BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1967

MÜNCHEN 1968

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine Äquivalenzrelation in Ringen

Von **Max Koecher** in München

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 2. Juni 1967

Einleitung. Zwei Elemente a und b des assoziativen Ringes R werden *äquivalent* genannt, wenn es ein w aus R gibt mit

$$(*) \qquad b - a = awb = bwa.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation von R, die bisher anscheinend noch nicht betrachtet wurde. Die Untersuchung dieser Relation beruht auf dem Studium der Mengen G_a der w aus R, für welche es ein b aus R gibt, so daß (*) gilt. G_a trägt die Struktur einer Gruppe, und die Gruppen G_a und G_b sind isomorph, falls a und b äquivalent sind.

Für die Elemente a, b einer Äquivalenzklasse $\mathfrak{k}$ von R kann in kanonischer Weise eine Verknüpfung $a \cdot b \in \mathfrak{k}$ erklärt werden, die folgenden Regeln genügt:

$$a \cdot a = a, \quad a \cdot (a \cdot b) = b, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c).$$

Jede Klasse $\mathfrak{k}$ ist daher ein *Spiegelungsraum* im Sinne von O. Loos [2].

Die in dieser Note durchgeführten Überlegungen sind völlig elementar. Ich glaube jedoch, daß die Ergebnisse gerade deswegen von einigem Interesse sind. Die hier betrachtete Relation trat erstmalig bei der Untersuchung einer Gruppe von rationalen Abbildungen auf, die mit Hilfe von Jordan-Algebren definiert werden kann [1]. Dort wird nämlich eine Äquivalenzrelation für Jordan-Algebren untersucht, die für spezielle Jordan-Algebren mit der hier beschriebenen Relation übereinstimmt (vergl. [1], Satz 8.2).

§ 1. Die Äquivalenzrelation von R

1. Es sei R ein assoziativer Ring. Für $a, b \in R$ bedeute $R_{a,b}$ die Menge der $w \in R$, für welche

$$(1.1) \qquad b - a = awb = bwa$$

gilt. Man beachte, daß $R_{a,b}$ leer sein kann. Der Definition entnimmt man

$$(1.2) \qquad 0 \in R_{a,a} \text{ und } R_{b,a} = -R_{a,b}, \text{ falls } R_{a,b} \neq \theta.$$

Weiter gilt

$$(1.3) \qquad R_{a,b} + R_{b,c} \subset R_{a,c}, \text{ falls } R_{a,b} \neq \theta \text{ und } R_{b,c} \neq \theta.$$

Zum Beweis sei $w \in R_{a,b}$ und $v \in R_{b,c}$. Wegen $b - a = awb = bwa$ und $c - b = bvc = cvb$ folgt zuerst $bvc - avc = (b-a)vc = awbvc = aw(c-b) = awc - awb$. Damit erhält man $a(w+v)c = awc + avc = bvc + awb = c - a$. Analog folgt $c(w+v)a = c - a$.

Setzt man $R_a = R_{a,a}$, so gilt offenbar

$$(1.4) \qquad R_a = \{w;\, w \in R,\, awa = 0\},$$

und R_a ist eine Untergruppe der additiven Gruppe von R. Zum Nachweis von

$$(1.5) \qquad R_a = R_b, \text{ falls } R_{a,b} \neq \theta,$$

sei $u \in R_a$ und $w \in R_{a,b}$. Aus $b - a = bwa$ folgt nach Multiplikation von rechts mit ua sofort $bua = 0$. Nun führt $0 = bu(b - a - awb) = bub$ zu $u \in R_b$. Damit ist $R_a \subset R_b$ gezeigt. Wegen (1.2) darf man hier a und b vertauschen.

Ferner hat man

$$(1.6) \qquad R_{a,b} = w + R_a \text{ für jedes } w \in R_{a,b}.$$

Zum Beweis ist zuerst $w + R_a \subset R_{a,b}$, denn wegen (1.1) gilt $b \in Ra$ und $b \in aR$. Ist umgekehrt $v \in R_{a,b}$, so liegt $v - w$ wegen (1.2) und (1.3) in $R_{a,b} + R_{b,a} \subset R_a$.

Ist $\varphi: R \to R'$ ein Homomorphismus des Ringes R in den Ring R', so entnimmt man der Definition (1.1) sofort

(1.7) $$\varphi R_{a,b} \subset R'_{\varphi(a),\, \varphi(b)}\,.$$

Ist schließlich $\mathfrak{a}$ ein Linksideal (oder Rechtsideal) von R, so folgt ebenfalls aus (1.1)

(1.8) $$b \in \mathfrak{a}, \text{ falls } a \in \mathfrak{a} \text{ und } R_{a,b} \neq \theta.$$

2. Zwei Elemente a, b aus R heißen *äquivalent*, $a \underset{R}{\sim} b$, wenn es ein w aus R gibt mit $b - a = awb = bwa$, d. h., wenn $R_{a,b}$ nicht leer ist. Wegen (1.2) und (1.3) *ist* $\underset{R}{\sim}$ *eine Äquivalenzrelation von* R. Der Quotientenraum von R nach dieser Relation wird mit $R/\!\sim$ bezeichnet. Wegen (1.5) gilt

(1.5′) $$R_a = R_b, \text{ falls } a \underset{R}{\sim} b,$$

d. h. R_a hängt nur von der Äquivalenzklasse $\mathfrak{k}$ des Elementes a ab. Man erhält daher für jedes $\mathfrak{k} \in R/\!\sim$ eine Untergruppe der additiven Gruppe von R durch die Festsetzung

(1.4′) $$R_{\mathfrak{k}} = R_a = \{w;\ w \in R,\ awa = 0\}, \text{ falls } a \in \mathfrak{k}.$$

Aus (1.7) und (1.8) entnimmt man nun

(1.7′) $$\varphi(a) \underset{R'}{\sim} \varphi(b), \text{ falls } a \underset{R}{\sim} b,$$

für jeden Homomorphismus $\varphi: R \to R'$ und

(1.8′) $$\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}, \text{ falls } \mathfrak{a} \cap \mathfrak{k} \neq \theta \text{ und } \mathfrak{a} \text{ ein Ideal von } R \text{ ist.}$$

Die Definition (1.1) zeigt weiter, daß $a \underset{R}{\sim} 0$ mit $a = 0$ äquivalent ist.

Schließlich impliziert $a \underset{R}{\sim} b$ noch $b^2 = (a + bwa)(a + awb)$, so daß folgt

$$b^2 = 0, \text{ falls } a \underset{R}{\sim} b \text{ und } a^2 = 0.$$

Ist R kommutativ, so gilt $b^m = 0$, falls $a \underset{R}{\sim} b$ und $a^m = 0$, $m \geq 1$. Hingegen ist es für beliebiges R nicht richtig, daß aus $a \underset{R}{\sim} b$ und

$a^m = 0$, $m > 2$, auch stets $b^m = 0$ folgt. Als Gegenbeispiel nehme man einen vollen Matrizenring über einem Körper.

3. Es sei $\mathfrak{k}$ eine Äquivalenzklasse von R. Für $a, b \in \mathfrak{k}$ wird eine Verknüpfung $a \cdot b$ erklärt durch

$$(1.9) \qquad a \cdot b = a - awa, \quad \text{wobei } w \in R_{a,b}.$$

Die rechte Seite von (1.9) *hängt nicht von der Wahl des Elementes* $w \in R_{a,b}$ *ab*. Ist nämlich w' ein weiteres Element von $R_{a,b}$, so gilt $w' = w + u$ mit $u \in R_a = R_{\mathfrak{k}}$ wegen (1.6). Folglich ist $aw'a = awa$. Zum Nachweis von

$$(1.10) \qquad -(w + wbw) \in R_{a,a\cdot b} \quad \text{für alle } w \in R_{a,b}$$

hat man $a(w + wbw)a = awa + (b - a)wa = b - a$ und daher $-(a \cdot b)(w + wbw)a = -(a - awa)(w + wbw)a = -b + a + aw(b - a) = a \cdot b - a$. Analog folgt $-a(w + wbw)(a \cdot b) = a \cdot b - a$.

Aufgrund von (1.10) gehört mit a und b auch $a \cdot b$ zur Klasse $\mathfrak{k}$. Die Verknüpfung $(a, b) \to a \cdot b$ soll die *kanonische Struktur* der Äquivalenzklasse $\mathfrak{k}$ genannt werden.

Will man die kanonische Struktur von $\mathfrak{k}$ auf ein gegebenes Element $a \in \mathfrak{k}$ beziehen, so erhält man

$$(1.11) \qquad b_1 \cdot b_2 = b_1 + b_1(w_1 - w_2)\,b_1 \quad \text{für } w_i \in R_{a,b_i},$$

denn wegen (1.2) und (1.3) gehört $-(w_1 - w_2)$ zu $R_{b_1,a} + R_{a,b_2}$, also zu R_{b_1,b_2}.

4. Ein Element a von R heißt (im von Neumannschen Sinn) *regulär*, wenn es ein $x \in R$ gibt mit $axa = a$. Offenbar ist a sicher dann regulär, wenn $2a \underset{R}{\sim} a$ gilt. Eine Äquivalenzklasse $\mathfrak{k}$ von R heißt *regulär*, wenn $\mathfrak{k}$ ein reguläres Element enthält.

(1.12) Ist a regulär und $b \underset{R}{\sim} a$, so ist auch b regulär.

Gilt nämlich $axa = a$ und $w \in R_{a,b}$, so setzt man $y = x - xaw$ und bekommt $byb = bxb - bxawb = bxb - bx(b - a) = bxa = (a + bwa)xa = a + bwa = b$. Jede reguläre Äquivalenzklasse $\mathfrak{k}$ besteht wegen (1.12) nur aus regulären Elementen.

Mit $\Delta = \Delta(R)$ werde die Menge der Z-linearen Bijektionen $\Phi : R \to R$ bezeichnet, für welche $\Phi(uv) = (\Phi u)v = u(\Phi v)$ für alle u, $v \in R$ gilt. Δ ist dann eine Gruppe von Selbstabbildungen von R. Ist R ein (eindeutig) teilbarer Ring, so gehört für natürliche Zahl n die Abbildung $u \to nu$ zu Δ. Für unitäre Ringe ist $\Phi u = tu$, $\Phi \in \Delta$, mit einem invertierbaren t aus dem Zentrum von R.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{k}$ eine reguläre Äquivalenzklasse von R, so gilt $\Phi a \in \mathfrak{k}$ und*

$$(\Phi a) \cdot b = \Phi^2(a \cdot b), \quad a \cdot (\Phi b) = \Phi^{-1}(a \cdot b),$$

für alle $a, b \in \mathfrak{k}$ und alle $\Phi \in \Delta$.

Beweis. a) Da a regulär ist, gibt es $x \in R$ mit $axa = a$. Für $\Phi \in \Delta$ sei $u = x - \Phi^{-1}x$. Man erhält dann $au(\Phi a) = (\Phi a)ua = a(\Phi u)a = a(\Phi x - x)a = \Phi(axa) - axa = \Phi a - a$. Folglich $\Phi a \underset{R}{\sim} a$ und $u \in R_{a,\Phi a}$.

b) Für $w \in R_{a,b}$ gilt dann $-u + w \in R_{\Phi a,a} + R_{a,b} \subset R_{\Phi a,b}$ wegen (1.2) und (1.3), so daß $(\Phi a) \cdot b = \Phi a - (\Phi a)(-u + w)(\Phi a) = \Phi a + (\Phi a)(\Phi x - x)a - \Phi^2(awa) = \Phi^2(a - awa) = \Phi^2(a \cdot b)$ aus (1.9) folgt.

c) Im Beweis von (1.12) hatte sich $byb = b$ für $y = x - xaw$ ergeben. Man erhält daher $aya = axa - axawa = a - awa$. Wegen Teil a) gilt $v \in R_{b,\Phi b}$ für $v = y - \Phi^{-1}y$. Man hat wieder $w + v \in R_{a,b} + R_{b,\Phi b} \subset R_{a,\Phi b}$ und daher $\Phi[a \cdot (\Phi b)] = \Phi[a - a(w + v)a] = \Phi a - (\Phi a)wa - a(\Phi y - y)a = \Phi(a - awa) - \Phi(aya) + aya = a - awa = a \cdot b$. Damit ist alles bewiesen.

Insbesondere hat man

$$(\Phi a) \cdot (\Phi b) = \Phi(a \cdot b), \quad a, b \in \mathfrak{k}, \quad \Phi \in \Delta,$$

für jede reguläre Klasse $\mathfrak{k}$.

§ 2. Die Gruppen G_a

1. Besitzt R kein Einselement, so bezeichne $\hat{R}$ den aus R durch Adjunktion eines Einselementes e entstehenden Ring. $\hat{R} = Ze + R$ ist also die direkte Summe der Z-Moduln Ze und R, und die

Multiplikation von $\hat{R}$ ist gegeben durch $(me + a)(ne + b) = (mn)e + (na + mb + ab)$. Der Ring R ist dann ein zweiseitiges Ideal in $\hat{R}$. Hat R dagegen ein Einselement e, so wird $\hat{R} = R$ gesetzt.

Mit $G_a = G_a(R)$ wird die Menge der w aus R bezeichnet, für die $e - aw$ und $e - wa$ in $\hat{R}$ invertierbar sind. Offenbar gilt $w \in G_a$ genau dann wenn $a \in G_w$. Die Identität $(e - aw)a = a(e - wa)$ zeigt, daß durch

$$(2.1) \qquad g_a(w) = a(e - wa)^{-1} = (e - aw)^{-1}a, \quad w \in G_a,$$

eine Abbildung $g_a : G_a \to R$ definiert wird. Man hat

$$(2.2) \qquad g_a(w_1) = g_a(w_2) \text{ genau wenn } w_1 - w_2 \in R_a.$$

Wegen (1.1) verifiziert man

$$(2.3) \quad (e - aw)(e + bw) = e = (e + bw)(e - aw) \text{ für } w \in R_{a,b}$$

und

$$(2.4) \quad (e - wa)(e + wb) = e = (e + wb)(e - wa) \text{ für } w \in R_{a,b}.$$

Daher sind $e - aw$ und $e - wa$ in $\hat{R}$ invertierbar und es folgt

$$(2.5) \qquad R_{a,b} \subset G_a \text{ für alle } b \in R.$$

Lemma 1. Für $a, b \in R$ ist $b \underset{R}{\sim} a$ äquivalent mit $b = g_a(w)$, $w \in G_a$.

Daher ist $w \to g_a(w)$ eine Surjektion von G_a auf die Äquivalenzklasse $\mathfrak{k}$ von a.

Beweis. Für $b \underset{R}{\sim} a$ und $w \in R_{a,b}$ gilt $w \in G_a$ wegen (2.5). Aus (1.1) folgt daher $(e - aw)b = a$, so daß $b = g_a(w)$ gilt. Umgekehrt sei $w \in G_a$ und $b = g_a(w)$. Man erhält $a = (e - aw)b = b(e - wa)$, also $b \underset{R}{\sim} a$ und $w \in R_{a,b}$.

Lemma 2. Für $b \underset{R}{\sim} a$ und $w \in R_{a,b}$ gilt

$$G_b = -w + G_a = (e - wa)G_a.$$

Beweis. Es sei u aus G_b. Da $e - ub$ und $e - wa$ in $\hat{R}$ invertierbar sind und da $b(e - wa) = a$ gilt, ist auch

$$e - (w + u)a = (e - ub)(e - wa)$$

invertierbar. Analog zeigt man, daß $e - a(w + u)$ invertierbar ist. Damit ist $w + u \in G_a$, so daß $G_b \subset -w + G_a$ bewiesen ist. Vertauscht man hier a und b, so hat man w wegen (1.2) durch $-w$ zu ersetzen, und man erhält $G_a \subset w + G_b$. Folglich ist $G_b = -w + G_a$.

Weiter sind

$$(e - wa)^{-1}(e - ub)(e - wa) = e - (e - wa)^{-1} ua \text{ und}$$
$$e - bu = e - a(e - wa)^{-1} u$$

in $\hat{R}$ invertierbar, so daß $(e - wa)^{-1} u \in G_a$ für $u \in G_b$ folgt. In $G_b \subset (e - wa) G_a$ vertauscht man wieder a und b und ersetzt w durch $-w$. Es folgt $G_a \subset (e + wb) G_b = (e - wa)^{-1} G_b$ wegen (2.4), also $G_b = (e - wa) G_a$.

2. In der Teilmenge G_a von R wird eine Verknüpfung $w_1 \perp w_2$ erklärt durch

$$(2.6) \quad w_1 \perp w_2 = w_1 \underset{a}{\perp} w_2 = w_1 + w_2 - w_1 a w_2, \quad w_i \in G_a.$$

Wegen

$$(2.7) \qquad e - (w_1 \perp w_2) a = (e - w_1 a)(e - w_2 a)$$

und $e - a(w_1 \perp w_2) = (e - aw_1)(e - aw_2)$ liegt $w_1 \perp w_2$ wieder in G_a. Bei Benutzung von (2.7) ergibt eine Verifikation

Lemma 3. Mit der in (2.6) definierten Verknüpfung ist G_a eine Gruppe, in der 0 das Einselement und das Inverse von w durch $-g_w(a)$ gegeben ist.

Die Abbildung $w \to e - wa$ ist wegen (2.7) ein Homomorphismus von G_a in die Gruppe der invertierbaren Elemente von $\hat{R}$, dessen Kern der Linksannullator von a in R ist.

Für $a \in \mathfrak{k}$ induziert die Surjektion $g_a: G_a \to \mathfrak{k}$ auch in $\mathfrak{k}$ eine Gruppenstruktur: Das Produkt von Elementen $b_i = g_a(w_i)$ aus

$\mathfrak{k}$, w_i aus G_a, erklärt man durch

$$g_a(w_1 \perp w_2) = (e - aw_2)^{-1} a(e - w_1 a)^{-1}.$$

Wegen (2.2) hängt dieser Ausdruck nicht von der Wahl der w_i in den Darstellungen $b_i = g_a(w_i)$ ab. Das so erklärte Produkt von $\mathfrak{k}$ ist aber nicht kanonisch, denn es ist von der Wahl des Repräsentanten a abhängig.

3. Es sei $b \underset{R}{\sim} a$ und $w \in R_{a,b}$. Lemma 2 legt es nahe, die Surjektion $\varphi : G_a \to G_b$ zu betrachten, die durch

$$\varphi(u) = (e - wa)\, u$$

definiert ist. Die Abbildung φ ist auch injektiv, denn $e - wa$ ist in $\hat{R}$ invertierbar. Wegen $b(e - wa) = a$ folgt nun

$$\begin{aligned}\varphi(u_1) \underset{b}{\perp} \varphi(u_2) &= [(e - wa)\, u_1] \underset{b}{\perp} [(e - wa)\, u_2] \\ &= (e - wa) u_1 + (e - wa) u_2 - (e - wa) u_1\, b(e - wa) u_2 \\ &= (e - wa)\,(u_1 + u_2 - u_1 a u_2) = \varphi(u_1 \underset{a}{\perp} u_2).\end{aligned}$$

Daher ist $\varphi : G_a \to G_b$ ein Homomorphismus der Gruppen und man erhält

Satz 2. *Für $b \underset{R}{\sim} a$ sind die Gruppen G_a und G_b isomorph.*

4. Eine nicht-leere Menge G heißt ein *Spiegelungsraum*, wenn in G eine Verknüpfung $x \cdot y$ erklärt ist, die folgenden Axiomen genügt:

(I) $\quad x \cdot x = x,$

(II) $\quad x \cdot (x \cdot y) = y,$

(III) $\quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z).$

Der Begriff eines Spiegelungsraumes wurde zuerst von O. Loos [2] im Zusammenhang mit differentialgeometrischen Fragen untersucht.

Jede Gruppe G mit dem Produkt $(a, b) \to ab$ ist in natürlicher Weise ein Spiegelungsraum, wenn man als Verknüpfung $x \odot y = xy^{-1}x$ definiert. G zusammen mit dieser Verknüpfung heißt der *assoziierte Spiegelungsraum* zur Gruppe G.

In dem zur Gruppe G_a assoziierten Spiegelungsraum gilt für die Verknüpfung $w_1 \odot w_2$ wegen (2.7)

$$(2.8) \quad e - (w_1 \odot w_2) a = (e - w_1 a)(e - w_2 a)^{-1}(e - w_1 a).$$

In der Formel (1.11) gilt $b_i = g_a(w_i)$ und $w_i \in G_a$. Auf der rechten Seite trägt man dort $b_1 = g_a(w_1)$ ein und bekommt

$$\begin{aligned} b_1 \cdot b_2 &= a(e - w_1 a)^{-1}(e - w_1 a + [w_1 - w_2] a)(e - w_1 a)^{-1} \\ &= a(e - w_1 a)^{-1}(e - w_2 a)(e - w_1 a)^{-1}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (2.8) liefert nun

$$b_1 \cdot b_2 = g_a(w_1 \odot w_2), \text{ falls } b_i = g_a(w_i),\ w_i \in G_a.$$

Für $a \in \mathfrak{k}$ ist die Surjektion $g_a : G_a \to \mathfrak{k}$ somit ein *Homomorphismus des zu G_a assoziierten Spiegelungsraumes auf die kanonische Struktur von* $\mathfrak{k}$. Es folgt daher der

Satz 3. *In der kanonischen Struktur ist jede Äquivalenzklasse $\mathfrak{k}$ ein Spiegelungsraum.*

Man kann die Eigenschaften (I), (II) und (III) unter Verwendung von (1.9) und (1.10) direkt für die kanonische Struktur von $\mathfrak{k}$ verifizieren; dies erfordert jedoch im Fall (II) und (III) längere Rechnungen.

Vergleicht man die durch $g_a : G_a \to \mathfrak{k}$ für $a \in \mathfrak{k}$ in $\mathfrak{k}$ induzierte Gruppenstruktur (vergl. **2**), so kann man verifizieren, daß der hierzu assoziierte Spiegelungsraum mit der kanonischen Struktur von $\mathfrak{k}$ übereinstimmt.

§ 3. Unitäre Ringe

1. In einem unitären Ring R kann die Äquivalenzklasse $\mathfrak{i}$ des Einselementes e von R genau beschrieben werden:

Lemma 4. Besitzt R ein Einselement e und ist a in R invertierbar, so ist $b \underset{R}{\sim} a$ gleichwertig damit, daß b invertierbar ist. Die Äquivalenzklasse $\mathfrak{i}$ von e besteht also genau aus den invertierbaren Elementen von R.

Beweis. Ist a invertierbar und $b \underset{R}{\sim} a$, so ist wegen Lemma 1 das Element b ein Produkt der invertierbaren Elemente a und $(e - wa)^{-1}$, also selbst invertierbar. Für invertierbares b folgt umgekehrt $a^{-1} - b^{-1} \in R_{a,b}$, also $b \underset{R}{\sim} a$.

Für invertierbare Elemente a, b von R besteht $R_{a,b}$ offenbar nur aus dem Element $a^{-1} - b^{-1}$. Die kanonische Struktur von $\mathfrak{i}$ bestimmt sich damit zu $a \cdot b = ab^{-1}a$. Der Spiegelungsraum $\mathfrak{i}$ ist also gleich dem der Gruppe der invertierbaren Elemente von R assoziierten Spiegelungsraum.

2. Es sei R wieder ein beliebiger Ring. Für ein Idempotent c von R bilde man die Peirce-Komponente

$$R_1 = R_1(c) = \{a;\, a \in R,\, ac = ca = a\}.$$

R_1 ist ein Unterring von R mit Einselement c.

Satz 4. *Eine Äquivalenzklasse $\mathfrak{k}$ ist dann und nur dann eine Gruppe bezüglich der Multiplikation von R, wenn $\mathfrak{k}$ ein Idempotent c enthält. In diesem Falle besteht $\mathfrak{k}$ aus den Elementen von $R_1 = R_1(c)$, die in R_1 invertierbar sind.*

Beweis. Ist $\mathfrak{k}$ eine Gruppe bei Multiplikation, so ist ihr Einselement idempotent.

Umgekehrt sei c ein Idempotent von R, $a \underset{R}{\sim} c$ und $w \in R_{a,c}$. Aus $c - a = cwa = awc$ folgt $c - ca = cwa = c - a$ und $c - ac = awc = c - a$, d. h. $a \in R_1$. Für $w_1 = cwc \in R_1$ ist $c - a = cw_1a = aw_1c$ und daher $a \underset{R_1}{\sim} c$. Da andererseits $a \underset{R_1}{\sim} c$ auch $a \underset{R}{\sim} c$ impliziert, besteht die Äquivalenzklasse von c wegen Lemma 4 aus den invertierbaren Elementen von R_1. Diese Elemente bilden aber eine Gruppe bei Multiplikation.

2. Nun habe R ein Einselement e. Mit $\Gamma = \Gamma(R)$ werde die Menge der Z-linearen Bijektionen Φ von R bezeichnet, für welche es eine Z-lineare Bijektion $\Phi^{\natural}$ von R gibt, so daß

$$\Phi(xyz) = (\Phi x)(\Phi^{\natural} y)(\Phi z) \text{ für } x, y, z \in R \tag{3.1}$$

erfüllt ist. Für $x = \Phi^{-1}e$ und $z = \Phi^{-1}e$ sieht man, daß $\Phi^\natural$ durch Φ eindeutig bestimmt ist. (3.1) zeigt nun, daß Γ eine Gruppe von Selbstabbildungen von R ist, und daß gilt

$$(3.2) \qquad (\Phi_1\Phi_2)^\natural = \Phi_1^\natural \Phi_2^\natural, \; (\Phi^{-1})^\natural = (\Phi^\natural)^{-1}.$$

Für ein invertierbares Element a von R wählt $x = a$, $y = a^{-1}$ und $z = \Phi^{-1}e$, bzw. $x = \Phi^{-1}e$, $y = a^{-1}$ und $z = a$, in (3.1) und bekommt $(\Phi a)\,(\Phi^\natural a^{-1}) = e = (\Phi^\natural a^{-1})\,(\Phi a)$. *Mit a ist daher auch Φa invertierbar und es gilt*

$$(3.3) \qquad (\Phi a)^{-1} = \Phi^\natural a^{-1}, \text{ falls } a \in R \text{ invertierbar.}$$

Für invertierbare Elemente u, v von R sei $\Phi_{u,v}\, x = uxv$. Man verifiziert nun leicht, daß $\Phi_{u,v}$ zu Γ gehört und daß

$$(3.4) \qquad (\Phi_{u,v})^\natural = \Phi_{v^{-1},u^{-1}}$$

gilt. Ferner gehört jeder Automorphismus Ψ von R zu Γ und es gilt $\Psi^\natural = \Psi$. Umgekehrt läßt sich jedes Element Φ von Γ eindeutig schreiben als

$$(3.5) \quad \Phi = \Phi_{u,e} \circ \Psi, \; u \in R \text{ invertierbar, } \Psi \text{ Automorphismus von } R$$

Da nämlich Φe wieder invertierbar ist, gibt es invertierbares v in R mit $\Phi_{v,e}\,\Phi e = e$. Für $\Psi_1 = \Phi_{v,e} \circ \Phi$ gilt daher $\Psi e = e$ und wegen (3.3) dann auch $\Psi^\natural e = e$. Für $y = e$ zeigt nun (3.1), daß Ψ ein Automorphismus von R ist.

Die Darstellung (3.5) zeigt zusammen mit (3.4), daß *mit Φ auch $\Phi^\natural$ zu Γ gehört.*

3. Die Gruppe Γ ist mit der Äquivalenzrelation von R verträglich: Wendet man nämlich ein $\Phi \in \Gamma$ auf (1.1) an, so erhält man

$$(3.6) \qquad \Phi^\natural R_{a,b} = R_{\Phi a, \Phi b} \text{ für } \Phi \in \Gamma.$$

Folglich

$$(3.6') \qquad \Phi a \underset{R}{\sim} \Phi b, \text{ falls } a \underset{R}{\sim} b \text{ und } \Phi \in \Gamma.$$

Ist nun $\mathfrak{k}$ eine Äquivalenzklasse von R, so ist

$$\Phi\mathfrak{k} = \{\Phi a;\, a \in \mathfrak{k}\},\; \Phi \in \Gamma,$$

wegen (3.6′) wieder eine Äquivalenzklasse. *Die Gruppe Γ operiert also auf dem Quotientenraum $R/\sim$ von links.* Ferner ist für $\Phi \in \Gamma$ die Abbildung $\Phi : \mathfrak{k} \to \Phi\mathfrak{k}$ ein *Homomorphismus der kanonischen Strukturen.* Wegen (1.9) und (3.6) ist nämlich $\Phi(a \cdot b) = \Phi a - \Phi(awa) = \Phi a - (\Phi a)(\Phi^{\natural} w)(\Phi a) = (\Phi a) \cdot (\Phi b)$.

4. Eine Untersuchung des Quotientenraumes $\Gamma \backslash (R/\sim)$ von $R/\sim$ nach Γ, insbesondere die Angabe einer Teilmenge S von R, so daß die Äquivalenzklassen der Elemente von S ein Vertretersystem von $R/\sim$ nach Γ bilden, scheint von Interesse zu sein. Folgende Beispiele sollen ohne Beweis angegeben werden:

a) *R ist ein einfacher Artinscher Ring.* Es gibt in R ein vollständiges System von primitiven orthogonalen Idempotenten $e_1, \ldots, e_r$, derart daß

$$S = \{0, e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, \ldots, e_1 + \cdots + e_r = e\}$$

ein Vertretersystem der gewünschten Art ist.

b) *R ist der Ring der quadratischen n-reihigen Matrizen mit Elementen aus Z.* Für S kann die Menge der Elementarteilermatrizen gewählt werden, d. h., der Diagonalmatrizen mit nicht negativen Diagonalelementen $d_1, \ldots, d_n$, für welche d_i ein Teiler von d_{i+1} ist für $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

c) *Es sei K ein Körper und $R \subset K$ ein Bewertungsring von K, für dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}$ gilt* $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n = 0$. Der Quotientenraum $R/\sim$ besteht aus den Klassen 0, $\mathfrak{i} = R \backslash \mathfrak{m}$ und den Mengen $a + \mathfrak{m}^{2n}$, wobei für $a \in \mathfrak{m}$ die natürliche Zahl n so zu wählen ist, daß $a \in \mathfrak{m}^n$, aber $a \notin \mathfrak{m}^{n+1}$. Ist $\mathfrak{m} = R\pi$ ein Hauptideal, so folgt $a = b\pi^n$, $b \in \mathfrak{i}$, und als Vertretersystem S kann man $S = \{0, 1, \pi, \pi^2, \ldots\}$ nehmen.

Literatur

M. Koecher, Über eine Gruppe von rationalen Abbildungen. Inventiones mathematicae, 3, 136–171 (1967).

O. Loos, Reflexion spaces and homogeneous symmetric spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 73, 250–253 (1967).