BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Äquivalenz meromorpher und rationaler Funktionen

Von Karl Stein in München

Vorgelegt am 6. Mai 1966

Von verschiedenen Autoren ([6], [7], [11]; vgl. auch [3], [8], [10]) wurde die Frage behandelt, wann eine Funktion f von einer oder mehreren Veränderlichen zu einer Funktion, die von einer ihrer Veränderlichen ganz rational abhängt, „äquivalent" ist, d. h. wann sich f in eine derartige Funktion durch eine Veränderlichensubstitution transformieren läßt. Gegenstand der vorliegenden Note ist die entsprechende Frage nach der Äquivalenz von meromorphen Funktionen und Funktionen, die in einer ihrer Veränderlichen rational sind. Es werden einige Aussagen zum globalen und lokalen Aspekt des Problems angegeben. Die Beweise benützen den Uniformierungssatz und – im Falle von Funktionen mehrerer Veränderlichen – einen auf den Spezialfall Riemannscher Zahlensphären angewandten Satz von K. Kodaira und D. C. Spencer [5] (vgl. auch [4]) über die lokale Trivialität von holomorphen Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. Unter gewissen Voraussetzungen kann die gegebene Funktion durch äquivalente approximiert werden. Für Funktionen einer Veränderlichen ergibt sich so eine Ergänzung zum klassischen Rungeschen Approximationssatz (vgl. unten Satz 2).

1. **Satz 1.**[1] *Es seien: W ein Gebiet in $\overline{C}$, W_0 ein relativ kompaktes Teilgebiet von W, $\mathfrak{Z}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{Z}_0$ ein relativ kompaktes Teilgebiet von $\mathfrak{Z}$, $f : W \times \mathfrak{Z} \underset{m}{\longrightarrow} \overline{C}$ eine mero-*

[1] Zur Terminologie: Es bezeichne C die endliche komplexe Ebene, $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$ die erweiterte komplexe Ebene. Über meromorphe Abbildungen vgl. [9], § 4; wir übernehmen die dort benutzte Terminologie.

morphe Funktion, $f_0 := f \mid W \times \mathfrak{Z}_0$. *Auf* $(Rd\, W_0) \times \overline{\mathfrak{Z}}_0$ *habe* f *keinen Pol und keine Unbestimmtheitsstelle, und für jeden Punkt* $(w, \mathfrak{z}) \in (Rd\, W_0) \times \overline{\mathfrak{Z}}_0$ *sei* $\partial f / \partial w\, (w, \mathfrak{z}) \neq 0$.

Dann existieren injektive holomorphe Abbildungen $\Phi_\mu : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \rightarrow W \times \mathfrak{Z}_0$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Sind* $p_2 : W \times \mathfrak{Z}_0 \rightarrow \mathfrak{Z}_0$, $p_2' : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \rightarrow \mathfrak{Z}_0$ *die Projektionen, so ist stets* $p_2 \circ \Phi_\mu = p_2'$.

(2) *Die Folge* Φ_μ *konvergiert kompakt gegen die Inklusion* $W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \rightarrow W \times \mathfrak{Z}_0$.

(3) *Die meromorphen Funktionen* $f_0 \circ \Phi_\mu : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \underset{m}{\rightarrow} \overline{\boldsymbol{C}}$ *sind Beschränkungen meromorpher Funktionen* $\varrho_\mu : \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0 \underset{m}{\rightarrow} \overline{\boldsymbol{C}}$.

Beweis: Für $W = \overline{\boldsymbol{C}}$ ist die Aussage trivial (als Φ_μ kann jeweils die Inklusion $W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \rightarrow \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0$ gewählt werden). – Sei $W \neq \overline{\boldsymbol{C}}$. Es darf angenommen werden (nötigenfalls ist W_0 geeignet zu vergrößern), daß $Rd\, W_0$ aus endlich vielen disjunkten einfach geschlossenen stetigen Kurven $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_k$ besteht, die sämtlich in $W \setminus \{\infty\}$ liegen. Die offene Menge $\overline{\boldsymbol{C}} \setminus \overline{W}_0$ zerfällt in Gebiete $W_1, \ldots, W_k$; die Bezeichnung sei so vorgenommen, daß jeweils $Rd\, W_\varkappa = \mathfrak{K}_\varkappa$ ist. Es lassen sich relativ kompakte Teilgebiete $S_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ von $W \setminus \{\infty\}$ sowie ein relativ kompaktes Teilgebiet $\mathfrak{Z}_0^*$ von $\mathfrak{Z}$, in dem $\mathfrak{Z}_0$ relativ kompakt enthalten ist, mit folgenden Eigenschaften wählen: $S_\varkappa$ enthält $\mathfrak{K}_\varkappa$; $Rd\, S_\varkappa$ besteht aus zwei einfach geschlossenen stetigen Kurven, von denen eine in W_0 und die andere in $W_\varkappa$ liegt; für $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ ist $\overline{S}_{\varkappa_1} \cap \overline{S}_{\varkappa_2} = \theta$; in $(\bigcup_\varkappa \overline{S}_\varkappa) \times \overline{\mathfrak{Z}_0^*}$ hat f keinen Pol und keine Unbestimmtheitsstelle; für $(w, \mathfrak{z}) \in (\bigcup_\varkappa \overline{S}_\varkappa) \times \overline{\mathfrak{Z}_0^*}$ ist $\partial f / \partial w\, (w, \mathfrak{z}) \neq 0$. Die Beschränkung $f \mid \overline{S}_\varkappa \times \overline{\mathfrak{Z}_0^*}$ gestattet eine Rungesche Approximation durch meromorphe Funktionen, die in einer Umgebung von $(\overline{S}_\varkappa \cup W_\varkappa) \times \overline{\mathfrak{Z}_0^*}$ definiert und dort frei von Unbestimmtheitsstellen sind. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß gilt: Für je zwei Punkte $w^{(\varkappa)} \in \mathfrak{K}_\varkappa$ und $\tilde{w}^{(\varkappa)} \in Rd\, S_\varkappa$ ist

$|w^{(\varkappa)} - \tilde{w}^{(\varkappa)}| \geqq 2\varepsilon$; sind $(w_1^{(\varkappa)}, \mathfrak{z})$, $(w_2^{(\varkappa)}, \mathfrak{z})$ verschiedene Punkte aus $\overline{S_\varkappa} \times \overline{\mathfrak{Z}_0^*}$ mit $f(w_1^{(\varkappa)}, \mathfrak{z}) = f(w_2^{(\varkappa)}, \mathfrak{z})$, so ist $|w_1^{(\varkappa)} - w_2^{(\varkappa)}| \geqq 2\varepsilon$. Dann gibt es für $\varkappa = 1, .., k$ je eine Folge von meromorphen Funktionen $g_{\varkappa,\nu} : (S_\varkappa \cup W_\varkappa) \times \mathfrak{Z}_0^* \longrightarrow \overline{\boldsymbol{C}}$ $(\nu = 1, 2, ..)$, die von Unbestimmtheitsstellen frei sind, mit folgenden Eigenschaften: Es ist $g_{\varkappa,\nu}(S_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*) \subset \boldsymbol{C}$; für $(w, \mathfrak{z}) \in S_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*$ ist $\partial g_{\varkappa,\nu}/\partial w\,(w, \mathfrak{z}) \neq 0$; sei für $w^{(\varkappa)} \in \mathfrak{K}_\varkappa$ und $\delta > 0$ $M_\delta(w^{(\varkappa)}) := \{w \in \boldsymbol{C} : |w - w^{(\varkappa)}| < \delta\}$, ferner $S'_{\varkappa,\delta} := \bigcup_{w^{(\varkappa)} \in \mathfrak{K}_\varkappa} M_\delta(w^{(\varkappa)})$, dann gibt es zu jedem Punkt $(w, \mathfrak{z}) \in S'_{\varkappa,\varepsilon} \times \mathfrak{Z}_0^*$ genau einen Punkt $(\tilde{w}_\nu, \mathfrak{z}) \in S_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*$ mit $|w - \tilde{w}_\nu| < \varepsilon/2$ und $g_{\varkappa,\nu}(\tilde{w}_\nu, \mathfrak{z}) = f(w, z)$; die Folge der Beschränkungen $g_{\varkappa,\nu} | S_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*$ konvergiert kompakt gegen $f | S_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*$. – Durch die Zuordnung $(w, \mathfrak{z}) \rightsquigarrow (\tilde{w}_\nu, \mathfrak{z})$ werden Abbildungen $\Psi_{\varkappa,\nu} : S'_{\varkappa,\varepsilon} \times \mathfrak{Z}_0^* \longrightarrow S_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*$ definiert. Jedes $\Psi_{\varkappa,\nu}$ ist holomorph, offen und injektiv, und für jedes $\varkappa$ konvergiert die Folge $\Psi_{\varkappa,\nu}$ kompakt gegen die Inklusion $S'_{\varkappa,\varepsilon} \times \mathfrak{Z}_0^* \longrightarrow S_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*$; es gilt ferner $\Psi_{\varkappa,\nu}(((S'_{\varkappa,\varepsilon} \setminus S'_{\varkappa,\varepsilon/2}) \cap W_0) \times \mathfrak{Z}_0^*) \subset W_0 \times \mathfrak{Z}_0^*$ und $\Psi_{\varkappa,\nu}(((S'_{\varkappa,\varepsilon} \setminus S'_{\varkappa,\varepsilon/2}) \cap W_\varkappa) \times \mathfrak{Z}_0^*) \subset W_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*$.

Sei $B := ((\bigcup_\varkappa S'_{\varkappa,\varepsilon}) \cup W_0) \times \mathfrak{Z}_0^*$ und $\tilde{B} := \bigcup_\varkappa (W_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*)$. Für jedes ν werden jetzt B und $\tilde{B}$ vermöge der Abbildungen $\Psi_{\varkappa,\nu}$ miteinander verheftet: Zwei Punkte $(w, \mathfrak{z}) \in B$ und $(\tilde{w}, \mathfrak{z}) \in \tilde{B}$ werden identifiziert, wenn für ein $\varkappa$ $(w, \mathfrak{z}) \in S'_{\varkappa,\varepsilon} \times \mathfrak{Z}_0^*$ und $(\tilde{w}, \mathfrak{z}) = \Psi_{\varkappa,\nu}(w, \mathfrak{z})$ ist; es entstehen so komplexe Mannigfaltigkeiten X_ν. Man hat Inklusionen $i_\nu : B \longrightarrow X_\nu$ und $\tilde{i}_\nu : \tilde{B} \longrightarrow X_\nu$, ferner holomorphe Abbildungen $\pi_\nu : X_\nu \longrightarrow \mathfrak{Z}_0^*$, derart, daß $\pi_\nu \circ i_\nu = p_2^* | B$ und $\pi_\nu \circ \tilde{i}_\nu = p_2^* | \tilde{B}_\nu$ ist ($p_2^* : \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0^* \longrightarrow \mathfrak{Z}_0^*$ die Projektion).

Die Abbildungen π_ν sind regulär, und für jedes $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_0^*$ ist $\pi_\nu^{-1}(\mathfrak{z})$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht Null; $\pi_\nu : X_\nu \longrightarrow \mathfrak{Z}_0^*$ repräsentiert also für jedes ν eine holomorphe Familie Riemannscher Zahlensphären über $\mathfrak{Z}_0^*$. Weiter werden durch f und die $g_{\varkappa,\nu}$ meromorphe Funktionen $'f_\nu : X_\nu \underset{m}{\longrightarrow} \overline{\boldsymbol{C}}$ festgelegt, indem für $x \in X_\nu$ gesetzt wird

$$'f_\nu(x) := f(w, \mathfrak{z}), \text{ falls } w \in \overline{W}_0 \text{ und } x = i_\nu(w, \mathfrak{z}),$$

$$\text{bzw. } 'f_\nu(x) := g_{\varkappa,\nu}(\tilde{w}, \mathfrak{z}), \text{ falls } \tilde{w} \in W_\varkappa \text{ und } x = \tilde{i}_\nu(\tilde{w}, \mathfrak{z}).$$

Die holomorphen Familien $\pi_\nu : X_\nu \longrightarrow \mathfrak{Z}_0^*$ sind nun lokal trivial ([5], vgl. auch [4]). Zu jedem ν gibt es daher eine Überdeckung von $\mathfrak{Z}_0^*$ durch offene Mengen $U_{\nu,j}$ sowie holomorphe Abbildungen $\tau_{\nu,j} : \pi_\nu^{-1}(U_{\nu,j}) \longrightarrow \overline{C}$, derart, daß für $\mathfrak{z} \in U_{\nu,j}$ die Beschränkung $\tau_{\nu,j} \mid \pi_\nu^{-1}(\mathfrak{z}) : \pi_\nu^{-1}(\mathfrak{z}) \longrightarrow \overline{C}$ stets biholomorph ist. Die $\tau_{\nu,j}$ können und sollen wie folgt normiert werden: Sei $w_0 \in W_0$ $(w_0 \neq \infty)$ ein festgewählter Punkt; für alle $\mathfrak{z} \in U_{\nu,j}$ sei dann $\tau_{\nu,j} \circ i_\nu (w_0, \mathfrak{z}) = w_0$, $\tau_{\nu,j} \circ i_\nu (\infty, \mathfrak{z}) = \infty$, falls $\infty \in W_0$, bzw. $\tau_{\nu,j} \circ \tilde{i}_\nu (\infty, \mathfrak{z}) = \infty$, falls $\infty \notin W_0$, $\partial (\tau_{\nu,j} \circ i_\nu)/\partial w (w_0, \mathfrak{z}) = 1$. Hierdurch sind die $\tau_{\nu,j}$ eindeutig festgelegt; es folgt, daß für jedes ν die $\tau_{\nu,j}$ holomorphe Fortsetzungen voneinander, also Beschränkungen einer holomorphen Abbildung $\tau_\nu : X_\nu \longrightarrow \overline{C}$ sind (die Familien $\pi_\nu : X_\nu \longrightarrow \mathfrak{Z}_0^*$ sind also auch global trivial).

Sei $\sigma_\nu := (\tau_\nu, \pi_\nu) : X_\nu \longrightarrow \overline{C} \times \mathfrak{Z}_0^*$ und $h_\nu := \sigma_\nu \circ i_\nu : B \longrightarrow \overline{C} \times \mathfrak{Z}_0^*$ gesetzt; die σ_ν sind biholomorphe und die h_ν injektive holomorphe Abbildungen. Es wird zunächst gezeigt, daß die h_ν kompakt gegen die Inklusion $B \longrightarrow \overline{C} \times \mathfrak{Z}_0^*$ konvergieren. – Auf Grund von Sätzen über schlichte Funktionen (vgl. [1]) bilden wegen der Normierung der $\tau_{\nu,j}$ die h_ν eine normale Familie; die gleiche Eigenschaft haben die Abbildungen $\tilde{h}_\nu := \sigma_\nu \circ \tilde{i}_\nu : \tilde{B} \longrightarrow \overline{C} \times \mathfrak{Z}_0^*$. Es gibt also Teilfolgen h_{ν_λ} und $\tilde{h}_{\nu_\lambda}$, die kompakt gegen holomorphe Abbildungen $h_0 : B \longrightarrow \overline{C} \times \mathfrak{Z}_0^*$ bzw. $\tilde{h}_0 : \tilde{B} \longrightarrow \overline{C} \times \mathfrak{Z}_0^*$ konvergieren. Für jeden Punkt $(w, \mathfrak{z}) \in S'_{\varkappa,\varepsilon} \times \mathfrak{Z}_0^*$ mit $\Psi_{\varkappa,\nu}(w, \mathfrak{z}) \in W_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*$ gilt $h_\nu(w, \mathfrak{z}) = \tilde{h}_\nu(\Psi_{\varkappa,\nu}(w, \mathfrak{z}))$; da die $\Psi_{\varkappa,\nu}$ für jedes $\varkappa$ kompakt gegen die Inklusion $S'_{\varkappa,\varepsilon} \times \mathfrak{Z}_0^* \longrightarrow S_\varkappa \times \mathfrak{Z}_0^*$ konvergieren, folgt $h_0(w, \mathfrak{z}) = \tilde{h}_0(w, \mathfrak{z})$ für alle $(w, \mathfrak{z}) \in \left(\bigcup_\varkappa (S'_{\varkappa,\varepsilon} \cap W_\varkappa)\right) \times \mathfrak{Z}_0^*$. Die Abbildungen h_0 und $\tilde{h}_0$ sind also holomorphe Fortsetzungen voneinander, sie bestimmen eine holomorphe Abbildung $H : \overline{C} \times \mathfrak{Z}_0^* \longrightarrow \overline{C} \times \mathfrak{Z}_0^*$. Sei $H_\mathfrak{z} : \overline{C} \longrightarrow \overline{C}$ $(\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_0^*)$ die durch $w \rightsquigarrow w'$, falls $H(w, \mathfrak{z}) = (w', \mathfrak{z})$, gegebene Abbildung. Wegen der Normierung der τ_ν ist $H_\mathfrak{z}(w_0) = w_0$, $H_\mathfrak{z}(\infty) = \infty$ und $dH_\mathfrak{z}/dw\,(w_0) = 1$; insbesondere ist kein $H_\mathfrak{z}$ konstant. Die Beschränkungen $H_\mathfrak{z} \mid \bigcup_\varkappa S'_{\varkappa,\varepsilon} \cup W_0$ und $H_\mathfrak{z} \mid W_\varkappa$ sind als nichtkonstante Grenzfunktionen von kompakt konvergenten Folgen schlichter Funktionen schlicht. Es folgt, daß die $H_{\mathfrak{z}}$ biholomorphe Abbildungen sind und daß deshalb jedes $H_{\mathfrak{z}}$ mit der Identität von $\overline{\boldsymbol{C}}$ übereinstimmt. Mithin ist H die identische Abbildung von $\overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0^*$ und $h_0 = H \mid B$ die Inklusion $B \longrightarrow \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0^*$. Die Teilfolge h_{ν_λ} der Folge h_ν konvergiert demnach kompakt gegen die Inklusion $B \longrightarrow \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0^*$; das gleiche muß dann für die Gesamtfolge h_ν zutreffen.

Ist $B' := (\bigcup_\varkappa S'_{\varkappa,\varepsilon} \cup W_0) \times \mathfrak{Z}_0$, so gilt insbesondere $h_\nu(B') =: D_\nu \supset W_0 \times \mathfrak{Z}_0$ für fast alle ν, etwa für $\nu > \nu_0$. Sei $h'_\nu : B' \longrightarrow D_\nu$ die durch Beschränkung von h_ν bestimmte biholomorphe Abbildung; dann ist für $\nu > \nu_0$ $h_\nu'^{-1} \mid W_0 \times \mathfrak{Z}_0 : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \longrightarrow B'$ als holomorphe Abbildung definiert. Bezeichnet noch $\iota : B' \longrightarrow W \times \mathfrak{Z}_0$ die Inklusion, so werde jetzt $\Phi_\mu := \iota \circ h'^{-1}_{\mu+\nu_0} \mid W_0 \times \mathfrak{Z}_0 : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \longrightarrow W \times \mathfrak{Z}_0$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ gesetzt. Die Abbildungen Φ_μ haben die im Satz behaupteten Eigenschaften: Sie sind holomorph und injektiv; (1) ist ersichtlich erfüllt; (2): die Φ_μ konvergieren kompakt gegen die Inklusion $W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \longrightarrow W \times \mathfrak{Z}_0$, weil die h_ν kompakt gegen die Inklusion $B \longrightarrow \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0^*$ konvergieren; (3): $f_0 \circ \Phi_\mu : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \xrightarrow[m]{} \overline{\boldsymbol{C}}$ ist Beschränkung der meromorphen Funktion $\varrho_\mu := {}'f_{\mu+\nu_0} \circ \sigma^{-1}_{\mu+\nu_0} \mid \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0 : \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0 \longrightarrow \overline{\boldsymbol{C}}$. – Damit ist Satz 1 bewiesen.

Wir schließen einige Bemerkungen an.

Jede meromorphe Funktion $\varrho : \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0 \xrightarrow[m]{} \overline{\boldsymbol{C}}$ ist eine rationale Funktion in der in $\overline{\boldsymbol{C}}$ laufenden Variablen mit Koeffizienten aus dem Körper der in $\mathfrak{Z}_0$ meromorphen Funktionen. Sind die Pole und Unbestimmtheitsstellen von ϱ in der Menge $\{\infty\} \times \mathfrak{Z}_0$ enthalten, so ist ϱ ein Polynom über dem Ring der in $\mathfrak{Z}_0$ holomorphen Funktionen.

In Satz 1 besagt (3) demnach, daß die meromorphen Funktionen $f_0 \circ \Phi_\mu : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \xrightarrow[m]{} \overline{\boldsymbol{C}}$ in der ersten Variablen rational sind. Die Φ_μ lassen sich in der Gestalt $\Phi_\mu = (\varphi_\mu, p'_2)$ mit holomorphen Abbildungen $\varphi_\mu : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \longrightarrow W$ schreiben; es ist dann also jeweils $f_0(\varphi_\mu(w, \mathfrak{z}), \mathfrak{z})$ in w rational.

Ein Fall, in welchem sich f_0 sogar in Polynome in der ersten Variablen transformieren läßt, liegt vor, wenn W_0 einfach zusammenhängend ist und wenn $\overline{W_0} \subset \boldsymbol{C}$, $f(\overline{W_0} \times \overline{\mathfrak{Z}_0}) \subset \boldsymbol{C}$ gilt.

Dies ergibt sich durch geeignete Spezialisierung des Beweises zu Satz 1: Es kann jetzt $k = 1$ angenommen werden; ferner können die Funktionen $g_{1,\nu}$ so gewählt werden, daß ihre Pole in der Menge $\{\infty\} \times \mathfrak{Z}_0^*$ enthalten sind. Die Pole von $'f_\nu$ liegen dann in der Menge $\tilde{i}_\nu(\{\infty\} \times \mathfrak{Z}_0^*) \subset X_\nu$, die Pole von ϱ_μ daher in der Menge $(\infty\} \times \mathfrak{Z}_0$. Also sind die ϱ_μ, wie oben festgestellt, Polynome in der ersten Variablen.

Durch Satz 1 wird auch eine Aussage über die Möglichkeit einer speziellen Approximation der meromorphen Funktion f in $W_0 \times \mathfrak{Z}_0$ geliefert: Da die Φ_μ kompakt gegen die Inklusion $W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \longrightarrow W \times \mathfrak{Z}_0$ konvergieren, folgt, daß die meromorphen Funktionen $\varrho_\mu | W_0 \times \mathfrak{Z}_0$ kompakt gegen $f | W_0 \times \mathfrak{Z}_0$ konvergieren.[2]

2. Die in Satz 1 enthaltene Aussage über Funktionen einer Veränderlichen (sie entspricht dem Spezialfall, daß $\mathfrak{Z}$ ein Punkt ist) gestattet eine vereinfachte Formulierung, da besondere Voraussetzungen über die gegebene meromorphe Funktion überflüssig sind. Denn ist $f: W \longrightarrow \overline{\mathbf{C}}$ konstant, so wird die Aussage trivial; ist aber f nicht konstant, so läßt sich W_0 stets nötigenfalls so vergrößern, daß die der Voraussetzung von Satz 1 entsprechenden Forderungen über das Verhalten von f in den Randpunkten von W_0 erfüllt werden. Wir fassen die so aus Satz 1 und den zusätzlichen Bemerkungen unter 1. sich ergebenden Folgerungen zusammen zu

Satz 2. *Sei W ein Gebiet in $\overline{\mathbf{C}}$, W_0 ein relativ kompaktes Teilgebiet von W, $f: W \longrightarrow \overline{\mathbf{C}}$ eine meromorphe Funktion. Dann existiert eine Folge von injektiven holomorphen Abbildungen $\Phi_\mu: W_0 \longrightarrow W$, die kompakt gegen die Inklusion $W_0 \longrightarrow W$ konvergiert, derart, daß stets $f \circ \Phi_\mu$ Beschränkung einer rationalen Funktion $\varrho_\mu: \overline{\mathbf{C}} \longrightarrow \overline{\mathbf{C}}$ ist. Die Funktionen $\varrho_\mu | W_0$ konvergieren kompakt gegen $f | W_0$. Ist insbesondere W_0 einfach zusammenhängend und gilt $\overline{W}_0 \subset \mathbf{C}$ sowie $f(\overline{W}_0) \subset \mathbf{C}$, dann lassen sich*

---

[2] In der Menge der meromorphen Abbildungen $X \xrightarrow[m]{} Y$ eines komplexen Raumes X in einem komplexen Raum Y wird die Topologie der kompakten Konvergenz wie üblich definiert; vgl. [2], p. 19.

die Abbildungen Φ_μ *so wählen, daß die Funktionen* ϱ_μ *ganz rational werden.*

3. Die folgende Aussage betrifft die Möglichkeit, eine meromorphe Funktion lokal in eine in bezug auf eine Veränderliche rationale Funktion spezieller Art zu transformieren.

Satz 3. *Es seien:* $W := \{w \in \boldsymbol{C} : |w| < \delta\}$ ein Kreis, $\mathfrak{Z} := \{\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n : |\mathfrak{z}| = \mathrm{Max}\,(|z_1|, \ldots, |z_n|) < \delta'\}$ $(n \geqq 1)$ *ein Polyzylinder,* $f : W \times \mathfrak{Z} \xrightarrow[m]{} \overline{\boldsymbol{C}}$ *eine meromorphe Funktion, derart, daß* $W \times \{\mathfrak{o}\} =: E$ ($\mathfrak{o}$ *der Ursprung des* $\boldsymbol{C}^n$) *nicht in der Menge der Unbestimmtheitsstellen von* f *enthalten, die meromorphe Beschränkung* $f \underset{m}{|} E =: f_0$ *also definiert ist. Es sei* f_0 *nicht konstant und* $f_0(0, \mathfrak{o}) = c \neq \infty$. *Dann existieren ein in* W *enthaltener Kreis* $W_0 := \{w \in \boldsymbol{C} : |w| < \delta_0\}$, *ein in* $\mathfrak{Z}$ *enthaltener Polyzylinder* $\mathfrak{Z}_0 := \{\mathfrak{z} \in \boldsymbol{C}^n : |\mathfrak{z}| < \delta'_0\}$ *und eine holomorphe Funktion* $\omega : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Es ist* $|\omega(w, \mathfrak{z})| < \delta$ *für* $(w, \mathfrak{z}) \in W_0 \times \mathfrak{Z}_0$ *und* $\omega(0, \mathfrak{o}) = 0$; *für jedes* $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_0$ *ist* $\omega \,|\, W_0 \times \{\mathfrak{z}\}$ *injektiv.*

(2) *Es gibt zwei teilerfremde ausgezeichnete Pseudopolynome* $Q_i = w^{d_i} + a_{1,i}\, w^{d_i - 1} + \cdots + a_{d_i, i}$ $(i = 1, 2)$ *mit in* $\mathfrak{Z}_0$ *holomorphen und in* $\mathfrak{o}$ *verschwindenden Koeffizienten* $a_{\lambda, i}$, *wobei* $d_1 > d_2 \geqq 0$ *und* $a_{1,1} = 0$ *ist, so daß*

$$f(\omega(w, \mathfrak{z}), \mathfrak{z}) = \frac{Q_1(w, \mathfrak{z})}{Q_2(w, \mathfrak{z})} + c$$

für $(w, \mathfrak{z}) \in W_0 \times \mathfrak{Z}_0$ *gilt.*

Ist $\tilde{\omega} : \tilde{W}_0 \times \tilde{\mathfrak{Z}}_0 \longrightarrow \boldsymbol{C}$ $(\tilde{W}_0 \times \tilde{\mathfrak{Z}}_0 \subset W \times \mathfrak{Z})$ *eine holomorphe Funktion mit entsprechenden Eigenschaften, so gilt für* $(w, \mathfrak{z}) \in (W \cap \tilde{W}_0) \times (\mathfrak{Z}_0 \cap \tilde{\mathfrak{Z}}_0)$

$$\tilde{\omega}(w, \mathfrak{z}) = \omega(\eta\, w, \mathfrak{z}),$$

wo η *eine* $(d_1 - d_2)$*-te Einheitswurzel bezeichnet.*

Beweis: f_0 ist in $(0, \mathfrak{o})$ holomorph und auf E nicht konstant; sei $f_0(w, \mathfrak{o}) = c + c_d w^d + \ldots$ $(d \geqq 1,\ c_d \neq 0,\ |w| < r_0 \leqq \delta)$ die Taylorentwicklung von f_0 in $(0, \mathfrak{o})$.

Es lassen sich positive reelle Zahlen r, r', ε so wählen, daß folgendes gilt: Es ist $0 < r - 2\varepsilon$, $r + 2\varepsilon < r_0$, $r' < \delta'$; sei $W_0^* : \{w \in \boldsymbol{C} : |w| < r\}$, $S := \{w \in \boldsymbol{C} : r - 2\varepsilon < |w| < r + 2\varepsilon\}$, $\mathfrak{Z}_0^* := \{\mathfrak{z} \in \boldsymbol{C}^n : |\mathfrak{z}| < r'\}$, dann hat f in $\overline{S} \times \overline{\mathfrak{Z}_0^*}$ und in $((W_0^* \cup \overline{S}) \setminus \{0\}) \times \{\mathfrak{o}\}$ keine Pol- und Unbestimmtheitsstellen, und es ist $\partial f / \partial w (w, \mathfrak{z}) \neq 0$ für $(w, \mathfrak{z}) \in \overline{S} \times \overline{\mathfrak{Z}_0^*}$; sind $(w_1, \mathfrak{z})$, $(w_2, \mathfrak{z})$ verschiedene Punkte aus $\overline{S} \times \overline{\mathfrak{Z}_0^*}$ mit $f(w_1, \mathfrak{z}) = f(w_2, \mathfrak{z})$, so ist $|w_1 - w_2| \geqq 2\varepsilon$; sei $S' := \{w \in \boldsymbol{C} : r - \varepsilon < |w| < r + \varepsilon\}$, dann existiert zu jedem $(w, \mathfrak{z}) \in S' \times \mathfrak{Z}_0^*$ genau ein $\tilde{w} \in S$ mit $|w - \tilde{w}| < \varepsilon/2$ und $c + c_d \tilde{w}^d = f(w, \mathfrak{z})$.

Es sei $B^* := (S' \cup W_0^*) \times \mathfrak{Z}_0^*$. Entsprechend wie im Beweis zu Satz 1 folgt die Existenz einer injektiven holomorphen Abbildung $h : B^* \to \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0^*$ sowie einer meromorphen Funktion $\varrho : \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0^* \underset{m}{\to} \overline{\boldsymbol{C}}$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $h(w, \mathfrak{z}) = (w', \mathfrak{z}')$, so ist stets $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}$, ferner $w' = 0$ falls $w = 0$; sei $h(B^*) =: D$, ${}^*h : B^* \to D$ die durch Beschränkung von h bestimmte biholomorphe Abbildung, $j : B^* \to W \times \mathfrak{Z}$ die Inklusion, dann ist $f \circ j \circ {}^*h^{-1} = \varrho | D : D \underset{m}{\to} \overline{\boldsymbol{C}}$; jeder Punkt von $\{\infty\} \times \mathfrak{Z}_0^*$ ist Pol d. Ordnung von ϱ, kein Punkt $(w, \mathfrak{o}) \in \overline{\boldsymbol{C}} \times \{\mathfrak{o}\}$ mit $0 < |w| < \infty$ ist Pol oder Unbestimmtheitsstelle von ϱ; sei $\varrho_0 := \varrho \underset{m}{|} \overline{\boldsymbol{C}} \times \{\mathfrak{o}\}$, dann ist $\varrho_0(w, \mathfrak{o}) = c + c_d w^d$. Aus den Eigenschaften von ϱ ergibt sich, daß eine Darstellung

$$(*) \qquad \varrho(w, \mathfrak{z}) - c = \frac{a_{0,1}^*(\mathfrak{z})\, w^{d_1} + a_{1,1}^*(\mathfrak{z})\, w^{d_1 - 1} + \cdots + a_{d_1,1}^*(\mathfrak{z})}{a_{0,2}^*(\mathfrak{z})\, w^{d_2} + \cdots + a_{d_2,2}^*(\mathfrak{z})}$$

mit in $\mathfrak{Z}_0^*$ holomorphen Funktionen $a_{\lambda,i}^*$ gilt, wobei die Funktionen im Zähler und Nenner rechts in $(*)$ überall teilerfremd sind, und $d_1 - d_2 = d$, $a_{0,i}^*(\mathfrak{z}) \neq 0$ $(i = 1, 2)$,

$$a_{0,1}^*(\mathfrak{o}) / a_{0,2}^*(\mathfrak{o}) = c_d, \quad a_{\lambda,i}^*(\mathfrak{o}) = 0 \quad (\lambda > 0;\ i = 1, 2)$$

ist. Sei a eine holomorphe Funktion in $\mathfrak{Z}_0^*$, so daß $a^d = a_{02}^* / a_{01}^*$. Aus $(*)$ folgt

$$\varrho(a(\mathfrak{z})\, w, \mathfrak{z}) - c = \frac{w^{d_1} + a_{1,1}'(\mathfrak{z})\, w^{d_1 - 1} + \cdots + a_{d_1,1}'(\mathfrak{z})}{w^{d_2} + \cdots + a_{d_2',2}(\mathfrak{z})}$$

und

$$\varrho\big(a(\mathfrak{z})\,(w - d_1^{-1}\,a'_{1,1}(\mathfrak{z})), \mathfrak{z}\big) - c = \frac{w^{d_1} + a_{2,1}(\mathfrak{z})\,w^{d_1-2} + \cdots + a_{d_1,1}(\mathfrak{z})}{w^{d_2} + \cdots + a_{d_2,2}(\mathfrak{z})}$$

mit in $\mathfrak{Z}_0^*$ holomorphen Funktionen $a'_{\lambda,i}$, $a_{\lambda,i}$ (im Falle $d_1 = 1$ wird die rechte Seite der letzten Gleichung gleich w). Es bezeichne $\Psi : \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0^* \longrightarrow \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_0^*$ die durch $(w, \mathfrak{z}) \rightsquigarrow ('w, '\mathfrak{z})$ mit $'w = a(\mathfrak{z})\,\big(w - d_1^{-1}\,a'_{1,1}(\mathfrak{z})\big)$, $'\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$ gegebene biholomorphe Abbildung. Sei weiter δ'_0 eine positive reelle Zahl mit $\delta'_0 < r'$ und $\mathfrak{Z}_0 := \{\mathfrak{z} \in \boldsymbol{C}^n : |\mathfrak{z}| < \delta'_0\}$, dann läßt sich ein positives δ_0 mit $\delta_0 < r$ so wählen, daß, wenn $W_0 := \{w \in \boldsymbol{C} : |w| < \delta_0\}$, $\Psi(W_0 \times \mathfrak{Z}_0) \subset D$ gilt. Sei $'\Psi : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \longrightarrow D$ die durch Beschränkung von Ψ bestimmte injektive holomorphe Abbildung und $\Omega := j \circ {}^*h^{-1} \circ {}'\Psi : W_0 \times \mathfrak{Z}_0 \longrightarrow W \times \mathfrak{Z}$. Ist $\Omega(w, \mathfrak{z}) = (w^*, \mathfrak{z})$, so kann $w^* = \omega(w, \mathfrak{z})$ geschrieben werden, wo ω eine in $W_0 \times \mathfrak{Z}_0$ holomorphe Funktion ist. W_0, $\mathfrak{Z}_0$, ω haben die im Satz behaupteten Eigenschaften.

Es bleibt die Eindeutigkeitsbehauptung nachzuweisen.

In einem in $(W_0 \cap \tilde{W}_0) \times (\mathfrak{Z}_0 \cap \tilde{\mathfrak{Z}}_0)$ enthaltenen Polyzylinder $W_1 \times \mathfrak{Z}_1 := \{(w, \mathfrak{z}) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^n : |w| < \delta_1,\ |\mathfrak{z}| < \delta'_1\}$ mit geeignet gewählten δ_1, δ'_1 gibt es eine holomorphe Funktion $'\alpha : W_1 \times \mathfrak{Z}_1 \longrightarrow \boldsymbol{C}$, derart, daß $'\alpha(0, \mathfrak{o}) = 0$, $|'\alpha(w, \mathfrak{z})| < \delta_0$, $\tilde{\omega}(w, \mathfrak{z}) = \omega\big('\alpha(w, \mathfrak{z}), \mathfrak{z}\big)$ für $(w, \mathfrak{z}) \in W_1 \times \mathfrak{Z}_1$ gilt und daß $'\alpha | W_1 \times \{\mathfrak{z}\}$ für jedes $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_1$ injektiv ist. Zu zeigen ist $'\alpha(w, \mathfrak{z}) = \eta w$ (η eine d. Einheitswurzel).

In $\tilde{W}_0 \times \tilde{\mathfrak{Z}}_0$ sei

$$f\big(\tilde{\omega}(w, \mathfrak{z}), \mathfrak{z}\big) = \frac{\tilde{Q}_1(w, \mathfrak{z})}{\tilde{Q}_2(w, \mathfrak{z})} + c,$$

wo

$$\tilde{Q}_i = w^{\tilde{d}_i} + \tilde{a}_{1,i}\,w^{\tilde{d}_i - 1} + \cdots + a_{\tilde{d}_i, i} \qquad (i = 1, 2)$$

teilerfremde ausgezeichnete Pseudopolynome mit in $\tilde{\mathfrak{Z}}_0$ holomorphen Koeffizienten $\tilde{a}_{\lambda,i}$ bezeichnen und $\tilde{a}_{1,1} = 0$, $\tilde{d}_1 > \tilde{d}_2 \geqq 0$ ist. Da $f_0 - c$ in $(0, \mathfrak{o})$ eine Nullstelle d. Ordnung besitzt, muß $\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2 = d$ sein. Sei $q := Q_1 / Q_2$, $\tilde{q} := \tilde{Q}_1 / \tilde{Q}_2$; für beide Funktionen ist jeder Punkt von $\{\infty\} \times \mathfrak{Z}_1$ Pol d. Ordnung, und zwar gilt genauer: Es gibt eine Umgebung U der Menge $(\{\infty\} \times \mathfrak{Z}_1) \cup ((\overline{\mathbf{C}} \times \{\mathfrak{o}\}) \setminus (\mathrm{o}, \mathfrak{o}))$ in $\overline{\mathbf{C}} \times \mathfrak{Z}_1$ und holomorphe Funktionen $\beta : U \longrightarrow \mathbf{C}$, $\tilde{\beta} : U \longrightarrow \mathbf{C}$, so daß in U

$$q(w, \mathfrak{z}) = w^d\bigl(1 + \beta(w, \mathfrak{z})\bigr), \tilde{q}(w, \mathfrak{z}) = w^d\bigl(1 + \tilde{\beta}(w, \mathfrak{z})\bigr),$$
$$\beta(w, \mathfrak{o}) = \tilde{\beta}(w, \mathfrak{o}) = 0, \quad \beta(\infty, \mathfrak{z}) = \tilde{\beta}(\infty, \mathfrak{z}) = 0$$

ist. Es sei weiter $f_{\mathfrak{z}} : W \longrightarrow \overline{\mathbf{C}}$ die durch $w \rightsquigarrow w' = = (f \underset{m}{|} W \times \{\mathfrak{z}\})(w)$ $(\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z})$ definierte Abbildung; entsprechend werden $q_{\mathfrak{z}} : \overline{\mathbf{C}} \longrightarrow \overline{\mathbf{C}}$ $(\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_0)$, $\tilde{q}_{\mathfrak{z}} : \overline{\mathbf{C}} \longrightarrow \overline{\mathbf{C}}$ $(\mathfrak{z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_0)$, $\omega_{\mathfrak{z}} : W_0 \longrightarrow \mathbf{C}$ $(\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_0)$, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{z}} : \tilde{W}_0 \longrightarrow \mathbf{C}$ $(\mathfrak{z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_0)$ und $'\alpha_{\mathfrak{z}} : W_1 \longrightarrow \mathbf{C}$ $(\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_1)$ definiert. Man hat für $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_1$ in W_1

$$f_{\mathfrak{z}}\bigl(\omega_{\mathfrak{z}}(w)\bigr) - c = q_{\mathfrak{z}}(w), f_{\mathfrak{z}}\bigl(\tilde{\omega}_{\mathfrak{z}}(w)\bigr) - c = \tilde{q}_{\mathfrak{z}}(w),$$
$$\tilde{\omega}_{\mathfrak{z}}(w) = \omega_{\mathfrak{z}}\bigl('\alpha_{\mathfrak{z}}(w)\bigr),$$

also

$$\tilde{q}_{\mathfrak{z}}(w) = q_{\mathfrak{z}}\bigl('\alpha_{\mathfrak{z}}(w)\bigr).$$

Der Graph $G['\alpha_{\mathfrak{z}}]$ von $'\alpha_{\mathfrak{z}}$ ist daher im Graphen $G[q_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \tilde{q}_{\mathfrak{z}}]$ der holomorphen Korrespondenz $q_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \tilde{q}_{\mathfrak{z}} : \overline{\mathbf{C}} \underset{k}{\longrightarrow} \overline{\mathbf{C}}$ (vgl. [9]) enthalten. $G[q_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \tilde{q}_{\mathfrak{z}}]$ wird in einer Umgebung von (∞, ∞) gegeben durch $\{(\tilde{w}, w) : \tilde{w}^d(1 + \tilde{\beta}(\tilde{w}, \mathfrak{z})) = w^d(1 + \beta(w, \mathfrak{z})\}$, zerfällt dort also in d Komponenten; genauer gilt: Zu jedem $\varepsilon_1 > 0$ gibt es positive ε_2, $\tilde{\varepsilon}_2$, δ_2 mit $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ und $\tilde{\varepsilon}_2 < \varepsilon_1$, so daß, wenn $|\mathfrak{z}| < \delta_2$, die lokal-analytische Menge $G[q_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \tilde{q}_{\mathfrak{z}}] \cap (\{\tilde{w} \in \overline{\mathbf{C}} : |\tilde{w}| > \tilde{\varepsilon}_2\} \times \{w \in \overline{\mathbf{C}} : |w| > \varepsilon_2\})$ aus d irreduziblen Komponenten besteht, von denen jede der Graph einer injektiven holomorphen Abbildung $\{\tilde{w} \in \overline{\mathbf{C}} : |\tilde{w}| > \tilde{\varepsilon}_2\} \longrightarrow \{w \in \overline{\mathbf{C}} : |w| > \varepsilon_2\}$ mit $\infty \rightsquigarrow \infty$ ist. Es folgt, daß sich $'\alpha_{\mathfrak{z}}$ zu einer biholomorphen Abbildung $\alpha_{\mathfrak{z}} : \overline{\mathbf{C}} \longrightarrow \overline{\mathbf{C}}$ mit $\alpha_{\mathfrak{z}}(\infty) = \infty$ fortsetzen läßt, falls $|\mathfrak{z}|$ genügend klein ist. $\alpha_{\mathfrak{z}}$ hat die Gestalt $\alpha_{\mathfrak{z}}(w) = \eta_{\mathfrak{z}} w + \gamma_{\mathfrak{z}}$ ($\eta_{\mathfrak{z}}, \gamma_{\mathfrak{z}}$ komplexe Konstanten); da $\tilde{q}_{\mathfrak{z}} = q_{\mathfrak{z}} \circ \alpha_{\mathfrak{z}}$, also $w^d\bigl(1 + \tilde{\beta}(w, \mathfrak{z})\bigr) = (\eta_{\mathfrak{z}} w + \gamma_{\mathfrak{z}})^d\bigl(1 + \beta(\eta_{\mathfrak{z}} w + \gamma_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{z})\bigr)$, falls $|w|$ genügend groß ist, muß $|\eta_{\mathfrak{z}}|^d = 1$ sein.

Es folgt weiter, daß $'\alpha$ Beschränkung einer holomorphen Abbildung $\alpha : \overline{\mathbf{C}} \times \mathfrak{Z}_1 \longrightarrow \overline{\mathbf{C}}$ ist, und zwar gilt $\alpha(w, \mathfrak{z}) = \eta w + \gamma(\mathfrak{z})$, wo η eine d. Einheitswurzel und $\gamma : \mathfrak{Z}_1 \longrightarrow \boldsymbol{C}$ eine holomorphe Funktion ist. Man hat $\tilde{q}(w, \mathfrak{z}) = q\big(\alpha(w, \mathfrak{z}), \mathfrak{z}\big) = q\big(\eta w + \gamma(\mathfrak{z}), \mathfrak{z}\big)$ für $(w, \mathfrak{z}) \in \overline{\boldsymbol{C}} \times \mathfrak{Z}_1$. q und $\tilde{q}$ sind Quotienten teilerfremder ausgezeichneter Pseudopolynome Q_1, Q_2 bzw. $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$; da jeweils $q_{\mathfrak{z}}$ und $\tilde{q}_{\mathfrak{z}}$ $(\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_1)$ gleichviel Nullstellen und gleichviel Pole besitzen, ergibt sich, daß $Q_1\big(\eta w + \gamma(\mathfrak{z}), \mathfrak{z}\big)$ bis auf eine d. Einheitswurzel als Faktor mit $\tilde{Q}_1(w, \mathfrak{z})$ und $Q_2\big(\eta w + \gamma(\mathfrak{z}), \mathfrak{z}\big)$ bis auf den gleichen Faktor mit $\tilde{Q}_2(w, \mathfrak{z})$ übereinstimmt, insbesondere ist also $d_1 = \tilde{d}_1$ und $d_2 = \tilde{d}_2$. Wegen des identischen Verschwindens der Koeffizienten $\alpha_{1,1}$ und $\tilde{\alpha}_{1,1}$ von Q_1 bzw. $\tilde{Q}_1$ folgt dann $\gamma = 0$. Es ist mithin $\alpha(w, \mathfrak{z}) = \eta w$.

Korollar. *Ist f in $(0, \mathfrak{o})$ holomorph, so wird $Q_2 = 1$, also*

$$f\big(\omega(w, \mathfrak{z}), \mathfrak{z}\big) = Q_1(w, \mathfrak{z}) + c$$

für $(w, \mathfrak{z}) \in W_0 \times \mathfrak{Z}_0$.

Dies ist (in etwas anderer Fassung) ein von N. Levinson [6], [7] bewiesener Satz.[3]

Wird in Satz 3 $f_{\mathfrak{o}}(0, \mathfrak{o}) = \infty$ vorausgesetzt, so erfüllt die Funktion $1/f$ die obigen Bedingungen; es wird dann $f\big(\omega(w, \mathfrak{z}), \mathfrak{z}\big) = Q_2(w, \mathfrak{z})/Q_1(w, \mathfrak{z})$.

Auf Grund von Satz 1 ist klar, daß sich f stets auch in einer Umgebung von $(0, \mathfrak{o})$ in rationale Funktionen in bezug auf w transformieren läßt, welche f dort beliebig gut approximieren. Doch sind dann die Transformierten von $f - c$ bzw. f im allgemeinen nicht Quotienten von (in bezug auf $(0, \mathfrak{o})$) ausgezeichneten Pseudopolynomen.

4. Auch für reell-analytische Funktionen lassen sich Aussagen nach Art der vorangehenden Sätze beweisen. Dies kann so geschehen, daß die gegebene Funktion komplexifiziert und dann das obige Beweisverfahren geeignet modifiziert angewandt wird. Wir führen dies an einem Beispiel aus, das einen Sonderfall des Analogons zu Satz 2 darstellt.

[3] Ein verwandter Sachverhalt wird (ohne vollständigen Beweis) schon in [10] diskutiert; vgl. dort die Ausführungen über Windungsstückkoordinaten.

Satz 2*. *Sei* $f^*: \bar{\boldsymbol{R}} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{R}}$ *eine meromorphe Funktion.*[4] *Dann existiert eine Folge von biholomorphen Abbildungen* $\Phi_\mu^*: \bar{\boldsymbol{R}} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{R}}$, *die kompakt gegen die identische Abbildung* $\bar{\boldsymbol{R}} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{R}}$ *konvergiert, derart, daß stets* $f^* \circ \Phi_\mu^* =: \varrho_\mu^*$ *eine rationale Funktion ist. Die* ϱ_μ^* *konvergieren kompakt gegen* f^*.

Beweis: Für konstantes f^* ist die Aussage trivial; sei f^* nicht konstant. In einer geeigneten offenen zusammenhängenden Umgebung W von $\bar{\boldsymbol{R}}$ in $\bar{\boldsymbol{C}}$ läßt sich f^* zu einer meromorphen Funktion $f: W \longrightarrow \bar{\boldsymbol{C}}$ ergänzen. Sei W_0 ein $\bar{\boldsymbol{R}}$ umfassendes relativ kompaktes Teilgebiet von W, dessen Rand aus zwei Kreisen $\mathfrak{K}_1 := \{w : |w - ri| = r_0\}$, $\mathfrak{K}_2 := \{w : |w + ri| = r_0\}$ $(0 < r_0 < r)$ besteht, mit der Eigenschaft, daß f auf $Rd\, W_0$ keinen Pol und df/dw dort keine Nullstelle hat. Nach Satz 2 existiert eine gegen die Inklusion $W_0 \longrightarrow W$ kompakt konvergente Folge von injektiven holomorphen Abbildungen $\Phi_\mu : W_0 \longrightarrow W$, derart, daß jeweils $f \circ \Phi_\mu$ Beschränkung einer rationalen Funktion $\varrho_\mu : \bar{\boldsymbol{C}} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{C}}$ ist. Es genügt zu zeigen, daß die Φ_μ hier so gewählt werden können, daß $\Phi_\mu(\bar{\boldsymbol{R}}) = \bar{\boldsymbol{R}}$ gilt.

Sei $W_1 := \{w \in \boldsymbol{C} : |w - ri| < r_0\}$, $W_2 := \{w \in \boldsymbol{C} : |w + ri| < r_0\}$, $w_0 := 0$, ferner ε positiv reell mit $0 < r_0 - 2\varepsilon$, $r_0 + 2\varepsilon < r$ und folgenden Eigenschaften: Ist $S_1 := \{w \in \boldsymbol{C} : r_0 - 2\varepsilon < |w - ri| < r_0 + 2\varepsilon\}$, $S_2 := \{w \in \boldsymbol{C} : r_0 - 2\varepsilon < |w + ri| < r_0 + 2\varepsilon\}$, so gilt $\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 \subset W$; f hat in $\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$ keinen Pol und df/dw dort keine Nullstelle; sind $w_1^{(\varkappa)}$, $w_2^{(\varkappa)}$ verschiedene Punkte aus $\bar{S}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2)$ mit $f(w_1^{(\varkappa)}) = f(w_2^{(\varkappa)})$, so ist stets $|w_1^{(\varkappa)} - w_2^{(\varkappa)}| \geqq 2\varepsilon$. Sind weiter $g_{\varkappa,\nu} : S_\varkappa \cup W_\varkappa \longrightarrow \bar{\boldsymbol{C}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ meromorphe Funktionen mit entsprechenden Eigenschaften wie im Beweis zu Satz 1, so führt das Verfahren dieses Beweises zu eindeutig festgelegten zugehörigen Abbildungen $h_\nu : B \longrightarrow \bar{\boldsymbol{C}}$ $(B := \{w \in \bar{\boldsymbol{C}} : |w - ri| > r_0 + \varepsilon\} \cap \{w \in \bar{\boldsymbol{C}} : |w + ri| > r_0 + \varepsilon\})$. Die $g_{\varkappa,\nu}$ seien nun speziell so gewählt, daß jeweils $g_{2,\nu}(w) = \bar{g}_{1,\nu}(\bar{w})$ für $w \in S_2 \cup W_2$ ist; eine solche Wahl ist wegen $f(w')$

---

[4] Mit $\bar{\boldsymbol{R}}$ wird die durch einen unendlich fernen Punkt ergänzte reelle Zahlengerade bezeichnet; $\bar{\boldsymbol{R}}$ wird als Teil von $\bar{\boldsymbol{C}}$ aufgefaßt.

$=\bar{f}(\bar{w}')$ $(w', \bar{w}' \in W)$ möglich. Die durch die $g_{\varkappa,\nu}$ bestimmten Riemannschen Flächen X_ν gestatten dann antiholomorphe Involutionen, welche in B durch die Spiegelung an der reellen Achse repräsentiert werden. Es folgt, daß $h_\nu(\overline{\boldsymbol{R}})$ jeweils genau aus den Fixpunkten einer antiholomorphen Involution in $\overline{\boldsymbol{C}}$ besteht; da $h_\nu(0) = 0$, $h_\nu(\infty) = \infty$ und $dh_\nu/dw(0) = 1$, muß $h_\nu(\overline{\boldsymbol{R}}) = \overline{\boldsymbol{R}}$ sein. Für die aus h_ν gewonnenen Φ_μ gilt mithin ebenfalls $\Phi_\mu(\overline{\boldsymbol{R}}) = \overline{\boldsymbol{R}}$.

Literatur

[1] H. Behnke und F. Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962.

[2] N. Bourbaki, Topologie générale, Chap. X, Paris 1949.

[3] Chandler Davis, Amer. Math. Monthly 64 (1957), Problem 4714, p. 679.

[4] W. Fischer und H. Grauert, Lokal-triviale Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten, Nachr. d. Akad. d. Wiss. in Göttingen, II, Math.-Phys. Klasse 1965, Nr. 6, pp. 89–94.

[5] K. Kodaira and D. C. Spencer, On deformations of complex analytic structures I, II, Ann. of Math. 67 (1958), pp. 328–466.

[6] N. Levinson, A canonical form for an analytic function of several variables at a critical point, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), pp. 68–69.

[7] N. Levinson, Transformation of an analytic function of several variables to a canonical form, Duke Math. Journ. 28 (1961), pp. 345–353.

[8] J. Mycielski and J. Paszkowski, A generalization of Chebyshev polynomials, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 8 (1960), Nr. 7.

[9] K. Stein, Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen II, Amer. Journ. of Math. 86 (1964), pp. 823–868.

[10] O. Teichmüller, Veränderliche Riemannsche Flächen, Dtsch. Math. 7 (1944), pp. 344–359.

[11] R. Thom, L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome, Topology 3, Suppl. 2 (1965), pp. 297–307.