

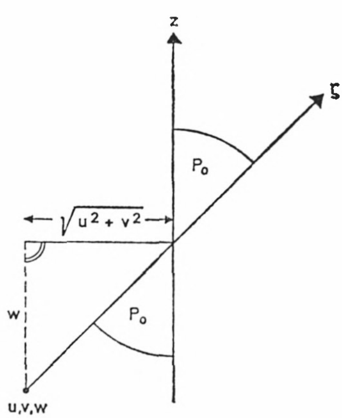
$$\begin{aligned} &\cos p_0 = \gamma_3, && \sin p_0 = \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2} \geqq 0, \\ &\cos t_0 = \frac{\alpha_3}{\sin p_0} = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}}, && \sin t_0 = \frac{\beta_3}{\sin p_0} = \frac{\beta_3}{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}}. \end{aligned} \tag{8}$$

$\alpha, \beta, \gamma =$ Richtungskosinusse zum Satelliten (und seinem Bildpunkt u, v, w) im Äquatorsystem (9)

$t, p =$ Stundenwinkel und Polabstand der Richtung zum Satelliten $\quad 0 \leqq t < 2\pi, \quad 0 \leqq p \leqq \pi.$ (10)

Es ist

$$\operatorname{tg} t = \frac{v}{u}, \qquad \operatorname{tg} p = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{-w} \tag{11}$$



Figur 3

($-w$, denn der Satellit und sein Bild liegen auf verschiedenen Seiten des Projektionszentrums).

Weil α, β, γ den Einheitsvektor der Richtung zum Satelliten gibt, gilt

$$-u = \lambda\alpha, \qquad -v = \lambda\beta, \qquad -w = \lambda\gamma. \tag{12}$$

Wir wollen zunächst die Gewichtskoeffizientenmatrix e i n e s Paares t, p bestimmen. Hierzu müssen wir die Differentiale dt und dp als lineare Funktionen der Differentiale eines Größensystems ausdrücken, dessen Gewichtskoeffizientenmatrix wir kennen. Ein solches System bilden die aus der Plattenauswertung hervorgegangenen Größen

$$\xi', \eta', t_0, p_0, \alpha_0, c, \xi_0, \eta_0, a, b \tag{13}$$

(wegen der Bedeutung von ξ', η', ξ_0, η_0, a, b siehe (20) mit zugehörigem Text und Figur 5). Wir werden t und p deshalb jetzt nach den Differentialen dieser Größen entwickeln.

Nun hängen nach (11) t und p von u, v, w ab; dt und dp lassen sich also zunächst als lineare Funktionen von du, dv, dw darstellen, für die man aus (7), wo alle auf der rechten Seite vorkommenden Größen als stochastische Variable zu betrachten sind, findet

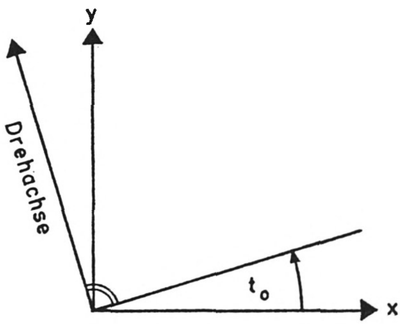
$$\begin{aligned} du &= \alpha_1\, d\xi + \alpha_2\, d\eta - \alpha_3\, dc + d_r u \\ dv &= \beta_1\, d\xi + \beta_2\, d\eta - \beta_3\, dc + d_r v \\ dw &= \gamma_1\, d\xi + \gamma_2\, d\eta - \gamma_3\, dc + d_r w. \end{aligned} \tag{14}$$

$d_r u$, $d_r v$, $d_r w$ bedeuten dabei die Änderungen, die u, v, w erfahren, wenn die 9 Größen $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ sich um kleine Beträge ändern, d. h. wenn die Lage des Kammersystems zu dem als fest angenommenen Äquatorsystem durch eine differentielle Drehung geändert wird. Da sich die 9 Größen $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ durch die 3 Größen t_0, p_0, α_0 ausdrücken lassen, kann man setzen

$$\begin{aligned} d_r u &= \frac{\partial u}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial u}{\partial p_0} dp_0 + \frac{\partial u}{\partial \alpha_0} d\alpha_0 \\ d_r v &= \frac{\partial v}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial v}{\partial p_0} dp_0 + \frac{\partial v}{\partial \alpha_0} d\alpha_0 \\ d_r w &= \frac{\partial w}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial w}{\partial p_0} dp_0 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_0} d\alpha_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Die hier vorkommenden partiellen Ableitungen findet man am einfachsten durch eine geometrische Überlegung. Die Änderung des Winkels t_0 um dt_0 bedeutet eine Drehung um die z-Achse um den Winkel dt_0. Der Einheitsvektor der Drehachse hat die Komponenten $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ und für die Koordinatenänderungen des Punktes u, v, w gilt daher

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t_0} \\ \dfrac{\partial v}{d t_0} \\ \dfrac{d w}{d t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ +u \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (16)^1$$



Figur 4

Bei einer Änderung von p_0 liegt die Drehachse in der x, y-Ebene und schließt mit der $+x$-Achse den Winkel $t_0 + \frac{\pi}{2}$ ein (Figur 4). Der Einheitsvektor der Drehachse hat die Komponenten $x = -\sin t_0$, $y = +\cos t_0$, $z = 0$ und man findet

---

[1] Das Zeichen $\times$ zwischen zwei Vektoren bedeutet die Bildung des vektoriellen Produktes.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial v}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial w}{\partial p_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ +\cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +w \cos t_0 \\ +w \sin t_0 \\ -u \cos t_0 - v \sin t_0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Bei einer Änderung von α_0 wird um die $+\zeta$-Achse gedreht. Der Einheitsvektor der Drehachse hat die Komponenten $x = \sin p_0 \cos t_0$, $y = \sin p_0 \sin t_0$, $z = \cos p_0$ und man erhält

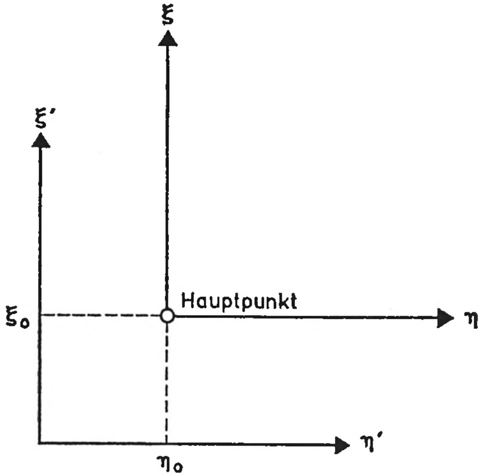
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha_0} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \alpha_0} \\ \dfrac{\partial w}{\partial \alpha_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin p_0 \cos t_0 \\ \sin p_0 \sin t_0 \\ \cos p_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \cos p_0 + w \sin p_0 \sin t_0 \\ +u \cos p_0 - w \sin p_0 \cos t_0 \\ \sin p_0 (-u \sin t_0 + v \cos t_0) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

(16), (17) und (18) in (15) eingesetzt gibt

$$\begin{aligned} d_r u &= -v\, dt_0 + w \cos t_0\, dp_0 + (-v \cos p_0 + \\ &\quad + w \sin p_0 \sin t_0)\, d\alpha_0 \\ d_r v &= +u\, dt_0 + w \sin t_0\, dp_0 + (+u \cos p_0 - \\ &\quad - w \sin p_0 \cos t_0)\, d\alpha_0 \\ d_r w &= 0 + (-u \cos t_0 - v \sin t_0)\, dp_0 + \\ &\quad + \sin p_0 (-u \sin t_0 + v \cos t_0)\, d\alpha_0 . \end{aligned} \tag{19}$$

Als nächstes bringen wir die in (14) auftretenden Differentiale $d\xi$, $d\eta$ in eine für unsere Zwecke geeignete Form. Aus den gemessenen Plattenkoordinaten ξ', η' werden Werte ξ, η berechnet nach den Formeln

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' - \xi_0 + a\xi(\xi^2 + \eta^2) + b\xi(\xi^2 + \eta^2)^2 \\ \eta &= \eta' - \eta_0 + a\eta(\xi^2 + \eta^2) + b\eta(\xi^2 + \eta^2)^2. \end{aligned} \tag{20}$$



Figur 5

Dabei sind ξ_0, η_0 die Koordinaten des Hauptpunktes im Meßsystem (Fig. 5), a, b sind die Koeffizienten des Verzeichnungspolynoms und so dimensioniert, daß die Glieder mit a und b in (20) sich in μ ergeben, wenn man ξ und η in cm angibt. Deshalb dürfen bei dem jetzt folgenden Übergang zu den Differentialen ξ und η als konstant betrachtet werden.

Aus (20) folgt

$$\begin{aligned} d\xi &= d\xi' - d\xi_0 + \xi(\xi^2 + \eta^2)\,da + \xi(\xi^2 + \eta^2)^2\,db \\ d\eta &= d\eta' - d\eta_0 + \eta(\xi^2 + \eta^2)\,da + \eta(\xi^2 + \eta^2)^2\,db. \end{aligned} \tag{21}$$

(21) und (19) in (14) eingesetzt gibt

$$\begin{aligned} du = {} & \alpha_1(d\xi' - d\xi_0) + \alpha_2(d\eta' - d\eta_0) - \alpha_3\,dc + \\ & + (\xi^2 + \eta^2)(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta)\,[da + (\xi^2 + \eta^2)\,db] - \\ & - v\,dt_0 + w\cos t_0\,dp_0 + \\ & + (-v\cos p_0 + w\sin p_0\sin t_0)\,d\alpha_0 \\ dv = {} & \beta_1(d\xi' - d\xi_0) + \beta_2(d\eta' - d\eta_0) - \beta_3\,dc + \\ & + (\xi^2 + \eta^2)(\beta_1\xi + \beta_2\eta)\,[da + (\xi^2 + \eta^2)\,db] + \\ & + u\,dt_0 + w\sin t_0\,dp_0 + \\ & + (u\cos p_0 - w\sin p_0\cos t_0)\,d\alpha_0 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} dw = {} & \gamma_1(d\xi' - d\xi_0) + \gamma_2(d\eta' - d\eta_0) - \gamma_3\, dc + \\ & + (\xi^2 + \eta^2)(\gamma_1\xi + \gamma_2\eta)\,[da + (\xi^2 + \eta^2)\, db] + \\ & + 0 + (-u \cos t_0 - v \sin t_0)\, dp_0 + \\ & + \sin p_0(-u \sin t_0 + v \cos t_0)\, d\alpha_0. \end{aligned}$$

Um nun zu den Differentialen dt und dp selbst zu kommen, schreiben wir nach (11)

$$t = \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u} \qquad p = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{-w}. \tag{23}$$

Differenzieren der ersten Gleichung (23) gibt

$$dt = \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} \cdot d\frac{v}{u} = \frac{u^2}{u^2 + v^2} \cdot \frac{u\,dv - v\,du}{u^2} = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2}. \tag{24}$$

Setzt man für den Augenblick

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \varrho, \qquad d\varrho = \frac{u\,du + v\,dv}{\varrho}, \tag{25}$$

so erhält man aus der zweiten Gleichung (23)

$$\begin{aligned} -dp &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\varrho}{w}\right)^2} \cdot d\frac{\varrho}{w} = \frac{uw\,du + vw\,dv - \varrho^2\,dw}{\varrho(\varrho^2 + w^2)} = \\ &= \frac{uw\,du + vw\,dv - (u^2 + v^2)\,dw}{\sqrt{u^2 + v^2}\,(u^2 + v^2 + w^2)}. \end{aligned} \tag{26}$$

u, v, w selbst kennen wir nicht, sondern was wir von der Plattenauswertung her unmittelbar kennen, sind die Richtungskosinusse α, β, γ. Wir wollen deshalb jetzt nach (12) α, β, γ in dt und dp einführen und erhalten aus (24) und (26)

$$dt = \frac{\beta\,du - \alpha\,dv}{\lambda(\alpha^2 + \beta^2)} \tag{27}$$

$$-dp = \frac{\alpha\gamma\,du + \beta\gamma\,dv - (\alpha^2 + \beta^2)\,dw}{\lambda\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \tag{28}$$

In (27) und (28) setzen wir die Ausdrücke (22) für du, dv, dw ein und erhalten, wieder unter Beachtung von (12),

$$\begin{aligned} dt = {} & \frac{1}{\lambda(\alpha^2+\beta^2)}\{(\beta\alpha_1-\alpha\beta_1)(d\xi'-d\xi_0)+(\beta\alpha_2-\alpha\beta_2)(d\eta'-d\eta_0)+(-\beta\alpha_3+\alpha\beta_3)\,dc\,+ \\ & + (\xi^2+\eta^2)[(\beta\alpha_1-\alpha\beta_1)\,\xi+(\beta\alpha_2-\alpha\beta_2)\,\eta]\,[da+(\xi^2+\eta^2)\,db]\}\,+ \\ & + \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\{(\alpha^2+\beta^2)\,dt_0+\underbrace{(-\beta\gamma\cos t_0+\alpha\gamma\sin t_0)}_{\text{A}}\,dp_0+\underbrace{[(\alpha^2+\beta^2)\cos p_0-(\beta\gamma\sin t_0+\alpha\gamma\cos t_0)\sin p_0]}_{\text{B}}\,d\alpha_0\} \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} -dp = {} & \frac{1}{\lambda\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\{[\gamma(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)-\gamma_1(\alpha^2+\beta^2)]\,(d\xi'-d\xi_0)+[\gamma(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)-\gamma_2(\alpha^2+\beta^2)]\,(d\eta'-d\eta_0)\,+ \\ & + [\gamma(-\alpha\alpha_3-\beta\beta_3)+\gamma_3(\alpha^2+\beta^2)]\,dc\,+ \\ & + (\xi^2+\eta^2)\,[\{\gamma\,(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)-\gamma_1\,(\alpha^2+\beta^2)\}\,\xi+\{\gamma(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)-\gamma_2(\alpha^2+\beta^2\}\,\eta]\,[da+(\xi^2+\eta^2)\,db]\}\,+ \\ & + \frac{-1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\{0\,dt_0+\overbrace{[\gamma^2(\alpha\cos t_0+\beta\sin t_0)+(\alpha^2+\beta^2)\,(\alpha\cos t_0+\beta\sin t_0)]}^{\text{C}}\,dp_0\,+ \\ & + \underbrace{[(-\alpha\gamma\beta+\beta\gamma\alpha)\cos p_0+\gamma^2\sin p_0(\alpha\sin t_0-\beta\cos t_0)+(\alpha^2+\beta^2)\sin p_0(\alpha\sin t_0-\beta\cos t_0)]}_{\text{D}}\,d\alpha_0\}. \end{aligned} \tag{30}$$

Mit (8) kann man die Ausdrücke A, B, C, D noch umformen in

$$\begin{aligned} &\text{A} = \frac{\gamma(\alpha\beta_3-\beta\alpha_3)}{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}}, && \text{B} = (\alpha^2+\beta^2)\,\gamma_3-\gamma\,(\alpha\alpha_3+\beta\beta_3), \\ &\text{C} = \alpha\cos t_0+\beta\sin t_0 = \frac{\alpha\alpha_3+\beta\beta_3}{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}} && \text{D} = (\alpha\sin t_0-\beta\cos t_0)\sin p_0 = \alpha\beta_3-\beta\alpha_3. \end{aligned} \tag{31}$$

Bisher haben wir mit dem Polabstand p gearbeitet, weil das einige Vereinfachungen brachte. Jetzt gehen wir zur Deklination δ über. Sie wird vom Äquator aus positiv nach Norden, negativ nach Süden gezählt, so daß immer gilt

$$p+\delta = \frac{\pi}{2}, \quad dp = -d\delta, \quad p_0+\delta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad dp_0 = -d\delta_0. \tag{32}$$

Unter Beachtung hievon schreiben wir (29) und (30) um in

$$dt = t_{\xi'}\, d\xi' + t_{\eta'}\, d\eta' + t_{\xi_0}\, d\xi_0 + t_{\eta_0}\, d\eta_0 + t_c\, dc + t_a\, da + t_b\, db + t_{t_0}\, dt_0 + t_{\delta_0}\, d\delta_0 + t_{\alpha_0}\, d\alpha_0 \tag{33}$$

mit

$$\begin{aligned}
t_{\xi'} &= \frac{\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1}{\lambda(\alpha^2+\beta^2)} & t_a &= (\xi^2+\eta^2)\,(t_{\xi'}\,\xi + t_{\eta'}\,\eta) \\
t_{\eta'} &= \frac{\beta\alpha_2 - \alpha\beta_2}{\lambda(\alpha^2+\beta^2)} & t_b &= (\xi^2+\eta^2)\,t_a \\
t_{\xi_0} &= -t_{\xi'} & t_{t_0} &= 1 \\
t_{\eta_0} &= -t_{\eta'} & t_{\delta_0} &= \frac{\gamma(\beta\alpha_3 - \alpha\beta_3)}{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}} \\
t_c &= \frac{-\beta\alpha_3 + \alpha\beta_3}{\lambda(\alpha^2+\beta^2)} & t_{\alpha_0} &= \gamma_3 - \frac{\gamma(\alpha\alpha_3+\beta\beta_3)}{\alpha^2+\beta^2}\,,
\end{aligned} \tag{34}$$

$$d\delta = \delta_{\xi'}\, d\xi' + \delta_{\eta'}\, d\eta' + \delta_{\xi_0}\, d\xi_0 + \delta_{\eta_0}\, d\eta_0 + \delta_0\, dc + \delta_a\, da + \delta_b\, db + \delta_{t_0}\, dt_0 + \delta_{\delta_0}\, d\delta_0 + \delta_{\alpha_0}\, d\alpha_0 \tag{35}$$

mit

$$\begin{aligned}
\delta_{\xi'} &= \frac{-\gamma_1(\alpha^2+\beta^2) + \gamma(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)}{\lambda\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \delta_a &= (\xi^2+\eta^2)\,(\delta_{\xi'}\,\xi + \delta_{\eta'}\,\eta) \\
\delta_{\eta'} &= \frac{-\gamma_2(\alpha^2+\beta^2) + \gamma(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)}{\lambda\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \delta_b &= (\xi^2+\eta^2)\,\delta_a \\
\delta_{\xi_0} &= -\delta_{\xi'} & \delta_{t_0} &= 0 \\
\delta_{\eta_0} &= -\delta_{\eta'} & \delta_{\delta_0} &= \frac{\alpha\alpha_3+\beta\beta_3}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}} \\
\delta_c &= \frac{-\gamma(\alpha\alpha_3+\beta\beta_3) + \gamma_3(\alpha^2+\beta^2)}{\lambda\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \delta_{\alpha_0} &= \frac{-\alpha\beta_3+\beta\alpha_3}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,.
\end{aligned} \tag{36}$$

Zusatz: Die Ausdrücke für die Koeffizienten (34) und (36) lassen sich über innere und äußere Produkte geometrisch deuten, ja man kann sie sogar auf rein geometrisch anschaulichem Wege herleiten.

Um nun zur Gewichtskoeffizientenmatrix von t und δ zu kommen, fassen wir sowohl die Differentiale als auch ihre Koeffizienten in (33) und (35) zu Vektoren zusammen, so wie das nachstehend angegeben ist

$$\underset{\text{Meßwerte}}{(d\xi', d\eta')} = \underset{1,2}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}}, \quad \underset{\substack{\text{Elemente der Kammerorientierung}\\ \text{Anzahl } \mu;\ \text{hier } \mu = 8}}{(d\xi_0, d\eta_0, dc, da, db, dt_0, d\delta_0, d\alpha_0)} = \underset{1,\mu}{\mathbf{y}^{\mathrm{T}}}, \tag{37}$$[1]

$$\begin{aligned} (t_{\xi'}, t_{\eta'}) &= \underset{1,2}{\mathbf{t}_x^{\mathrm{T}}}, \quad (t_{\xi_0}, t_{\eta_0}, t_c, t_a, t_b, t_{t_0}, t_{\delta_0}, t_{\alpha_0}) = \underset{1,\mu}{\mathbf{t}_y^{\mathrm{T}}}, \\ (\delta_{\xi'}, \delta_{\eta'}) &= \underset{1,2}{\mathbf{d}_x^{\mathrm{T}}}, \quad (\delta_{\xi_0}, \delta_{\eta_0}, \delta_c, \delta_a, \delta_b, \delta_{t_0}, \delta_{\delta_0}, \delta_{\alpha_0}) = \underset{1,\mu}{\mathbf{d}_y^{\mathrm{T}}}. \end{aligned} \tag{38}$$

(33) und (35) nehmen damit folgende Gestalt an

$$dt = \left(\underset{1,2}{\mathbf{t}_x^{\mathrm{T}}}, \underset{1,\mu}{\mathbf{t}_y^{\mathrm{T}}}\right) \begin{pmatrix} \underset{2,1}{\mathbf{x}} \\ \underset{\mu,1}{\mathbf{y}} \end{pmatrix}, \qquad d\delta = \left(\underset{1,2}{\mathbf{d}_x^{\mathrm{T}}}, \underset{1,\mu}{\mathbf{d}_y^{\mathrm{T}}}\right) \begin{pmatrix} \underset{2,1}{\mathbf{x}} \\ \underset{\mu,1}{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \tag{39}$$

und wenn man jetzt noch dt und $d\delta$ zu einem Vektor zusammennimmt, lassen sie sich in der einen Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} dt \\ d\delta \end{pmatrix} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \begin{pmatrix} \underset{2,1}{\mathbf{x}} \\ \underset{\mu,1}{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \tag{40}$$

zusammenfassen, wobei **X** und **Y** folgende Bedeutung haben

$$\underset{2,2}{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_x^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{d}_x^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \qquad \underset{2,\mu}{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_y^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{d}_y^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Die Gewichtskoeffizientenmatrix des Paares ξ', η' sei $\underset{2,2}{\overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}}}$.
Die Gewichtskoeffizientenmatrix
der μ Parameter der Kammerorientierung sei $\underset{\mu,\mu}{\overline{\mathbf{y}, \mathbf{y}}}$. (42)

$\overline{\mathbf{y}, \mathbf{y}}$ ist einfach die Inverse der Koeffizientenmatrix der Normalgleichungen der Kammerkalibrierung.

---

[1] Fette kleine Buchstaben bedeuten Vektoren, fette große Buchstaben (mehrreihige) Matrizen. Ein hochgestelltes T bedeutet die Transponierte.

Die beiden Größensysteme werden als unkorreliert vorausgesetzt.

Dann lautet die Gewichtskoeffizientenmatrix des Gesamtsystems $\mathbf{x}, \mathbf{y}$

$$\underset{\substack{2+\mu \\ 2+\mu}}{\mathbf{Q}_G} = \begin{pmatrix} \underset{2,\,2}{\overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}}} & \underset{2,\,\mu}{\mathbf{0}} \\ \underset{\mu,\,2}{\mathbf{0}} & \underset{\mu,\,\mu}{\overline{\mathbf{y}, \mathbf{y}}} \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Für die gesuchte Gewichtskoeffizientenmatrix von t und δ

$$\underset{2,\,2}{\mathbf{Q}_{t,\,\delta}} = \begin{pmatrix} \overline{t,\ t} & \overline{t,\ \delta} \\ \overline{\delta,\ t} & \overline{\delta,\ \delta} \end{pmatrix} \qquad (44)[1]$$

bekommen wir wegen (40)

$$\underset{2,\,2}{\mathbf{Q}_{t,\,\delta}} = \begin{pmatrix} \underset{2,\,2}{\mathbf{X}}, & \underset{2.\,\mu}{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} \underset{\substack{2+\mu \\ 2+\mu}}{\mathbf{Q}_G} \begin{pmatrix} \underset{2,\,2}{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}} \\ \underset{\mu,\,2}{\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}} \end{pmatrix}, \tag{45}$$

was man mit (43) noch folgendermaßen aufspalten kann

$$\begin{aligned} \underset{2,\,2}{\mathbf{Q}_{t,\,\delta}} &= \begin{pmatrix} \underset{2,\,2}{\mathbf{X}}, & \underset{2,\,\mu}{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{2,\,2}{\overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}}} & \underset{2,\,\mu}{\mathbf{0}} \\ \underset{\mu,\,2}{\mathbf{0}} & \underset{\mu,\,\mu}{\overline{\mathbf{y}, \mathbf{y}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{2,\,2}{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}} \\ \underset{\mu,\,2}{\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{X} \underset{2,\,2}{(\overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}})}, & \mathbf{Y} \underset{2,\,\mu}{(\overline{\mathbf{y}, \mathbf{y}})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{2,\,2}{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}} \\ \underset{\mu,\,2}{\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}} \end{pmatrix} = \mathbf{X} (\overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}})\, \mathbf{X}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Y} (\overline{\mathbf{y}, \mathbf{y}})\, \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{46}$$

Zu jeder Satellitenposition einer Platte gehört eine solche Matrix $\mathbf{Q}_{t,\,\delta}$; handelt es sich um die i-te Satellitenposition, so wollen wir dafür schreiben

$$\mathbf{Q}_{t_i,\,\delta_i} = \begin{pmatrix} \overline{t_i,\ t_i} & \overline{t_i,\ \delta_i} \\ \overline{\delta_i,\ t_i} & \overline{\delta_i,\ \delta_i} \end{pmatrix} \overset{(46)}{=} \mathbf{X}_i (\overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}})\, \mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} + \mathbf{Y}_i (\overline{\mathbf{y}, \mathbf{y}})\, \mathbf{Y}_i^{\mathrm{T}}; \tag{47}$$

---

[1] $\overline{t,\ t}$ = quadratischer Gewichtskoeffizient von t,
$\overline{t,\ \delta}$ = gemischter Gewichtskoeffizient von t und δ, usw.

in (47) wurde angenommen, daß alle Paare ξ'_i, η'_i (gemessene Plattenkoordinaten) die gleiche Gewichtskoeffizientenmatrix $(\overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}})_i = \overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}}$ besitzen. Außerdem ist natürlich für alle Positionen ein und derselben Platte das $\overline{\mathbf{y}, \mathbf{y}}$ das gleiche.

i und k $(i \neq k)$ seien zwei Satellitenpositionen derselben Platte mit Stundenwinkel und Deklination t_i, δ_i und t_k, δ_k. Wir suchen jetzt noch die Matrix der gemischten Gewichtskoeffizienten

$$\underset{2,2}{\mathbf{Q}_{i,k}} = \begin{pmatrix} \overline{t_i, t_k} & \overline{t_i, \delta_k} \\ \overline{\delta_i, t_k} & \overline{\delta_i, \delta_k} \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Zu diesem Zweck müssen wir sowohl dt_i, $d\delta_i$ als auch dt_k, $d\delta_k$ als Funktionen der vier Koordinaten ξ'_i, η'_i, ξ'_k, η'_k auffassen, außerdem natürlich auch als Funktionen der Orientierungsparameter $\mathbf{y}$, die ja für i und k die gleichen sind. Wir setzen also mit wohl ohne weiteres verständlicher Bezeichnungsweise

$$\begin{pmatrix} dt_i \\ d\delta_i \end{pmatrix} = \left(\underset{2,2}{\mathbf{X}_i}, \underset{2,2}{\mathbf{0}}, \underset{2,\mu}{\mathbf{Y}_i}\right) \begin{pmatrix} \underset{2,1}{\mathbf{x}_i} \\ \underset{2,1}{\mathbf{x}_k} \\ \underset{\mu,1}{\mathbf{y}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dt_k \\ d\delta_k \end{pmatrix} = \left(\underset{2,2}{\mathbf{0}}, \underset{2,2}{\mathbf{X}_k}, \underset{2,\mu}{\mathbf{Y}_k}\right) \begin{pmatrix} \underset{2,1}{\mathbf{x}_i} \\ \underset{2,1}{\mathbf{x}_k} \\ \underset{\mu,1}{\mathbf{y}} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Wie schon oben erwähnt haben die Paare ξ'_i, η'_i und ξ'_k, η'_k die gleiche Gewichtskoeffizientenmatrix $\overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}}$ und sind unkorreliert. Die Gewichtskoeffizientenmatrix des Größensystems $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{y}$ lautet daher

$$\underset{4+\mu,\,4+\mu}{\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}}} = \begin{pmatrix} \underset{2,2}{\overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}}} & \underset{2,2}{\mathbf{0}} & \underset{2,\mu}{\mathbf{0}} \\ \underset{2,2}{\mathbf{0}} & \underset{2,2}{\overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}}} & \underset{2,\mu}{\mathbf{0}} \\ \underset{\mu,2}{\mathbf{0}} & \underset{\mu,2}{\mathbf{0}} & \underset{\mu,\mu}{\overline{\mathbf{y}, \mathbf{y}}} \end{pmatrix} \tag{50}$$

und für unsere Matrix (48) bekommen wir mit (49) und (50)

$$\underset{2,2}{\mathbf{Q}_{i,k}} = \left(\underset{2,2}{\mathbf{X}_i},\ \underset{2,2}{\mathbf{O}},\ \underset{2,\mu}{\mathbf{Y}_i}\right) \begin{pmatrix} \underset{2,2}{\overline{\mathbf{x},\mathbf{x}}} & \underset{2,2}{\mathbf{O}} & \underset{2,\mu}{\mathbf{O}} \\ \underset{2,2}{\mathbf{O}} & \underset{2,2}{\overline{\mathbf{x},\mathbf{x}}} & \underset{2,\mu}{\mathbf{O}} \\ \underset{\mu,2}{\mathbf{O}} & \underset{\mu,2}{\mathbf{O}} & \underset{\mu,\mu}{\overline{\mathbf{y},\mathbf{y}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{2,2}{\mathbf{O}} \\ \underset{2,2}{\mathbf{X}_k^{\mathrm{T}}} \\ \underset{\mu,2}{\mathbf{Y}_k^{\mathrm{T}}} \end{pmatrix} = \tag{51}$$

$$= \left(\mathbf{X}_i\,\overline{\mathbf{x},\mathbf{x}},\ \underset{2,2}{\mathbf{O}},\ \mathbf{Y}_i\,\overline{\mathbf{y},\mathbf{y}}\right) \begin{pmatrix} \underset{2,2}{\mathbf{O}} \\ \mathbf{X}_k^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{Y}_k^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_i\,\overline{\mathbf{y},\mathbf{y}}\,\mathbf{Y}_k^{\mathrm{T}},$$

also

$$\underset{2,2}{\mathbf{Q}_{i,k}} = \mathbf{Y}_i\,\overline{\mathbf{y},\mathbf{y}}\,\mathbf{Y}_k^{\mathrm{T}}. \tag{52}$$

Die gesamte Gewichtskoeffizientenmatrix aller Paare t_i, δ_i einer Platte sieht nun folgendermaßen aus: Längs der Hauptdiagonale sind lauter zweireihige Matrizen der Form (47) aneinandergereiht, alles übrige ist mit zweireihigen Matrizen der Form (52) besetzt.

Damit ist auch die zu Beginn gestellte erweiterte Aufgabe gelöst.

Den vorstehenden Ausführungen wurde das Kammerkalibrierungsverfahren zugrunde gelegt, das am DGFI in München verwendet wird und zwar geschah dies durch Einführung der letzten 8 Größen von (13). Natürlich könnte man bei der Plattenauswertung auch mit anderen Kalibrierungsparametern arbeiten (die Frage, ob das zweckmäßig wäre, sei hier dahingestellt) und müßte dann das obige Verfahren zur Berechnung der Gewichtskoeffizientenmatrix der t und δ entsprechend modifizieren.