BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1968

MÜNCHEN 1969

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein Monotoniekriterium

Von **Gerhard Heindl** und **Günter Köhler** in München

Vorgelegt von Herrn Georg Aumann am 8. November 1968

1. Die üblichen Monotoniekriterien, die das lokale Verhalten einer auf einem Intervall erklärten reellen Funktion f betreffen, setzen durchgehende Stetigkeit von f voraus und beziehen sich an allen Stellen x auf das Verhalten von f nach derselben Seite von x.

Demgegenüber wird im Folgenden ein „gemischtes" Kriterium bewiesen, das auch unstetige Funktionen einbezieht und keine Seite auszeichnet. Hiermit lassen sich dann unter schwächeren als bisher bekannten Voraussetzungen Schrankensätze für die Differenzenquotienten reeller Funktionen herleiten.

2. Satz 1 (Monotoniekriterium[1]). Voraussetzung: Es sei f eine reelle Funktion in einem Intervall I, die in jedem Punkt $x \in I$ eine der Eigenschaften (1) oder (2) oder (3) hat:

(1) f ist in x lokal steigend, d. h. es gibt eine Umgebung U von x, so daß aus $y, z \in U \cap I$, $y \leq x \leq z$ folgt $f(y) \leq \leq f(x) \leq f(z)$;

(2) f ist in x von rechts stetig und von links lokal steigend, d. h. es gibt eine Umgebung U von x, so daß aus $y \in U \cap I$, $y \leq x$ folgt $f(y) \leq f(x)$;

(3) f ist in x von links stetig und nach rechts lokal steigend.

Behauptung: f ist in I monoton steigend.

Zusatz 1. Der Satz bleibt richtig, wenn von f in abzählbar vielen Punkten $z_1, z_2, \ldots$ aus I statt einer der Eigenschaften (1), (2), (3) die Stetigkeit gefordert wird.

---

[1] Auf die eventuelle Gültigkeit eines solchen Satzes hat uns Herr Prof. G. Aumann aufmerksam gemacht.

Zusatz 2. Sowohl im Satz als auch im Zusatz 1 darf man „steigend" überall durch „strikt steigend" ersetzen.

Beweis von Satz 1. Wir nehmen an, es gäbe zwei Punkte x_1, $y_1 \in I$ mit $x_1 < y_1$ und $f(x_1) > f(y_1)$, und konstruieren mittels einer Intervallschachtelung einen Punkt $a \in I$, der weder (1) noch (2) noch (3) erfüllt.

Wir fixieren ein lineares Polynom p mit der Eigenschaft

$$f(x_1) > p(x_1) > p(y_1) > f(y_1). \tag{4}$$

Es sei $I_1 = [x_1, y_1]$, und wir setzen voraus, ein Intervall $I_\nu = [x_\nu, y_\nu]$ mit

$$f(x_\nu) > p(x_\nu) > p(y_\nu) > f(y_\nu) \qquad (\nu \geq 1) \tag{5}$$

sei bereits konstruiert. Da f nach Voraussetzung in keinem Teilintervall von I mit p übereinstimmen kann, können wir im mittleren Drittel von I_ν einen Punkt z wählen mit $f(z) \neq p(z)$, und wir definieren

$$I_{\nu+1} = [x_{\nu+1}, y_{\nu+1}] = \begin{cases} [x_\nu, z], & \text{wenn } p(z) > f(z) \\ [z, y_\nu], & \text{wenn } f(z) > p(z). \end{cases}$$

Dann gilt (5) auch für $\nu + 1$. Die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl sei $a = \lim x_\nu = \lim y_\nu$. Falls a von allen Intervallendpunkten x_ν, y_ν verschieden ist, hat man $x_\nu < a < y_\nu$, und es gilt: Für $f(a) < p(a)$ ist f wegen (5) in a von links weder stetig noch lokal steigend, für $f(a) > p(a)$ gilt dasselbe von rechts, und für

$$f(a) = p(a) \tag{6}$$

ist f in a weder von links noch nach rechts lokal steigend.

Falls a mit einem Intervallendpunkt zusammenfällt, etwa $a = x_\nu$ für schließlich alle ν, so hat man eine Folge $\{y_\nu\} \to a$ mit $y_\nu > a$ und

$$f(a) > p(a) > p(y_\nu) > f(y_\nu),$$

und f ist in a nach rechts weder stetig noch lokal steigend. Analoges ergibt sich, wenn $a = y_\nu$ für schließlich alle ν ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Beweis von Zusatz 1. Ist p' ein lineares Polynom mit der Eigenschaft (4), so wählen wir ein $\varepsilon \neq f(z_\nu) - p'(z_\nu)$ für alle ν, so daß auch $p = p' + \varepsilon$ noch (4) erfüllt. Mit diesem p läßt sich der Beweis des Zusatzes genauso führen wie der Beweis von Satz 1. Es ist lediglich zu beachten, daß falls a mit einem z_ν zusammenfällt, der Fall (6) nicht auftritt.

Beweis von Zusatz 2. Auf Grund des bereits Bewiesenen ist f monoton steigend in I. Gäbe es zwei Punkte $x, y \in I$ mit $x < y$, $f(x) = f(y)$, so wäre f konstant in $[x, y]$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Bemerkungen. 1. Man erkennt leicht, wie sich bei einer monotonen Funktion die Stellen der Art (1), (2), (3) verteilen.

a) (1) gilt überall.

b) In jedem Stetigkeitspunkt gelten (2) und (3).

c) An einer Sprungstelle x mit $f(x-) < f(x+)$ gilt (1), (2) bzw. (3) je nachdem $f(x-) < f(x) < f(x+)$, $f(x+) = f(x)$ bzw. $f(x-) = f(x)$.

2. Nennt man zwei monotone Funktionen f_1, f_2 äquivalent, wenn für alle x gilt $f_1(x+) = f_2(x+)$ und $f_1(x-) = f_2(x-)$, so sieht man, daß es zu jedem monotonen f genau je ein dazu äquivalentes f_2 bzw. f_3 gibt, welches überall von der Art (2) bzw. (3) ist. Man setze $f_2(x) := f(x+)$ und $f_3(x) := f(x-)$.

3. Aus dem Monotoniekriterium sollen nun Schrankensätze für die Differenzenquotienten reeller Funktionen abgeleitet werden.

Es bezeichne $\left\{\begin{matrix} \underline{D}_v(f; x) \\ \underline{D}_h(f; x) \end{matrix}\right.$ die untere $\left\{\begin{matrix} \text{vordere} \\ \text{hintere} \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} \overline{D}_v(f; x) \\ \overline{D}_h(f; x) \end{matrix}\right.$ die obere $\left\{\begin{matrix} \text{vordere} \\ \text{hintere} \end{matrix}\right.$ Derivierte der reellen Funktion f in einem $\left\{\begin{matrix} \text{rechtsseitigen} \\ \text{linksseitigen} \end{matrix}\right.$ Häufungspunkt des Definitionsbereiches von f.

Satz 2. Voraussetzung: Es seien I ein Intervall, A eine höchstens abzählbare Teilmenge von I, f und g reelle Funktionen in I. Für alle $x \in I \setminus A$ sei weder $\underline{D}_v(f; x) = \overline{D}_v(g; x) = \pm\infty$ noch

$\underline{D}_h(f; x) = \overline{D}_h(g; x) = \pm\infty$. In den Punkten von A seien f und g stetig. Für jedes $x \in \underline{I} \setminus A$[1] sei eine der Bedingungen (1'), (2') oder (3') erfüllt:

(1') $\underline{D}_h(f; x) \geq \overline{D}_h(g; x)$ und $\underline{D}_v(f; x) \geq \overline{D}_v(g; x)$.

(2') $\underline{D}_h(f; x) \geq \overline{D}_h(g; x)$ und f und g sind in x von rechts stetig.

(3') $\underline{D}_v(f; x) \geq \overline{D}_v(g; x)$ und f und g sind in x von links stetig.

Enthält I einen linken bzw. rechten Endpunkt a, so seien f und g in a stetig, oder es gelte $\underline{D}_v(f; a) \geq \overline{D}_v(g; a)$ bzw. $\underline{D}_h(f; a) \geq \overline{D}_h(g; a)$.

Behauptung: Für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt

$$f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_2) - g(x_1).$$

Beweis. Wir zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ erfüllt die Funktion

$$\Phi_\varepsilon : x \mapsto f(x) - g(x) + 2\varepsilon x, \quad x \in I$$

die Voraussetzung des (um den Zusatz 1 erweiterten) Monotoniekriteriums. Es sei $x \in I \setminus A$. Ist $\underline{D}_v(f; x) \geq \overline{D}_v(g; x)$ und $\underline{D}_v(f; x) = \infty$ oder $\overline{D}_v(g; x) = -\infty$, so ist $f - g$ und damit Φ_ε in x nach rechts lokal steigend. Sind $\underline{D}_v(f; x)$ und $\overline{D}_v(g; x)$ endlich, so gelten für alle hinreichend nahe rechts von x gelegenen x' die Ungleichungen

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq \underline{D}_v(f; x) - \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{g(x') - g(x)}{x' - x} \leq \overline{D}_v(g; x) + \varepsilon.$$

Daraus folgt $\Phi_\varepsilon(x') - \Phi_\varepsilon(x) \geq 0$, d. h. Φ_ε ist auch in diesem Falle nach rechts lokal steigend. Falls $\underline{D}_h(f; x) \geq \overline{D}_h(g; x)$ ist, so folgt analog, daß Φ_ε von links lokal steigend ist. Aus dem Monotoniekriterium ergibt sich nun

$$f(x_2) - f(x_1) - (g(x_2) - g(x_1)) + 2\varepsilon(x_2 - x_1) \geq 0$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Für $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung des Satzes 2.

---

[1] $\underline{I}$ bezeichnet den offenen Kern von I.

Hervorgehoben werden sollen zwei Sonderfälle von Satz 2:

Mit $g : x \mapsto m x$, $m \in \boldsymbol{R}$, erhält man den

Satz 2.1. (Unterer Schrankensatz). Voraussetzung: Es seien I ein Intervall, A eine höchstens abzählbare Teilmenge von I, $m \in \boldsymbol{R}$, und f eine reelle Funktion in I. In den Punkten von A sei f stetig, und für jedes $x \in \underline{I} \setminus A$ sei eine der Bedingungen $(U\,1)$, $(U\,2)$ oder $(U\,3)$ erfüllt:

$(U\,1)$ $\underline{D}_h(f; x) \geq m$ und $\underline{D}_v(f; x) \geq m$.

$(U\,2)$ $\underline{D}_h(f; x) \geq m$ und f ist in x von rechts stetig.

$(U\,3)$ $\underline{D}_v(f; x) \geq m$ und f ist in x von links stetig.

Enthält I einen linken bzw. rechten Endpunkt a, so sei f in a stetig, oder es gelte $\underline{D}_v(f; a) \geq m$ bzw. $\underline{D}_h(f; a) \geq m$.

Behauptung: Für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq m.$$

Bemerkung. Der Spezialfall $m = 0$ von Satz 2.1 stellt eine verschärfte Form des Monotoniekriteriums (Satz 1) dar; man kann diese Verschärfung auch auf dieselbe Art beweisen wie Satz 1.

Mit $f : x \mapsto M x$, $M \in \boldsymbol{R}$, ergibt sich der

Satz 2.2. (Oberer Schrankensatz). Voraussetzung: Es seien I ein Intervall, A eine höchstens abzählbare Teilmenge von I, $M \in \boldsymbol{R}$, und g eine reelle Funktion in I. In den Punkten von A sei g stetig, und für jedes $x \in \underline{I} \setminus A$ sei eine der Bedingungen $(O\,1)$, $(O\,2)$ oder $(O\,3)$ erfüllt:

$(O\,1)$ $M \geq \overline{D}_h(g; x)$ und $M \geq \overline{D}_v(g; x)$.

$(O\,2)$ $M \geq \overline{D}_h(g; x)$ und g ist in x von rechts stetig.

$(O\,3)$ $M \geq \overline{D}_v(g; x)$ und g ist in x von links stetig.

Enthält I einen linken bzw. rechten Endpunkt a, so sei g in a stetig, oder es gelte $M \geq \overline{D}_v(g; a)$ bzw. $M \geq \overline{D}_h(g; a)$.

Behauptung: Für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt

$$M \geq \frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Erfüllt eine reelle Funktion f in I sowohl die Voraussetzungen des unteren als auch des oberen Schrankensatzes, so ist sie stetig, und es gilt

Satz 3 (Schrankensatz). Voraussetzung: Es seien I ein Intervall, A eine höchstens abzählbare Teilmenge von I, $m \in \boldsymbol{R}$, $M \in \boldsymbol{R}$, und f eine reelle stetige Funktion in I. Für jedes $x \in I \setminus A$ sei eine der Bedingungen (S 1), (S 2), (S 3) oder (S 4) erfüllt:

(S 1) $\underline{D}_h(f; x) \geq m$ und $\overline{D}_h(f; x) \leq M$.
(S 2) $\underline{D}_h(f; x) \geq m$ und $\overline{D}_v(f; x) \leq M$.
(S 3) $\underline{D}_v(f; x) \geq m$ und $\overline{D}_h(f; x) \leq M$.
(S 4) $\underline{D}_v(f; x) \geq m$ und $\overline{D}_v(f; x) \leq M$.

Behauptung: Für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt

$$m \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq M.$$

Bemerkung. Mit $m = M = 0$ wird Satz 3 ein hinreichendes (und notwendiges) Kriterium dafür, daß f in I konstant ist.

Die Sätze 2, 2.1, 2.2 und 3 verallgemeinern bereits bekannte Schrankensätze, die man erhält, wenn man von f und g Stetigkeit in I und durchweg rechtsseitige bzw. durchweg linksseitige Differenzierbarkeit in $I \setminus A$ voraussetzt. Man vergleiche etwa [1] § 2, [2] Kap. VIII. 5, [4] S. 115.

Literatur

[1] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse; Livre IV: Fonctions d'une variable réelle, Paris 1949.
[2] J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, New York 1966.
[3] Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung Bde 1 u. 2, 2. Aufl. Berlin 1948/50.
[4] P. Lorenzen, Differential und Integral, Frankfurt a. M. 1965.