BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Zum Satz von Lefschetz über Hyperebenenschnitte

Von **Ludger Kaup** in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 9. Dezember 1966

Auf Lefschetz geht der Beweis des folgenden Satzes zurück (vgl. [5]): Es bezeichne $V_r$ eine nichtsinguläre algebraische Varietät der Dimension $r$ und $V_{r-1}$ einen allgemeinen Hyperebenenschnitt in $V_r$. Dann ist die zur Inklusion $V_{r-1} \subset V_r$ gehörige Abbildung der Homologiegruppen

$$H_j(V_{r-1}, Z) \rightarrow H_j(V_r, Z)$$

bijektiv für $j < r-1$ und surjektiv für $j = r-1$.

Für diesen wichtigen Satz und seine Erweiterungen hat es seitdem eine Reihe verschiedener Beweise gegeben; erinnert sei etwa an die Namen Chow, Thom, Bott, Fary; eine ausführliche Darstellung der mit diesem Satz zusammenhängenden Fragen findet man in Wallace [6].

Andreotti und Frankel haben 1959 einen sehr kurzen Beweis geführt, der auch nicht notwendig singularitätenfreie Varietäten $V_r$ zuläßt, wenn nur $V_{r-1}$ ein Hyperflächenschnitt von $V_r$ ist, der die Singularitäten von $V_r$ enthält. Zum Beweise benutzen sie zwei Hilfsmittel: Eine Aussage über das Verschwinden der höheren Homologiegruppen Steinscher Mannigfaltigkeiten und den Dualitätssatz von Alexander-Poincaré ([1]). Dieser Dualitätssatz gilt natürlich auch für orientierbare topologische Mannigfaltigkeiten. Die Aussage über die Homologie Steinscher Mannigfaltigkeiten ließ sich nun auf Räume übertragen, d. h. es gilt (vgl. [4]):

**Satz:** *Es sei $X$ ein $n$-dimensionaler Steinscher Raum, dann ist $H_n(X, Z)$ torsionsfrei und für alle $p \geq 1$ ist $H_{n+p}(X, Z) = 0$.*

Analog zu [1] kann man damit den folgenden Satz formulieren und beweisen:

**Theorem von Lefschetz:** *Es sei $X_r$ eine irreduzible r-dimensionale algebraische Varietät in einem komplex projektiven Raum $P_N$, es bezeichne $X_{r-1}$ den Schnitt einer Hyperfläche $Y$ mit $X_r$; $Y$ enthalte die topologischen Singularitäten von $X_r$, aber nicht ganz $X_r$. Dann gilt: Der zur Inklusion $X_{r-1} \subset X_r$ gehörige Homomorphismus*

$$H^j(X_r, Z) \to H^j(X_{r-1}, Z)$$

*ist bijektiv für $j < r-1$*

*injektiv für $j = r-1$*

*und der Quotient $H^{r-1}(X_{r-1}, Z) / H^{r-1}(X_r, Z)$ ist frei.*

Zum Beweise kann man unter geeigneter Vergrößerung von $N$ annehmen, daß $Y$ eine Hyperebene ist ([1]). Dann ist $X_r - X_{r-1}$ ein irreduzibler Steinscher Raum und die exakte Kohomologiesequenz zum Paar $(X_r, X_{r-1})$ lautet:

$$\ldots \to H^i(X_r, X_{r-1}) \to H^i(X_r) \to H^i(X_{r-1}) \to H^{i+1}(X_r, X_{r-1}) \to \ldots$$

Da $X_r - X_{r-1}$ eine orientierbare ([3]) topologische Mannigfaltigkeit ist, folgt aus dem Dualitätssatz von Alexander-Poincaré: $H^i(X_r, X_{r-1}) = H_{2r-i}(X_r - X_{r-1})$. Aus dem oben angegebenen Satz folgt somit die Behauptung. Einschränkungen für die Singularitäten ergeben sich also nur aus der Anwendung des Dualitätssatzes.

Brieskorn hat in [2] gezeigt, daß es normale analytische Singularitäten gibt, die topologisch Mannigfaltigkeitspunkte sind. Mit Hilfe seines Ergebnisses läßt sich ein einfaches Beispiel angeben für einen Hyperflächenschnitt $X_{r-1}$ in $X_r$, der die topologischen Singularitäten von $X_r$ umfaßt, nicht aber die analytischen: Es sei $X_r$ für ungerades $r \geq 3$ die im $P_{r+1}$ durch die Gleichung

$$z_0(z_1^2 + \cdot\cdot + z_r^2) + z_{r+1}^3 = 0$$

definierte Hyperfläche. Im Punkte $(1, 0, \ldots, 0)$ liegt eine isolierte normale analytische Singularität vor, die jedoch nach Brieskorn ([2]) topologisch ein Mannigfaltigkeitspunkt ist. Die restlichen analytischen Singularitäten werden genau beschrieben durch

$$\{z_0 = 0\} \cap \{z_1^2 + \cdots + z_r^2 = 0\} \cap \{z_{r+1} = 0\}.$$

Bezeichnet $Q(u, v, w)$ ein nicht konstantes homogenes Polynom mit $Q(1, 0, 0) \neq 0$, dann ist ein solcher Hyperflächenschnitt

$$X_{r-1} := X_r \cap \{Q(z_0^2, z_1^2 + \cdots + z_r^2, z_{r+1}^2) = 0\}.$$

Durch zweimalige Anwendung des Theorems von Lefschetz zeigt man: $H^{r-1}(X_{r-1}, Z)$ ist frei und für $j < r-1$ gilt:

$$H^j(X_{r-1}, Z) = \begin{cases} Z \text{ für } j \equiv 0\ (2) \\ 0 \text{ für } j \equiv 1\ (2). \end{cases}$$

**Literatur:**

[1] Andreotti A., Frankel Th.: The Lefschetz theorem on hyperplane sections, Ann. of Math. 69, 713–717 (1959).

[2] Brieskorn, E.: Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. 55, 1395–1397 (1966).

[3] Giesecke, B.: Simpliziale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume, Math. Zeitschr. 83, 177–213 (1964).

[4] Kaup, L.: Eine topologische Eigenschaft Steinscher Räume, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II Jahrgang 1966, 213–224

[5] Lefschetz, S.: L'analysis situs et la géométrie algebrique (Gauthier-Villars, Paris 1924).

[6] Wallace, A. H.: Homology theory on algebryic varieties (Pergamon Press, London 1958).