BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1968

MÜNCHEN 1969

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Adiabatische Invarianz des Wirkungsintegrals für die Bewegung in nicht-regulären Kraftfeldern

Von **Dieter Pfirsch**, München, und **Karl Schindler**, Rom

Vorgelegt von Herrn Ludwig Biermann am 5. Juli 1968

Mit 3 Figuren

Der Nachweis der adiabatischen Invarianz des Wirkungsintegrals für nahezu periodische Hamiltonsysteme ist ein klassisches Problem, das für den Fall glatter und langsam veränderlicher Kraftfelder (d. h. Periode klein gegenüber der Zeitskala der Veränderung; ihr Verhältnis sei ε) auf mehrere sehr verschiedene Weisen in erster Ordnung in ε gelöst wurde, zuerst einige Jahre nach der Aufstellung der sogenannten Adiabatenhypothese durch Ehrenfest [1] von Burgers [2]. Im Zusammenhang mit der Theorie der kosmischen Strahlung und der Plasmaphysik wurde die Frage von Bedeutung, ob die Invarianz auch in höherer Ordnung gilt. Die Ausdehnung auf die zweite Ordnung gelang als erstem H. Helwig [3], auf beliebig hohe Ordnung für speziellere Probleme R. Kulsrud [4] und A. Lenard [5], während die Ausdehnung auf allgemeine Hamilton'sche Systeme in beliebig hoher Ordnung von M. Kruskal [6] durchgeführt wurde.

Eine wahrscheinlich unvermeidbare Konsequenz der Eleganz dieser Untersuchung ist ihr implizierter Charakter. Es ist daher jeweils sehr aufwendig herauszufinden, ob der Beweis auch noch gilt für den Fall, wenn die Hamilton-Funktion Sprünge oder Knicke aufweist. Typische Beispiele für solches Verhalten sind die Bewegung eines Massenpunktes zwischen elastisch reflektierenden bewegten Wänden und die Drift eines elektrisch geladenen Teilchens in einem Magnetfeld mit einer Sprungdiskontinuität. Der letztere Fall, der für die Bewegung eines geladenen Teilchens (z. B. der kosmischen Strahlung) durch eine magnetische Stoßfront im interplanetaren oder interstellaren Raum [7] von erheblichem Interesse ist, wurde mit der Lenard'schen

Methode schon ausführlich behandelt [8]; der mathematische Aufwand ist jedoch erheblich und die physikalischen Aspekte kommen nicht klar zum Vorschein.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, die adiabatische Invarianz des Wirkungsintegrals für die Bewegung in nicht-regulären Kraftfeldern auf einfache und anschauliche Weise herzuleiten und zu verallgemeinern. Dabei wird insbesondere ein Sachverhalt, der für die Theorie der kosmischen Strahlung von Bedeutung ist und der bisher nur durch numerische Rechnungen gewonnen werden konnte, auf eine allgemeine theoretische Aussage zurückgeführt.

Beschreibung der Methode

Wir betrachten zeitabhängige Hamilton-Funktionen $H(p, q; t)$ und definieren in der üblichen Weise das „eingefrorene Problem" zur Zeit $t = t'$ durch $H(p, q; t')$ bei festgehaltenem t', so daß H entlang einer „eingefrorenen" Bahn konstant ist. Die eingefrorene Bewegung – p'' Funktion von q'' – sei periodisch mit zeitlichen Perioden $T(H, t')$, d. h. die entsprechenden Bahnen $\Gamma = \Gamma_H$ im Phasenraum des Impulses und Ortes (p, q) sind geschlossen und können durch H und t' als Parameter charakterisiert werden. Das Wirkungsintegral

$$J = \oint_{\Gamma} p'' \, dq'' = J(H(p, q; t'), t')$$

ist dann eine Funktion dieser beiden Parameter. Für eine Hamilton-Funktion der Form $H = \frac{p^2}{2m} + V(q, t)$, die für einen großen Bereich der Anwendung typisch ist, lautet dieser Ausdruck:

$$J = 2 \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2m(H(p, q; t') - V(q'', t'))} \, dq''.$$

$H(p, q; t')$ ist dabei im Radikanden konstant zu halten, $q'' = q_1$ und $q'' = q_2$ bedeuten die Reflexionspunkte der eingefrorenen Bahn, sie sind also Nullstellen des Radikanden. Damit sind q_1 und q_2 Funktionen von H und t'.

Als Maß für die explizite Zeitabhängigkeit der Hamilton-Funktion benutzen wir

$$\varepsilon = \frac{(\Delta H)_0}{W_0} \tag{1}$$

wo $(\Delta H)_0$ ein typischer Wert für die Veränderung der Hamilton-Funktion ist, d. h. der Gesamtenergie, die ein Teilchen längs seiner Bahn während eines typischen Umlaufs erfährt; W_0 sei ein Maß für die mittlere kinetische Energie des betrachteten Teilchens (über einen Umlauf genommen). Alle ersten Ableitungen der Hamilton-Funktion sollen existieren, jedoch nicht notwendig stetig sein.

Wir bilden die Zeitableitung von J entlang der Teilchenbahn

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} + [H, J] = \frac{\partial J}{\partial t}, \tag{2}$$

wo die Klammern Poisson-Klammern bedeuten. $\frac{\partial J}{\partial t} \equiv J_t$ bedeutet die Ableitung bei (formal) konstant gehaltenem p und q.

Die abzuschätzende Größe ist die Änderung ΔJ von J längs der wirklichen Bahn:

$$\Delta J = \oint^{t_1} p''\, dq'' - \oint^{t_0} p''\, dq'' = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dJ_t}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} J_t\, dt; \tag{3}$$

t_0 und t_1 sind feste Zeitpunkte.

Wir beweisen zunächst den Satz

$$\oint_\Gamma J_{t'}(p'', q''; t')\, dt'' = 0, \tag{4}$$

wobei $p'' = p(t'')$, $q'' = q(t'')$ eine beliebige Lösung des zur Zeit t' eingefrorenen Problems ist (für die wirkliche Bahn ist das entsprechende Integral natürlich $\neq 0$, das spätere Ziel ist eben, die Abweichung von 0 zu bestimmen). Dazu schreiben wir

$$J_{t'} = \oint \frac{\partial p''}{\partial t'}\, dq'' \tag{5}$$

– die Beiträge der Ableitungen der Integrationsgrenzen verschwinden – und berechnen $\frac{\partial p''}{\partial t'}$ aus

$$H(p'', q''; t') = H(p, q; t') \tag{6}$$

durch Differenziation nach t' bei festgehaltenem p, q, und der Integrationsvariablen q''

$$\frac{\partial p''}{\partial t'} = \frac{H_{t'}(p, q; t') - H_{t'}(p'', q''; t')}{H_{p''}(p'', q''; t')} \tag{7}$$

und finden durch Einsetzen in (5) mit der Periode der eingefrorenen Bahn

$$T = \oint_{\Gamma} \frac{dq''}{H_{p''}(p'', q''; t')} \equiv \oint_{\Gamma} dt''$$

$$J_{t'} = T\left[H_{t'}(p, q; t') - \frac{I}{T}\int_{\Gamma} H_{t'}(p'', q''; t')\, dt''\right]. \tag{8}$$

Die Klammer enthält die Abweichung des instantanen Wertes von $H_{t'}$ von seinem Mittelwert entlang der eingefrorenen Bahn; $H_{t'}(p'', q''; t')$ ist, im Gegensatz zu $H(p'', q''; t')$ selbst, über die Variable q'' eine schnell veränderliche Funktion von t''; eine weitere Mittelung über die eingefrorene Bahn ergibt Null; also gilt (4).

Wir werden nun die gewünschten Abschätzungen für ΔJ in einfacher Weise gewinnen, indem wir (3) mit einer Summe über Ausdrücke der Form (4) vergleichen. Wir teilen dazu das Zeitintervall $[t_0, t_1]$ in folgender Weise in Teilintervalle $T_1, T_2 \ldots$ auf: T_1 sei die Periode der eingefrorenen Bewegung für $t = t_0$, die die gewählten Anfangsbedingungen erfüllt, T_2 die Periode der eingefrorenen Bewegungen für $t = t_0 + T_1$, die gerade zu diesem Zeitpunkt mit der wirklichen Bahn exakt zusammenfällt usw.; das letzte Teilintervall, T_n, soll den Endzeitpunkt t_1 enthalten; n ist demgemäß die ungefähre Zahl der Perioden.

Es gilt dann, s. (3)

$$\Delta J = \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i} J_t\, dt + a, \tag{9}$$

wo a eine Korrektur ist, die berücksichtigt, daß im allgemeinen t_1 nicht mit einer Intervallgrenze zusammenfällt:

$$|a| \leq \int_{T_n} |J_t|\, dt, \tag{10}$$

da t_1 jedenfalls im letzten Intervall liegen soll.

Reguläre Kraftfelder

Für genügend glatte Kraftfelder ist wegen (1) $H_t = o(\varepsilon)$ und damit auch $J_t = o(\varepsilon)$, wie aus (8) mit $t' = t$ folgt, da jeder Summand für sich genommen diese Größenordnung besitzt.

Wir bezeichnen die Differenz von H, die ein Teilchen auf der wirklichen Bahn gegenüber der Bewegung auf einer eingefrorenen Bahn während eines Zeitintervalls T, d. h. eines Umlaufs, erfährt mit δH. Das Symbol δ wird hier ausschließlich im Sinne derartiger Differenzen benutzt.

Mit $\delta H = o(\varepsilon)$ folgt über die Bewegungsgleichungen ebenfalls

$$\delta p = o(\varepsilon), \qquad \delta q = o(\varepsilon) \tag{11}$$

und mit (8), da J_t schon $= o(\varepsilon)$

$$\delta J_t = o(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Es gilt also mit (4)

$$\begin{aligned} \int_{T_l} \delta J_t\, dt &= \int_{T_l} J_t\, dt \\ &= o(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{13}$$

Während eines Zeitintervalls der Ordnung $1/\varepsilon$, über das eine Veränderung des Kraftfeldes der Ordnung 1 vorliegt, ist gemäß (1) die Zahl der Umläufe von der Ordnung $1/\varepsilon$. Für ein solches Intervall folgt aus (9), (10) und (13)

$$\Delta J = o(\varepsilon). \tag{14}$$

Dies ist in erster Ordnung die bekannte adiabatische Invarianz des Wirkungsintegrals für glatte Felder.

Nicht-reguläre Kraftfelder

Im Falle nicht-regulärer Kraftfelder wird δJ_t nicht notwendig von der Ordnung ε^2 sein, und die Ordnung von δJ_t kann sich überdies während eines Umlaufs sprunghaft ändern. Es besteht dann die Aufgabe, die entsprechenden Zeitintervalle abzuschätzen.

Wir behandeln zunächst den Fall einer Hamilton-Funktion der Form

$$H = \frac{p^2}{2} + \Psi(q, t), \tag{15}$$

wo das Potential $\Psi(q, t)$ an der Stelle $q = q^*(t)$ einen Knick, d. h. die Kraft $K = -\Psi_q$ eine Sprungdiskontinuität besitzt. Nach Einführung geeigneter dimensionsloser Variablen erhält man eine solche Hamilton-Funktion (15) zum Beispiel für die Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens in einem Magnetfeld mit einer Sprungdiskontinuität (Stoßwelle) oder für ein Fadenpendel, dessen Faden bei einer bestimmten zeitlich veränderlichen Auslenkung eine sprunghafte Veränderung der Fadenlänge erfährt.

Unsere auf der Eigenschaft (8) beruhende Formulierung des Problems erlaubt es, den erheblichen mathematischen Aufwand der erwähnten früheren Behandlung [8] zu vermeiden und deren Ergebnisse zu verallgemeinern.

An der Knickstelle $q^*(t)$ springen H_t und damit J_t um einen Betrag von der Ordnung dieser Größen selbst, also um einen Betrag von der Ordnung ε. Im Gegensatz zum regulären Fall ist daher jetzt

$$\delta J_t = o(\varepsilon) \tag{16}$$

für das im allgemeinen kurze Zeitintervall τ, für das die zu vergleichenden Bahnpunkte auf der eingefrorenen und der wirklichen Bahn auf *verschiedenen* Seiten der Diskontinuität liegen können. Die Änderung ΔJ wird deshalb den größten Beitrag von den Umläufen erhalten, für die τ am größten ist. Das ist der Fall, wenn ein Umkehrpunkt (q_1 oder q_2, Fig. 1) in einer Umgebung von der Ordnung ε der Diskontinuitätsstelle liegt. Es ist dann möglich, daß die wirkliche Bahn die Diskontinuität durchdringt, während die eingefrorene Bahn die Diskontinuität höchstens streift (Fig. 1 a).

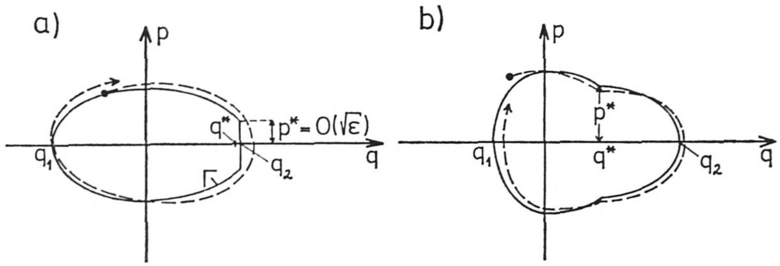

Fig. 1: Charakteristische eingefrorene (ausgezogen gezeichnet) und wirkliche Teilchenbahnen in der Phasenebene bei sprungartiger Änderung der Kräfte um die Ordnung 1.

Die Eintrittsgeschwindigkeit p^* ist dann von der Ordnung $\sqrt{\varepsilon}$. Dies folgt entweder aus einer einfachen geometrischen Betrachtung (Fig. 1 a) oder aus

$$p^* = \sqrt{H - \Psi(q^*, t)} \tag{17}$$

mit

$$H = H^* + \delta H, \qquad H^* = \Psi(q^*, t).$$

Für das Teilchen muß sich die Richtung der Eintrittsgeschwindigkeit p^* unter der Wirkung der Kraft $K = -\Psi_q = o(1)$ während der Zeit τ umkehren:

$$\int_\tau K\,dt \approx K\tau \approx 2p^*. \tag{18}$$

Daraus folgt $\tau = o(\sqrt{\varepsilon})$. Wir können also den von einem solchen Zeitintervall herrührenden Beitrag zum Integral (3) in der folgenden Weise abschätzen:

$$\Delta J\big|_\tau \approx J_t \tau = o(\varepsilon \cdot \sqrt{\varepsilon}) = o(\varepsilon^{3/2}). \tag{19}$$

Im „schlimmsten" Fall gilt bei *jedem* Durchtritt durch die Diskontinuität $p^* = o(\sqrt{\varepsilon})$. Mit (9) regibt sich dann für ein Zeitintervall der Ordnung $1/\varepsilon$ Umläufe eine Gesamtänderung

$$\Delta J = o(\sqrt{\varepsilon}). \tag{20}$$

Wir haben damit das wichtigste Resultat von Ref. (8) auf einfache und anschauliche Weise gewonnen. Wir verallgemeinern es noch in folgender Weise:

Vergrößert sich der Abstand zwischen Umkehrpunkt und Diskontinuität, wie zum Beispiel bei einem Teilchen, das durch eine Stoßwelle hindurchdriftet, so tritt auch die eingefrorene Bahn durch die Diskontinuität hindurch (Fig. 1 b). Die Durchtrittsgeschwindigkeit (auf der wirklichen Bahn)

$$p^* = \sqrt{H(t) - \Psi(q^*(t), t)} \tag{21}$$

ist dann von variabler (abnehmender) Ordnung, beginnend mit der Ordnung $\sqrt{\varepsilon}$, wo sich der Fall (a) anschließt. Ist δq die Abweichung der eingefrorenen Bahn von der wirklichen Bahn an der Diskontinuitätsstelle, so gilt

$$\tau \approx \frac{\delta q}{p^*(t)}; \tag{22}$$

der dadurch bedingte Fehler des Impulses ist

$$\delta p \approx \varkappa \tau, \tag{23}$$

wobei der Sprung $\varkappa$ der Kraft von der Ordnung 1 ist. Aus (22) und τ folgt der Sprungbeitrag zu δq als von der Ordnung $\delta p \cdot \tau \sim \varkappa \tau^2 \sim \sim \varkappa (\delta q / p^*)^2$. Da p^*, wie erwähnt, höchstens von der Ordnung $\sqrt{\varepsilon}$ ist, wird das vom regulären Bereich stammende δq höchstens wieder um einen Betrag der gleichen Ordnung geändert; es gilt daher in selbstkonsistenter Weise $\delta q = o(\varepsilon)$.

Wir berechnen zunächst den Beitrag zu ΔJ, der von den Durchgängen durch die Diskontinuität herrührt, wenn zur Zeit $t_0 = 0$ der erste Durchgang erfolgte und zu der im allgemeinen viel späteren Zeit $t_{1/2}$ die Durchtrittsgeschwindigkeit p^* die Ordnung $\varepsilon^{1/2}$ erreicht hat (wir wählen $t_{1/2} < t_1 = o(1/\varepsilon)$. Für das Zeitintervall $(t_{1/2}, t_1)$ erhält man einen Beitrag zu ΔJ der Ordnung (vgl. (9) und (22), da δq von der Ordnung ε ist)

$$o\left(\varepsilon \sum_n \tau_n\right) = o\left(\varepsilon \int_{t_{1/2}}^{1/\varepsilon} \tau(t)\, dt\right) = o\left(\varepsilon^2 \int_{t_{1/2}}^{1/\varepsilon} \frac{dt}{p^*(t)}\right). \tag{24}$$

Der Beitrag von $t < t_{1/2}$ ist nach (19) von der Ordnung $\varepsilon^{3/2} t_{1/2}$. Von den Diskontinuitätsdurchgängen erhält man also insgesamt

$$\Delta J_{disc} = o(\varepsilon^{3/2} t_{1/2}) + o\left(\varepsilon^2 \int_{t_{1/2}}^{1/\varepsilon} \frac{dt}{p^*(t)}\right).$$

In den regulären Bereichen hat die Größe J_t Beiträge propotional zu $\varepsilon\,\delta q$ und $\varepsilon\,\delta p$; da die Ordnung von δq wenigstens die von δp ist, folgt

$$\Delta J_{reg} = o(\varepsilon^{3/2} t_{1/2}) + o\left(\varepsilon^2 \int_{t_{1/2}}^{1/\varepsilon} \frac{dt}{p^*(t)}\right). \tag{25}$$

Es ergibt sich also auch für die Gesamtänderung während des Zeitintervalls $(0, t_1)$

$$\Delta J = o(\varepsilon^{3/2} t_{1/2}) + o\left(\varepsilon^2 \int_{t_{1/2}}^{1/\varepsilon} \frac{dt}{p^*(t)}\right). \tag{26}$$

Wir betrachten folgende Sonderfälle:

(1) $p^* = o(\sqrt{\varepsilon})$ während des ganzen Intervalls (ungünstigster Fall). Es gilt dann $t_{1/2} = o(1/\varepsilon)$, $t_1 - t_{1/2} = o(1/\varepsilon)$ und damit

$$\Delta J = o(\sqrt{\varepsilon}), \tag{27}$$

also das frühere Ergebnis (20).

(2) Wir betrachten ein Potenzgesetz der Form

$$p^*(t) = \sqrt{\varepsilon}\, t^\nu,\quad \nu \leq \frac{1}{2} \text{ (da } p^*(t) \text{ für } t = o(1/\varepsilon) \text{ nicht größer als } o(1) \text{ werden darf)} \tag{28}$$

Es ist dann im allgemeinen $t_{1/2} = o(1)$, und wir können den ersten Term in (26) weglassen:

$$\Delta J = o\left(\varepsilon^2 \int_1^{1/\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{\varepsilon}\, t^\nu}\right) = o(\varepsilon^{\nu + 1/2}) \tag{29}$$

$\nu = 0$ ergibt wieder Fall (1).

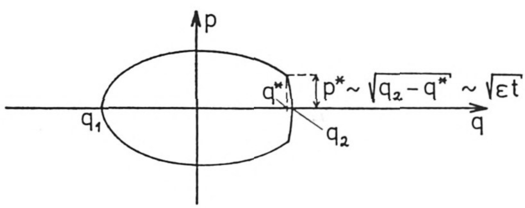

Fig. 2: Verhältnisse für den Fall, daß sich Diskontinuität und Umkehrpunkt mit einer Geschwindigkeit der Ordnung ε voneinander entfernen.

Für den Fall, daß die Diskontinuität und der Umkehrpunkt sich mit einer Geschwindigkeit der Ordnung ε voneinander entfernen, gilt $\nu = 1/2$, also

$$\Delta J = o(\varepsilon). \tag{30}$$

In diesem Fall, der als der „Normalfall" anzusehen ist, hat also die Anwesenheit der Diskontinuität auf die adiabatische Invarianz, verglichen mit dem Fall regulärer Felder, keinen Einfluß. Dieser Fall ist z. B. verwirklicht bei der Drift eines elektrisch geladenen Teilchens in einem Magnetfeld mit einer Sprungdiskontinuität.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Funktion $p^*(t)$ nicht beliebig gewählt werden kann, wenn die Hamilton-Funktion bestimmt ist. In der adiabatischen Näherung folgt $p^* = \sqrt{H(J_0, t) - \Psi(q^*(t), t)}$, wo J_0 der Anfangswert des Phasenintegrals ist.

Die vorliegende Untersuchung hat den Vorteil, daß hier zweite Ableitungen (δ als Ableitung betrachtet) nur in regulären Bereichen auftreten. Daraus folgt direkt, daß die hier durchgeführte Betrachtung *nicht nur* für Diskontinuitäten, sondern auch für steile monotone Übergänge der Kraft gilt, solange die Dicke D des Übergangsgebietes nicht größer wird als δq, d. h. $D = o(\varepsilon)$.

Es sei noch kurz abgeschätzt, was geschieht, wenn D größer als $o(\varepsilon)$ wird. Der größte Effekt ist wieder dann zu erwarten, wenn sich das Teilchen am längsten in D aufhält:

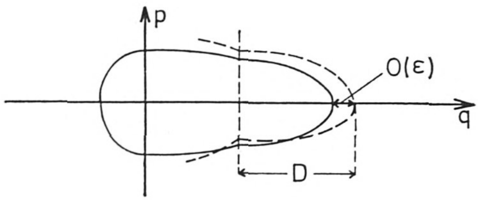

Fig. 3: Eingefrorene und wirkliche Teilchenbahnen in der Phasenebene bei Änderung der Kräfte um die Ordnung 1 über Strecken der Größenordnung D

Wir haben jetzt an Stelle von $\delta J_t = o(\varepsilon)$, $\tau = o(\sqrt{\varepsilon})$ für den Fall der Fig. 1

$$\delta J_t = o\left(\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{D}\right), \quad \tau = o(\sqrt{D})$$

denn δJ_t ist jetzt proportional zu $\dfrac{\delta q}{D} \sim \dfrac{\varepsilon}{D}$ und es gilt $K\tau^2 \sim D$. Statt (20) erhält man also für ein Teilchen, das sich dauernd (Zeitintervall der Ordnung $1/\varepsilon$) in diesem Zustand befindet

$$\Delta J = o\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{D}}\right).$$

(Der reguläre Beitrag ist wieder von derselben Ordnung.)

Erwartungsgemäß erhalten wir für $D = \varepsilon$ den Fall der Fig. 1, während für $D \approx 1$ der völlig reguläre Fall ($\Delta J = o(\varepsilon)$) eintritt.

Als letzten Fall betrachten wir Potentialverläufe, in denen ein Teilchen bis nahe dem (bewegten) Rand eine Geschwindigkeit der Ordnung 1 besitzt und dann über eine Strecke D reflektiert wird. In diesem Fall bestehen folgende selbstkonsistente Relationen:

Eingefrorene und wirkliche Bahn werden sich um eine Reflektion unterscheiden können.

Da sich die Geschwindigkeit der Wand bei einer Periode um $o(\varepsilon)$ ändert, ist, bedingt durch die zusätzliche Reflektion, $\delta J_t = o(\varepsilon \cdot K \delta q)$ und damit $\delta q = o(\varepsilon)$. Reflektion besagt außerdem $K\tau = o(1)$, und es ist

$$\delta J_t = o(\varepsilon \cdot K \delta q),$$

(vgl. (8)), also maximal

$$\Delta J = o(\varepsilon^2 K) \cdot \tau \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = o(\varepsilon)$$

wie im regulären Fall.

Schlußbemerkungen

Wir wollen abschließend noch einmal auf die Bedeutung der erzielten Ergebnisse für die schon eingangs erwähnte Theorie der kosmischen Strahlung hinweisen. Die fundamentale Frage ist hier: Wie können Teilchen im interstellaren Raum auf relativistische Geschwindigkeiten beschleunigt werden? Einer der am häufigsten diskutierten Mechanismen ist der sogenannte Fermi-Mechanismus [9], bei dem Teilchen durch wiederholte Reflektion an sich aufeinander zu bewegenden Magnetfeldinhomogenitäten auf immer höhere Energien gebracht werden. Wichtig bei diesem Prozeß ist, daß die Energie, die zunächst nur in den Freiheitsgrad parallel zum Magnetfeld gelangt, auch auf die beiden anderen Freiheitsgrade verteilt wird. Dazu muß die adiabatische Invarianz des magnetischen Momentes zerstört werden. Möglich könnte dies durch die Einwirkung von Stoßwellen sein. Wie aus den vorstehenden Untersuchungen ersichtlich ist, kommen dafür aber keine Stoßwellen mit einer Ausbreitung genau senkrecht zum Magnetfeld in Frage. Dieser Sachverhalt wurde schon von

Parker in seiner erwähnten Arbeit [7] erkannt. Die Aussagen von Parker beruhen jedoch auf numerisch durchgerechneten Beispielen, während sie hier ganz allgemein bewiesen werden.

Herrn Professor L. Biermann möchten wir herzlich für Diskussionen danken.

Literatur

[1] P. Ehrenfest, Ann. d. Physik 36, 91 (1911).

[2] J. M. Burgers, Ann. d. Physik 52, 195 (1917), vgl. auch A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 5. Aufl. (1931) S. 368 u. 696.

[3] G. Hellwig, Z. Naturforschg. 10a, 508 (1955).

[4] R. Kulsrud, Phys. Rev. 106, 205 (1957).

[5] A. Lenard, Ann. Phys. (N. Y.) 6, 261 (1959).

[6] M. Kruskal, J. Math. Phys. 3, 806 (1962).

[7] E. N. Parker, Phys. Rev. 109, 1328 (1958).

[8] K. Schindler, J. Math. Phys. 6, 313 (1965).

[9] E. Fermi, Phys. Rev. 75, 1169 (1949); E. Fermi, Ap. J. 119, 1 (1954).