BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Kohärente analytische Garben mit niederdimensionalem Träger

Von **Hans Kerner** in München

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 6. Mai 1966

Einleitung

Es sei $\mathcal{G}$ eine kohärente analytische Garbe über einer komplexen Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{O})$ und $|\mathcal{G}| := \{x \in M: \mathcal{G}_x \neq (0)\}$ der Träger von $\mathcal{G}$. Wenn $|\mathcal{G}|$ eine mindestens 1-codimensionale Teilmenge von M ist, so gilt bekanntlich $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = 0$, weil $\mathcal{G}$ eine Torsionsgarbe ist.

Für manche Untersuchungen ist es nützlich, auch Bedingungen für das Verschwinden der Satelliten des Funktors Hom zu kennen. Es ist naheliegend, zu vermuten, daß für eine kohärente analytische Garbe $\mathcal{G}$, deren Träger mindestens 2-codimensional ist, auch die Garbe $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O})$ verschwindet.

Wir beweisen in dieser Note folgende Aussage:

Ist $\mathcal{G}$ eine kohärente analytische Garbe über einer komplexen Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{O})$ mit codim $|\mathcal{G}| \geq r$, r natürliche Zahl, so gilt

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Aus dieser Aussage ergibt sich folgende Charakterisierung der Codimension einer analytischen Menge A in einer komplexen Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{O})$:

Die Codimension von A in M ist gleich der größten nicht negativen ganzen Zahl r mit folgender Eigenschaft: Für jede kohärente analytische Garbe $\mathcal{G}$ über $(M, \mathcal{O})$ mit $|\mathcal{G}| \subset A$ ist

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = 0 \text{ für alle } i < r.$$

Zum Beweis dieser Aussagen ziehen wir die Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen von G. Scheja [4] heran. Für $r = 2$

benötigt man lediglich den zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatz. Daher gilt die Aussage für $r = 2$ auch noch über normalen komplexen Räumen. Wir untersuchen im zweiten Abschnitt, wieweit die SCHEJAschen Hebbarkeitssätze und damit auch die oben angegebenen Aussagen noch für den Segrekegel

$$X^{n+1} := \left\{ (z_1, \ldots, z_n, w_1 \ldots, w_n) \in C^{2n} : \frac{z_1}{w_1} = \ldots = \frac{z_n}{w_n} \right\}$$

Gültigkeit haben.

§ 1. Garben über komplexen Mannigfaltigkeiten

Zu den in dieser Arbeit verwendeten Begriffen aus der homologischen Algebra und der komplexen Analysis sei auf CARTAN-EILENBERG [1] und SCHEJA [4] verwiesen.

Es sei zunächst (X, H) ein komplexer Raum und $\mathcal{G}$ eine kohärente H-Garbe über X mit $\operatorname{codim} |\mathcal{G}| \geq 1$. Dann existiert zu jedem $g \in \mathcal{G}_x$, $x \in X$, ein Nichtnullteiler $h \in H_x$ mit $h \cdot g = 0$. Für $\tau \in \operatorname{Hom}_H(\mathcal{G}, H)_x$ gilt dann $\tau(h \cdot g) = h \cdot \tau(g) = 0$, also $\tau(g) = 0$ und somit $\tau = 0$. Damit ist gezeigt:

Aus $\operatorname{codim} |\mathcal{G}| \geq 1$ folgt $\operatorname{Hom}_H(\mathcal{G}, H) = 0$.

Bei den Untersuchungen dieses Abschnitts beschränken wir uns auf komplexe Mannigfaltigkeiten. Als Hauptresultat dieser Arbeit beweisen wir

Satz 1.* *Ist $\mathcal{G}$ eine kohärente analytische Garbe über einer komplexen Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{O})$, so gilt*

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{für } 0 \leq i < \operatorname{codim} |\mathcal{G}|.$$

Zum Beweis zeigen wir zuerst

Satz 2. *Ist $\mathcal{G}$ eine kohärente analytische Garbe über einem normalen komplexen Raum (X, H) und gilt* $\operatorname{codim} |\mathcal{G}| \geq 2$, *so ist*

$$\operatorname{Ext}^1_H(\mathcal{G}, H) = 0.$$

---

* Die analoge Aussage in der algebraischen Geometrie wurde von A. Grothendieck bewiesen.

Beweis: Es sei $x_0 \in X$ und $0 \to \mathcal{M}_0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{G} \to 0$ eine exakte Sequenz über einer Umgebung $U(x_0)$, wobei $\mathcal{F}_0$ eine freie $\mathcal{H}$-Garbe ist. Dann ist auch

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{H}) \to \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{H}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \to 0$$

exakt. $\mathcal{G}$ ist eine Torsionsgarbe, also $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = 0$.

Daher ist

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{H}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{H}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \to 0$$

exakt. Ist U eine Steinsche Umgebung von x_0 und setzen wir $|\mathcal{G}| =: N$, so hat man das exakte kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(U, \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{H})) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & H^0(U, \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{H})) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & H^0(U, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(U-N, \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{H})) \arrow[r] & H^0(U-N, \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{H})) \arrow[r] & H^0(U-N, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})). &
\end{tikzcd}$$

Dabei sind α, β, γ die Beschränkungshomomorphismen.

Über $U - N$ ist $\mathcal{G}$ die Nullgarbe, also auch $H^0(U-N, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = 0$. Die Garbe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{H})$ ist frei und N ist 2-codimensional; daher folgt aus dem 2. Riemannschen Hebbarkeitssatz, daß α bijektiv ist.

Wir zeigen: β ist injektiv.

Es sei $\mu \in H^0(U, \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{H}))$ und $\beta(\mu) = 0$. Ist $x \in U$ und $g_x \in (\mathcal{M}_0)_x$, so wird der Keim $h_x := \mu(g_x) \in \mathcal{H}_x$ durch eine in einer Umgebung $V(x)$ holomorphe Funktion h repräsentiert. Wegen $\beta(\mu) = 0$ gilt $h | V - N = 0$, also auch $h = 0$. Daraus folgt $\mu = 0$, d. h. β ist injektiv.

Somit ergibt sich aus dem Diagramm:

$$H^0(U, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = 0.$$

Dies gilt für jede hinreichend kleine holomorph-vollständige Umgebung U; also folgt daraus

$$\mathrm{Ext}^1_H(\mathcal{G}, H) = 0.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir beweisen nun Satz 1.

Es sei codim $|\mathcal{G}| = r$, $r \geq 2$, und

$$\mathcal{F}_r \to \mathcal{F}_{r-1} \to \ldots \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{G} \to 0$$

eine freie Auflösung von $\mathcal{G}$ über einer Umgebung eines Punktes $x_0 \in M$. Wir setzen $\mathcal{M}_0 := \mathrm{Ker}\,(\mathcal{F}_0 \to \mathcal{G})$ und $\mathcal{M}_k := = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_{k-1})$ für $k = 1, \ldots, r$. Bezeichnen wir mit hd die homologische Dimension (vgl. [4]), so gelten die beiden Aussagen:

(I_r) $\quad hd\big(\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_{r-2}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-2}, \mathcal{O}))\big) \leq r - 2$

(II_r) $\qquad \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = 0 \quad$ für alle $i < r$.

Wir beweisen zuerst Aussage (I_2): Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathcal{M}_0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{G} \to 0$$

ergibt sich wegen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = 0$, daß der Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{O})$$

injektiv ist. Daher ist $\mathrm{Im}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{O})\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{O})$ frei und somit $hd\big(\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{O}))\big) \leq 0$.

Die Aussage (II_2) ergibt sich unmittelbar aus Satz 2.

Wir beweisen nun: Aus (I_r) und (II_r) folgt (I_{r+1}).

Es ist nämlich $0 \to \mathcal{M}_k \to \mathcal{F}_k \to \mathcal{M}_{k-1} \to 0$ exakt, somit auch $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{k-1}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_k, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_k, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{k-1}, \mathcal{O}) \to 0$

und

$$0 \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_k, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{k-1}, \mathcal{O}) \to 0 \text{ für } i > 0,\ k > 0.$$

Insbesondere ergibt sich

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{O}) \cong \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}),$$

somit

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_k, \mathcal{O}) \cong \mathrm{Ext}^{i+k+1}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}).$$

Nun folgt aus (II_r):

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-3}, \mathcal{O}) \cong \mathrm{Ext}^{r-1}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = 0.$$

Daher ergibt sich aus der Exaktheit von

$$0 \to \mathcal{M}_{r-2} \to \mathcal{F}_{r-2} \to \mathcal{M}_{r-3} \to 0$$

die exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_{r-2}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-2}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-3}, \mathcal{O}) = 0.$$

Setzen wir $\mathcal{B}_k := \mathrm{Im}\,(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_k, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_k, \mathcal{O}))$, so ist

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-2}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_{r-1}, \mathcal{O}) \to \mathcal{B}_{r-1} \to 0$$

exakt, also auch

$$0 \to \mathcal{B}_{r-2} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_{r-1}, \mathcal{O}) \to \mathcal{B}_{r-1} \to 0.$$

Die Garbe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_{r-1}, \mathcal{O})$ ist frei. Wegen (I_r) folgt dann $hd(\mathcal{B}_{r-1}) \leq r - 1$, also Aussage (I_{r+1}).

Nun ist noch zu zeigen: Aus (I_{r+1}) und (II_r) folgt (II_{r+1}).

Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-2}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}_{r-1}, \mathcal{O}) \to$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-1}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-2}, \mathcal{O}) \to 0$$

ergibt sich wegen $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-2}, \mathcal{O}) \cong \mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O})$ die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{B}_{r-1} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-1}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}) \to 0.$$

Ist U eine holomorph-vollständige Umgebung des Punktes $x_0 \in M$ und $N = |\mathcal{G}|$, so erhalten wir das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to H^0(U, \mathcal{B}_{r-1}) & \longrightarrow & H^0(U, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-1}, \mathcal{O})) & \longrightarrow & H^0(U, \mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O})) \to 0 \\
\alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\
0 \to H^0(U-N, \mathcal{B}_{r-1}) & \to & H^0(U-N, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{r-1}, \mathcal{O})) & \to & H^0(U-N, \mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O})) = 0
\end{array}$$

Wie beim Beweis von Satz 2 zeigt man, daß β injektiv ist. Wegen $hd(\mathcal{B}_{r-1}) \leq r-1$ und $\operatorname{codim} N \geq r+1$ folgt aus einem Satz von G. Scheja ([4], Korollar S. 355), daß α bijektiv ist. Daraus ergibt sich $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = 0$ und damit ist Satz 1 bewiesen.

Es sei noch erwähnt, daß sich Satz 1 nicht verschärfen läßt, denn er liefert folgende Charakterisierung der Codimension einer analytischen Menge in einer komplexen Mannigfaltigkeit:

Satz 3. *Eine analytische Menge A in einer komplexen Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{O})$ besitzt genau dann die Codimension r, wenn gilt:*

(1) Für jede kohärente $\mathcal{O}$-Garbe $\mathcal{G}$ über M mit $|\mathcal{G}| \subset A$ ist $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = 0$ für $i = 0, 1, \ldots, r-1$.

(2) Es gibt eine kohärente $\mathcal{O}$-Garbe $\mathcal{H}$ über M mit $|\mathcal{H}| \subset A$ und $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}}(\mathcal{H}, \mathcal{O}) \neq 0$.

Beweis: Es sei $\mathcal{J}$ die Idealgarbe aller auf A verschwindenden holomorphen Funktionskeime und $\mathcal{H} := \mathcal{O}/\mathcal{J}$. Ist $x_0 \in A$ ein gewöhnlicher Punkt von A, so dürfen wir annehmen, daß $M = \mathbf{C}^n$ mit den Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ und $x_0 = (0, \ldots, 0)$ sowie $\mathcal{J}$ die von $z_1, \ldots, z_r$ erzeugte Idealgarbe $(z_1, \ldots, z_r)$ und

$$A = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n : z_1 = \ldots = z_r = 0\}$$

ist. Es ist wohlbekannt, daß $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(z_1, \ldots, z_r), \mathcal{O}) \neq 0$ ist (vgl. Cartan-Eilenberg [1], S. 123, Ex. 9).

Ein einfacher Beweis dieser Aussage ergibt sich durch Induktion nach r. Für $r = 0$ ist die Aussage trivial. Sie sei für ein r richtig. Dann ist die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}/(z_1, \ldots, z_r) \xrightarrow{z_{r+1}} \mathcal{O}/(z_1, \ldots, z_r) \to \mathcal{O}/(z_1, \ldots, z_{r+1}) \to 0$$

exakt, wobei der mit z_{r+1} bezeichnete Homomorphismus die Multiplikation mit z_{r+1} bedeutet. Daraus ergibt sich die exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Ext}^r_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(z_1, \ldots, z_r), \mathcal{O}) \xrightarrow{z_{r+1}} \operatorname{Ext}^r_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(z_1, \ldots, z_r), \mathcal{O}) \to \operatorname{Ext}^{r+1}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(z_1, \ldots, z_{r+1}), \mathcal{O}).$$

Aus $\operatorname{Ext}^{r+1}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(z_1, \ldots, z_{r+1}), \mathcal{O}) = 0$ würde $\operatorname{Ext}^r_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(z_1, \ldots, z_r), \mathcal{O}) = 0$ folgen, im Widerspruch zur Induktionsannahme.

Damit ist gezeigt, daß für jeden gewöhnlichen Punkt $x_0 \in A$ gilt: $\operatorname{Ext}^r_{\mathcal{O}}(H, \mathcal{O})_{x_0} \neq 0$, wenn A in x_0 r-codimensional ist. Daraus und aus Satz 1 folgt die Behauptung.

Wir geben noch zwei Folgerungen an:

Korollar 1. *Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kohärente analytische Garben über der komplexen Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{O})$ und ist $\alpha: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Garbenhomomorphismus, so ist der induzierte Homomorphismus*

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \mathcal{O}) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{O})$$

für $0 \leq i < \min(\operatorname{codim}|\operatorname{Ker} \alpha|, \operatorname{codim}|\operatorname{Coker} \alpha| - 1)$ *bijektiv.*

Beweis: Sei $\mathcal{G}_1 := \operatorname{Ker} \alpha$, $\mathcal{G}_2 := \operatorname{Coker} \alpha$ und $\mathcal{M} := \operatorname{Im} \alpha$. Dann ist

$$0 \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{A} \to \mathcal{M} \to 0 \quad \text{und} \quad 0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{B} \to \mathcal{G}_2 \to 0$$

exakt. Daraus erhält man wegen Satz 1 für

$$i < \min(\operatorname{codim}|\operatorname{Ker} \alpha|, \operatorname{codim}|\operatorname{Coker} \alpha| - 1)$$

die exakten Sequenzen

$$0 = \operatorname{Ext}^{i-1}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{O}) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{O}) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{O}) = 0$$

und

$$o = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_2, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_2, \mathcal{O}) = o.$$

Daher sind die Homomorphismen

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) \text{ und } \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{O})$$

bijektiv.

Aus Korollar 1 ergibt sich unmittelbar das für Anwendungen nützliche

Korollar 2. *Ist* $o \to \mathcal{G} \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to o$ *eine exakte Sequenz kohärenter analytischer Garben über der komplexen Mannigfaltigkeit* $(M, \mathcal{O})$, *so gilt*:

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \mathcal{O}) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{O}) \quad \textit{für } o \leq i < \operatorname{codim} |\mathcal{G}|.$$

§ 2. Garben über dem Segrekegel

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wieweit die Hebbarkeitssätze von Scheja und damit auch Satz 1 noch für Garben über dem Segrekegel gelten. Es sei

$$X^{n+1} := \left\{ (z_1\,.\,.,\, z_n, w_1, .\,.,\, w_n) \in \boldsymbol{C}^{2n} : \frac{z_1}{w_1} = \ldots = \frac{z_n}{w_n} \right\}$$

der Segrekegel der Dimension $n + 1$. Man kann X^{n+1} durch Niederblasen der Nullschnittfläche eines Vektorraumbündels V über dem eindimensionalen komplex-projektiven Raum $\boldsymbol{P}$ mit typischer Faser $\boldsymbol{C}^n$ erhalten (vgl. [2]). Der singuläre Punkt von X^{n+1} sei mit x_0 bezeichnet. Dann gilt:

Satz 4. *Ist* G *ein Teilgebiet des Segrekegels* X^{n+1}, *so sind für jede freie Garbe* $\mathcal{F}$ *über* X^{n+1} *die Beschränkungshomomorphismen*

$$H^i(G, \mathcal{F}) \to H^i(G - \{x_0\}, \mathcal{F})$$

für $o \leq i \leq n - 2$ *bijektiv.*

Beweis: Es genügt, den Satz für den Fall zu beweisen, daß $\mathcal{F}$ gleich der Strukturgarbe H von $X := X^{n+1}$ ist. Es sei $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe des Bündelraumes V und $\pi : V \to \boldsymbol{P}$ die Bündelabbildung. Weiter sei N die Nullschnittfläche des Bündels $(V, \pi, \boldsymbol{P})$ und $p : V \to X$ die Modifikationsabbildung mit $\overset{-1}{p}(x_0) = N$. Versieht man X mit der Quotientenstrukturgarbe H, so gilt $H = p_0(\mathcal{O})$, wobei $p_0(\mathcal{O})$ die nullte Bildgarbe bezeichnet.

Wir setzen $U := \overset{-1}{p}(G)$ und bezeichnen die eingeschränkten Abbildungen $p|U \to G$ bzw. $\pi|U \to \boldsymbol{P}$ mit $'p$ bzw. $'\pi$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $x_0 \in G$ annehmen; dann ist $'\pi : U \to \boldsymbol{P}$ surjektiv. Wir bezeichnen noch mit $''p$ bzw. $''\pi$ die eingeschränkten Abbildungen $p|U - N \to G - \{x_0\}$ bzw. $\pi|U - N \to \boldsymbol{P}$.

Nach einem Satz von Grauert-Remmert ([3], S. 417, Satz 6) hat man für jedes $i \geq 0$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^i(G, {'p_0}(\mathcal{O})) & \xrightarrow{\beta_1} & H^i(U, \mathcal{O}) \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow \\ H^i(G - \{x_0\}, {''p_0}(\mathcal{O})) & \xrightarrow{\beta_2} & H^i(U - N, \mathcal{O}), \end{array}$$

in dem α_1 und α_2 die Beschränkungshomomorphismen bedeuten. Der Homomorphismus β_2 ist bijektiv, weil $''p : U - N \to G - \{x_0\}$ biholomorph ist. Für $i \leq n-2$ ist nach Scheja ([4], Korollar S. 355) α_2 bijektiv, weil N eine n-codimensionale analytische Menge in U ist.

Nach Grauert-Remmert ([3], Satz 6) ist β_1 bijektiv, wenn für alle Bildgarben gilt: $'p_q(\mathcal{O}) = 0$ für $q = 1, 2, \ldots$.

Die Bildgarbe $'p_q(\mathcal{O})$ wird durch das Garbendatum

$$W \rightsquigarrow H^q(\overset{-1}{'p}(W), \mathcal{O})$$

definiert, wobei W eine offene Menge in G ist. Nun sei $W \subset G$ eine holomorph-vollständige Umgebung von x_0 und $W_1' := \boldsymbol{P} - \{0\}$, $W_2' := \boldsymbol{P} - \{\infty\}$; dann ist (W_1', W_2') eine Steinsche Überdeckung von $\boldsymbol{P}$. Setzt man $W_k := \overset{-1}{\pi}(W_k') \cap \overset{-1}{p}(W)$ für $k = 1, 2$, so ist (W_1, W_2) eine Steinsche Überdeckung von $\overset{-1}{'p}(W)$. Daraus folgt $'p_q(\mathcal{O}) = 0$ für $q > 1$ (vgl. [3], S. 241).

Wir zeigen nun, daß auch $'p_1(\mathcal{O}) = 0$ ist. Ein Element aus $H^1(\overset{-1}{'p}(W), \mathcal{O})$ wird durch eine holomorphe Funktion $f \in H^0(W_1 \cap W_2, \mathcal{O})$ repräsentiert. Bezeichnen wir mit $(t_1, \ldots, t_n)$ die Koordinaten in der Faser C^n des Bündels $\pi : V \to \boldsymbol{P}$, so gibt es eine Entwicklung

$$f(s, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{\infty} a_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(s) \cdot t_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{\nu_n}, \; s \in W_1' \cap W_2',$$

die für $|t_1| < \varepsilon, \ldots, |t_n| < \varepsilon$ konvergiert, wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt wird. Die Koeffizienten $a_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ dieser Entwicklung sind dabei holomorphe Schnitte über $W_1' \cap W_2'$ im Geradenbündel $(V_1^*)^{\nu_1 + \cdots + \nu_n}$ über $\boldsymbol{P}$, das folgendermaßen definiert ist: Das Bündel V kann in die direkte Whitneysche Summe $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_1$ von n Geradenbündeln V_1 über $\boldsymbol{P}$ zerlegt werden. V_1^* sei das zu V_1 duale Geradenbündel und $(V_1^*)^{\nu_1 + \cdots + \nu_n}$ das $(\nu_1 + \ldots + \nu_n)$-fache Tensorprodukt von V_1^*.

Die erste Cohomologiegruppe von $\boldsymbol{P}$ mit Werten in der Garbe der Keime von holomorphen Schnitten im Bündel $(V_1^*)^{\nu_1 + \cdots + \nu_n}$ verschwindet. Daher gibt es Schnitte $a'_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ bzw. $a''_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ in $(V_1^*)^{\nu_1 + \cdots + \nu_n}$, die über W_1' bzw. W_2' holomorph sind, so daß $a_{\nu_1, \ldots, \nu_n} = a'_{\nu_1, \ldots, \nu_n} - a''_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ über $W_1' \cap W_2'$ gilt. Wie in [2], S. 259, zeigt man, daß $a'_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ und $a''_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ so gewählt werden können, daß die Reihen

$$f'(s, t_1, \ldots, t_n) := \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{\infty} a'_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(s) t_1^{\nu_1} \ldots t_n^{\nu_n} \quad \text{und}$$

$$f''(s, t_1, \ldots, t_n) := \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{\infty} a''_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(s) t_1^{\nu_1} \ldots t_n^{\nu_n}$$

für $|t_1| < \varepsilon, \ldots, |t_n| < \varepsilon$ konvergieren. In einer hinreichend kleinen Umgebung von N gilt dann $f = f' - f''$. Daraus folgt $'p_1(\mathcal{O}) = 0$.

Aus dem oben zitierten Satz von Grauert-Remmert folgt, daß auch β_1 bijektiv ist. Somit ergibt sich aus dem Diagramm, daß α_1 für $i \leq n-2$ bijektiv ist. Wegen $p_0(\mathcal{O}) = H$ ist damit Satz 4 bewiesen.

Nun läßt sich der Beweis von Satz 1 auf Garben über dem Segrekegel übertragen und man erhält:

Satz 5. *Ist $\mathcal{G}$ eine kohärente analytische Garbe über dem Segrekegel* (X^{n+1}, H), *so gilt*:

$$\mathrm{Ext}^i_H(\mathcal{G}, H) = 0 \text{ für } 0 \leq i < \min(n, \operatorname{codim}|\mathcal{G}|).$$

Literatur

[1] Cartan, H. and S. Eilenberg: Homological Algebra. Princeton Math. Ser. **19**, 1956.

[2] Grauert, H. und H. Kerner: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. Math. Ann. **153**, 236–260 (1964).

[3] Grauert, H. und R. Remmert: Bilder und Urbilder analytischer Garben. Ann. Math. **68**, 393–443 (1958).

[4] Scheja, G.: Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen. Math. Ann. **144**, 345–360 (1961).