BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Ideen von Grassmann und Hamilton

Von **Max Herzberger** in Zürich

Vorgetragen am 4. Februar 1966

Diese Arbeit möchte die Fruchtbarkeit der Gedanken von Grassmann und Hamilton zeigen, um eine Ordnung vieler Gebiete der Mathematik und der klassischen Physik zu geben. Sie möchte zeigen, daß fast alle Gesetze der klassischen Physik als Bewegungsinvarianten in Raum und Zeit aufgefaßt werden können. Ich möchte kurz die zum Teil bekannten wesentlichen Grundsätze der Grassmannschen Ideen in etwas neuerer Form darstellen.

## 1. Der affine Vektorraum

**Vektoren.** Ein Vektorraum bestehe aus Elementen, für die zwei Operationen existieren. Addition und Streckung, d. h. Multiplikation mit einem Skalar (Zahl). Die Addition sei kommutativ, assoziativ und distributiv in bezug auf die Streckung. Es existiere ein Nullvektor, so daß:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{z} &= \vec{z} + \vec{a} = \vec{a} \\ k\vec{z} &= \vec{z} \\ 0 \cdot \vec{a} &= \vec{z}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

$n$ Vektoren $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n$ heißen linear unabhängig, wenn keine Gleichung der Form

$$K_1 \vec{a}_1 + K_2 \vec{a}_2 + \cdots + K_n \vec{a}_n = \vec{z} \tag{2}$$

existiert, ohne daß

$$K_1 = K_2 = \cdots = K_n = 0$$

Die größte Anzahl unabhängiger Elemente heißt die Dimension des Raumes. Wir können ein arithmetisches und ein geometrisches Modell eines Vektorraumes machen.

**Arithmetisches Modell**

Ein $n$-tupel von Zahlen bildet einen $n$-dimensionalen Raum, wenn man Addition definiert als

$$(a_1 \ldots a_n) + (b_1 \ldots b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \tag{3}$$

Streckung als

$$k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n). \tag{4}$$

Der Nullvektor ist dann gegeben durch $\vec{z} = (0, 0, \ldots, 0)$ und der Vektorraum ist $n$-dimensional, da die Vektoren $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$ $(0, 0, 1)$ unabhängig sind, und jeder Vektor als Vielfachsumme dieser Basis dargestellt werden kann.

**Geometrisches Modell**

Wir ordnen jedem Punkt $A$ des $n$-dimensionalen Raumes einen Vektor $\vec{a}$ zu. Den dem Nullvektor $\vec{z}$ zugeordneten Punkt 0 bezeichnen wir als Koordinatenursprung. Wir definieren als Summe zweier Punkte $A, B$ (Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$) den Punkt, der den Eckpunkt des Parallelogrammes bildet, das aus Ursprung, Punkt $A$ und Punkt $B$ gebildet ist. Als Streckung $k\vec{a}$ bezeichnen wir den Punkt $\vec{b}$ auf der Geraden $0A$, dessen Entfernung vom Nullpunkt gleich dem $k$-fachen der Entfernung von $A$ ist. Ist $k$ positiv, so liegt $P$ auf derselben Seite von 0 wie $A$, sonst auf der entgegengesetzten. Die Dimension $n$ des Raumes ist durch die größte Zahl unabhängiger Vektoren gegeben. $k \leq n$ Vektoren, die linear unabhängig sind, spannen einen $k$-dimensionalen Vektorraum auf.

Wir werden uns in dieser Skizze wesentlich mit dem geometrischen Bild des Vektorraumes beschäftigen. Gleichzeitige Betrachtung des algebraischen und des geometrischen Bildes führt zu reizvollen Koordinationen von Sätzen der beiden mathematischen Disziplinen.

**$k$-Volumina und $k$-Vektoren**

$k$ unabhängige Vektoren $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k$ geben ein $k$-dimensionales Parallelepiped. Wir ordnen ihnen ein Zeichen $[\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_k]$ zu, das wir als $k$-Volumen bezeichnen. Wir setzen folgende Regeln fest. Sei $\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n$ eine Basis, so daß $\vec{a}_i = \sum \alpha_{ij} \cdot \vec{e}_j$, dann soll

$$[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k] = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \| \alpha_{1 i_1} \alpha_{2 i_2} \ldots \alpha_{k i_k} \| [\vec{e}_{i_1} \ldots \vec{e}_{i_k}] \qquad (5)$$

sein. Daraus folgt: $[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k]$ kann als Vektor in dem $\binom{n}{k}$-dimensionalen Raum mit den unabhängigen Basisvektoren $[\vec{e}_{i1} \ldots \vec{e}_{ik}]$ betrachtet werden mit

$$i_1 < i_2 \ldots < i_k.$$

Die durch 5) dargestellten Vektoren werden **$k$-Vektoren** genannt. Nicht jeder **$k$-Vektor** ist ein **$k$-Volumen**. Für $k$-Volumina gelten im Raum der $k$-Vektoren die folgenden Regeln: Vertauschung zweier Elemente ändert das Zeichen des $k$-Volumens. Ein $k$-Volumen ist der Nullvektor $\vec{z}$, wenn die Elemente abhängig sind. Ein $k$-Volumen multipliziert sich mit einer Zahl, wenn einer der ursprünglichen Vektoren sich mit der Zahl multipliziert. $k$-Volumina, die $(k-1)$ Vektoren gemeinsam haben, kann man addieren

$$[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k] + [\vec{b}_1 \vec{a}_2 \ldots, \vec{a}_k] = [\vec{a}_1 + \vec{b}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k]. \qquad (6)$$

Zwei $k$-Volumina sind proportional dann und nur dann,

$$[\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_k] = C\, [\vec{a}_1 \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_k], \qquad (7)$$

wenn alle $\vec{b}_i$ im Raum der $\vec{a}_i \ldots \vec{a}_k$ liegen.

D. h. $$\vec{b}_i = \sum \gamma_{ik} \vec{a}_k, \text{ mit } C = \|\gamma_{ik}\|. \qquad (8)$$

$C$ ist dann die Determinante der $\gamma_{ik}$. Zwei $k$-Volumina sind gleich, wenn außerdem die Transformationsdeterminante gleich Eins ist. $m$-Volumina mit $m > n$ haben nur Nullvektoren.

Mit diesen Begriffen können wir alle Sätze der $n$-dimensionalen affinen Geometrie ableiten.

## 2. Einführung einer Metrik für Vektoren und Volumina. Ergänzungsvektoren

Einer Basis des ursprünglichen Raumes $\vec{e}_i \ldots \vec{e}_k$ ordnen wir eine positiv definite quadratische Matrix $(\gamma_{ik})$ zu und definieren das skalare Produkt zweier Vektoren $\vec{a} = \sum \alpha_i \vec{e}_i$, $\vec{b} = \sum \beta_k \vec{e}_k$ als die Zahl:

$$\vec{a}\vec{b} = \sum \alpha_i \beta_k \vec{e}_i \vec{e}_k = \sum \gamma_{ik} \alpha_i \beta_k. \tag{9}$$

Das skalare Produkt ist kommutativ, distributiv gegenüber Addition, und das Produkt eines Vektors mit sich selbst

$$\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2 = \sum \gamma_{ik} \alpha_i \alpha_k \tag{10}$$

ist positiv und nur null, wenn alle $\alpha_j$ verschwinden, d. h. $\vec{a}$ der Nullvektor ist.

Wir definieren als Länge von $\vec{a}$ die positive Wurzel aus seinem Quadrat.

$$|\vec{a}| = +\sqrt{\gamma_{ik} \alpha_i \alpha_k}. \tag{11}$$

Als Winkel zwischen zwei Vektoren definieren wir die Größe

$$-1 \leq \frac{\vec{a} \quad \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = \cos(\vec{a}, \vec{b}) \leq +1, \tag{12}$$

wo das Gleichheitszeichen nur steht, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ proportional sind, und dieselbe $(+1)$ oder entgegengesetzte $(-1)$ Richtung haben. Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist. Wir können in jedem Vektorraum eine orthogonale Basis finden, so daß $\vec{e}_i \vec{e}_k = 0$ ist für $i \neq k$; wir können sogar die Basis so normieren, daß $\vec{e}_i^{\,2} = 1$ ist für alle $i$.

Wir können nun auch für $k$-Volumina eine Länge und einen Winkel definieren dadurch, daß wir das skalare Produkt zweier $k$-Volumina definieren als:

$$[\vec{a}_1\ \vec{a}_k]\ [\vec{b}_1\ \vec{b}_k] = \| a_i b_k \| \tag{13}$$

als die $k$-reihige Determinante aller wie oben definierter skalarer Produkte. Man kann dann zeigen, daß diese Definition den obigen Gesetzen entspricht. Insbesondere ist

$$[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k]^2 = \|\vec{a}_i \vec{a}_k\| \tag{14}$$

immer eine positive Zahl, deren positive Wurzel wir als das Volumen des Parallelepipeds mit den Seiten $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k$ bezeichnen können. Es gilt die Ungleichung

$$-1 \leq \frac{[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k] \ldots [\vec{b}_1, \vec{b}_2 \ldots \vec{b}_k]}{\sqrt{[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k]^2} \cdot \sqrt{[\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_k]^2}} = \cos\left([\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k], [\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_k]\right) \leq 1 \tag{15}$$

und wir können dadurch den Winkel zwischen zwei $k$-dimensionalen Superebenen definieren.

Die $n$-Volumina sind isomorph mit den reellen Zahlen. Sie formen eine $\binom{n}{n}$ = eindimensionale Mannigfaltigkeit. Man kann ihnen die Zahlen zuordnen, die der Quadratwurzel aus ihrem Quadrat entsprechen

$$[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n]^2 = \sqrt{\|\vec{a}_i\ \vec{a}_k\|}\,. \tag{16}$$

Das Vorzeichen kann für **ein** $n$-tupel frei gewählt werden, es ist dann für alle andern $n$-tupel durch die Funktionaldeterminante bestimmt. Hiermit ist im Raum ein Richtungssinn eingeführt.

Die Mannigfaltigkeit der $k$-Volumina ist gleich der der $(n-k)$-Volumina. Man kann einem $k$-Volumen eindeutig ein $(n-k)$-Volumen zuordnen, das wir die Ergänzung des $k$-Volumens nennen.

$$[\vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_k] = \int [\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k], \tag{17}$$

wenn

$$\vec{a}_{k+\varrho}\, \vec{a}_i = 0$$

$$[\vec{b}_{k+1} \ldots \vec{b}_n]^2 = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k]^2 = [\vec{a}_1\, \vec{a}_k\, \vec{b}_{k+1} \ldots \vec{b}_n]. \tag{18}$$

Es gilt dann

$$\int\int [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k] = (-1)^{(n-1)k} [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k]. \tag{19}$$

Es ist ferner möglich, ein $n$-dimensionales Volumen als skalares Produkt eines $k$-dimensionalen Volumens und der Ergänzung eines $(n-k)$-Volumens anzusehen

$$[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n] = \int [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k] \, [\vec{a}_{k+1} \ldots \vec{a}_n] \, . \tag{20}$$

Dies ermöglicht, zu einer Basis eine reziproke Basis zu finden. Seien $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n$ $n$ unabhängige Vektoren, so können wir $n$ Vektoren $\vec{a}_1^*, \ldots, \vec{a}_n^*$ finden, so daß

$$\vec{a}_i^* \vec{a}_k = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} . \tag{21}$$

Wir wählen dazu

$$\vec{a}_i^* = (-1)^{(n-1)i} \frac{\int [\vec{a}_{i+1} a_{i+2} \ldots \vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1}]}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n]} \, . \tag{22}$$

## 3. Lineare Transformation

Den $n$ linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n$ mögen $n$ nicht notwendig unabhängige Vektoren $\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_n$ zugeordnet sein. Eine lineare Transformation ordnet dann die Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{b}_i &\to \vec{a}_i \\ \sum \alpha_{ik} \vec{b}_k &\to \sum \alpha_{ik} \vec{a}_k \end{aligned} \tag{23}$$

einander zu. Die Matrix

$$B = (\vec{b}_i \vec{a}_k) = (\beta_{ik}) \tag{24}$$

bestimmt die Transformation, denn wir haben wegen (21)

$$\vec{b}_i = \sum \beta_{ik} \vec{\partial}_k^* \, , \tag{25}$$

wo die $\vec{a}_k^*$ die zu $\vec{a}_k$ reziproke Basis darstellt. Wir nennen die Transformation *symmetrisch*, wenn die Matrix $B$ symmetrisch ist ($\beta_{ik} = \beta_{ki}$). Wir nennen die Transformation antisymmetrisch, wenn die Matrix $B$ antisymmetrisch ist.

Jede Transformation ist die Summe einer symmetrischen und antisymmetrischen Transformation, denn

$$\beta_{ik} = \frac{\beta_{ik} + \beta_{ki}}{2} + \frac{\beta_{ik} - \beta_{ki}}{2}. \tag{26}$$

**Eigenwerte und Darboux-Vektor**

Wir suchen nach Größen, die von der zufälligen Basis $\vec{a}_i$ unabhängig sind. Da sich die $\vec{b}_i$ wie die $\vec{a}_i$ transformieren, sind die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung

$$\frac{[\lambda \vec{a}_1 - \vec{b}_1, \lambda \vec{a}_2 - \vec{b}_2, \ldots, \lambda \vec{a}_n - \vec{b}_n]}{[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n]} \tag{27}$$

unabhängig von der Basis. Die Koeffizienten der Potenzen von $\lambda^k$ in (27) sind reell, während die Wurzeln, die Eigenwerte der Transformation, nicht notwendig reell sind.

Ebenso ist der Bivektor

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \sum [\vec{b}_i \vec{a}_i^*] = \frac{1}{2} \sum (\beta_{ik} - \beta_{ki}) [\vec{a}_i^* \vec{a}_k^*] \tag{28}$$

von der Basis unabhängig, da sich die $\vec{b}_i$ contragradient zu den $\vec{a}_i^*$ transformieren.

**Symmetrische Transformationen**

Für eine symmetrische Transformation ist der Darboux-Vektor identisch Null. Die Wurzel der charakteristischen Gleichung (27) (die Eigenwerte) sind alle reell, und wir können $n$ aufeinander senkrechte Vektoren finden, die Eigenrichtungen, so daß Objekt- und Bildvektor dieselbe Richtung haben (die Eigenvektoren). Ist die Abbildung ausgeartet, d. h. der $n$-dimensionale Raum auf einen $k$-dimensionalen abgebildet, so sind $n - k$ der Eigenwerte Null. Die $n$ Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander.

Seien die Eigenvektoren in ihrer Richtung $\vec{e}_i \ldots \vec{e}_n$, ihre Bildvektoren $\vec{f}_i \ldots \vec{f}_n$, so haben wir

$$\vec{f}_i = \lambda_i \vec{e}_i; \tag{29}$$

wir nennen diese Vektoren Normalvektoren.

**Antisymmetrische Transformationen**

Die antisymmetrischen Transformationen sind durch ihren Darboux-Vektor gegeben. Wir können zeigen, daß

$$\vec{y} = \int [[\int \vec{D}]\vec{x}]. \tag{30}$$

Wählen wir für eine allgemeine Transformation im Objektraum als Koordinaten die Eigenvektoren der symmetrischen Transformation, so bekommen wir eine Normalform, die in der Diagonale die Eigenwerte des symmetrischen Teils enthält, sonst antisymmetrisch ist.

## 4. Infinitesimale Transformationen

Wir betrachten jetzt eine allgemeine nicht lineare Raumabbildung. Jedem Punkt $\vec{a}$ des Objektraums sei ein Vektor $\vec{b}$ zugeordnet. Nehmen wir allgemeine Koordinaten, so daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ reguläre Funktionen von $u_1 \ldots u_n$ sind. Wir schreiben

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{a}}{\partial u_i}, \quad \vec{b}_i = \frac{\partial \vec{b}}{\partial u_i} \tag{31}$$

und nehmen an, daß für ein Gebiet die $\frac{\partial \vec{a}}{\partial u_i}$ unabhängig sind. Dann gilt in einem Punkt des Gebietes

$$\begin{aligned} d\vec{a} &= \vec{a}_i \, du_i \\ d\vec{b} &= \vec{b}_i \, du_i \, . \end{aligned} \tag{32}$$

Die Zuordnung $\vec{a}_i \rightarrow \vec{b}_i$, die von Punkt zu Punkt wechselt, bezeichnen wir als eine infinitesimale Transformation, die wir im ganzen Gebiet als Summe einer symmetrischen und antisymmetrischen Transformation darstellen können.

**Symmetrische infinitesimale Transformation**

Wenn die Transformation überall symmetrisch ist, haben wir überall

$$\begin{aligned} &\vec{b}_i \vec{a}_k - \vec{b}_k \vec{a}_i \equiv 0 \\ &\frac{\partial \vec{b}}{\partial u_i} \frac{\partial \vec{a}}{\partial u_k} - \frac{\partial \vec{b}}{\partial u_k} \frac{\partial \vec{a}}{\partial u_i} \equiv 0 . \end{aligned} \tag{33}$$

Dies ist die Integrabilitätsbedingung für die Existenz einer Funktion $\Phi$, so daß

$$\vec{b}\, d\vec{a} = d\Phi \tag{34}$$

ist. Das bedeutet, $\vec{b}$ ist der Gradient von $\Phi$. Die Funktion wird als Potentialfunktion bezeichnet, und die Flächen $\Phi =$ constant sind die Niveauflächen. Der Vektor $\vec{b}$ steht in jedem Punkt auf diesen Flächen senkrecht. Die Wellenflächen der Optik sind ein Beispiel für solche Potentialflächen.

### Antisymmetrische infinitesimale Transformation

Die antisymmetrische Transformation ist durch ihren Darboux-Vektor vollständig bestimmt.

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \sum (\vec{a}_i \vec{b}_k - \vec{a}_k \vec{b}_i)\, [\vec{a}_i^* \vec{a}_k^*] . \tag{35}$$

Dieser Bivektor ist die Verallgemeinerung der Operation curl (rot) und er wird auch als Lagrange-Klammer bezeichnet.

In einem antisymmetrischen (auch allgemeinen) Vektorfeld gibt es ausgezeichnete Linien, nämlich die, für die der Darboux-Vektor konstant ist. Man kann zeigen, daß für diese Linien (Kurvenparameter)

$$\frac{d}{dt} [\vec{a}_i \vec{b}_k - \vec{a}_k \vec{b}_i] = 0 \tag{36}$$

ist. (36) kann als Integrabilitätsbedingung für die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} dL &= \dot{\vec{b}}\, d\vec{a} + \vec{b}\, d\dot{\vec{a}} \\ dH &= -\dot{\vec{b}}\, d\vec{a} + \dot{\vec{a}}\, d\vec{b} \end{aligned} \tag{37}$$

angesehen werden, für die bei geeigneter Normierung

$$L + H = \dot{\vec{a}} \vec{b} \tag{38}$$

gesetzt werden kann. Wir bemerken, daß hier $L$ und $H$ ebenso wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von $n$ Parametern abhängen.

Durch jeden Punkt geht (im allgemeinen) eine Kurve, die (36) genügt. Wir wollen diese Linien Weltlinien nennen.

## 5. Spezielles Variationsproblem

### Spezielle partielle Differentialgleichung

Dies legt nahe, den Begriff des Vektorfeldes zu verallgemeinern.

a) Sei für eine gegebene Kurve jedem Punkt $\vec{a}$ und jeder Richtung $\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt}$ ein Vektor $\vec{b}$ zugeordnet, wo $\vec{a}$ und $\vec{b}$ unabhängig sind.

Dann kann man wieder nach den besonderen Kurven fragen, für die (36) erfüllt ist. In diesem Fall gibt es eine Funktion $L$, die von $2n$ Variablen $u_i$ und $\dot{u}_i$ gebildet wird, und wir finden

$$\begin{aligned} \dot{\vec{b}} &= \operatorname{grad}_{\vec{a}} L \\ \vec{b} &= \operatorname{grad}_{\dot{\vec{a}}} L . \end{aligned} \tag{39}$$

Dies führt zu den Euler-Lagrangeschen Gleichungen der Variationsrechnung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\operatorname{grad}_{\dot{\vec{a}}} L\right) &= \operatorname{grad}_{\vec{a}} L \\ \frac{d}{dt}\left({}^{\partial L}\!/_{\partial \dot{u}_i}\right) &= {}^{\partial L}\!/_{\partial u_i} . \end{aligned} \tag{40}$$

Die „Weltlinien" sind somit in diesem Fall die Extremalen des Variationsproblems, das zu $(L(u_i, \dot{u}_i))$ gehört. Zu jedem Punkt $\vec{a}$ und jeder Geschwindigkeit gibt es nur eine Weltlinie, d. h. wenn $\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{u}_i \, \partial \dot{u}_k}\right|$ nicht verschwindet.

Unter dieser Voraussetzung kann man auch $\dot{\vec{a}}$ und $\vec{b}$ als unabhängige Koordinaten ansehen (wir nennen $\vec{b}$ den Momentvektor), und wir finden eine zweite Funktion:

$$dH = \dot{\vec{a}}\, d\vec{b} - \dot{\vec{b}}\, d\vec{a} , \tag{41}$$

welche zu

$$\vec{b} = -\operatorname{grad}_{\vec{a}}(H)$$
$$\vec{a} = \operatorname{grad}_{\vec{b}}(H)$$

führt, d. h. zu den Jakobi-Hamiltonschen Gleichungen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Aus (34) folgt, daß

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{42}$$

ist, d. h. daß $H$ constant entlang der Weltlinien ist.

Die charakteristische Funktion $E$ ist durch das Integral von $L$ entlang den Weltlinien gegeben. Da $L$ ein totales Differential entlang den Weltlinien ist,

$$dL = \frac{d}{dt}(\vec{b}\, d\vec{a}), \tag{43}$$

finden wir für eine Mannigfaltigkeit von Weltlinien, die eine Anfangskurve $\vec{a}_1(u)$ mit einer Endkurve $\vec{a}_2(u)$ verbinden.

$$\frac{dE}{du} = \vec{b}_2 \frac{d\vec{a}_2}{du} - \vec{b}_1 \frac{d\vec{a}_1}{du}. \tag{44}$$

Diese Gleichung gilt für eine beliebige Anfangs- und Endmannigfaltigkeit und führt zu der Hamiltonschen charakteristischen Zwei-Punkt-Funktion, wie auch zu der Hamiltonschen Gleichung zweiter Art.

## 6. Allgemeines Variationsproblem. Allgemeine partielle Differentialgleichung

In einem allgemeinen Variationsproblem suchen wir die Kurven für die

$$\int L\,dt = \text{Min.}, \tag{45}$$

wo $L$ eine Funktion von $u_i$, $\dot{u}_i$ und $t$ ist. Dies kann auf das Problem im letzten Abschnitt zurückgeführt werden, wenn wir $t$ als neue Variable $u_{n+1}$ einführen, und $u_1 \ldots u_n$ als Funktionen eines willkürlichen Parameters $s$ betrachten. Wir finden, wenn wir Ableitung nach $s$ durch einen Strich andeuten,

$$E = \int L\,dt = \int L u'_{n+1}\,ds = \int l\,ds\,, \tag{46}$$

wobei $l$ in den $\dot{u}_i$ homogen von erster Ordnung ist, also der Eulerschen Relation

$$\frac{\partial l}{\partial \dot{u}_i}\,\dot{u}_i = l \tag{47}$$

genügt. Dies macht aus

$$E = \int l\,ds = \int \frac{\partial l}{\partial \dot{u}_i}\,du_i \tag{48}$$

ein Integral, das vom Parameter unabhängig ist, was uns erlaubt, die Kurvenlänge im $(n+1)$-Raum als Parameter zu wählen. $l$ ist dann eine Funktion von Punkt und Richtung $(\dot{u}_1^2 = 1)$, und man kann zeigen, daß durch jeden Punkt in jeder Richtung eine Weltlinie geht, falls im $n$-dimensionalen Raum

$$\left| \partial^2 l \middle/ \partial \dot{u}_i\,\partial \dot{u}_k \right| \neq 0$$

war, d. h. die Matrix $\left| \partial^2 l \middle/ \partial \dot{u}_i\,\partial \dot{u}_k \right|$ den Rang $n$ hat.

Wir haben damit das allgemeinste Variationsprinzip, und damit alle physikalischen Disziplinen, die auf dem Prinzip der kleinsten Wirkung beruhen, auf ein optisches Bild zurückgeführt. Wir können $l$ als den Brechungsindex in einem inhomogenen, anisotropen Mittel im $(n+1)$-dimensionalen Raum ansehen und somit alle auf diesem Gebiet gewonnenen Erkenntnisse verwenden.

Auch die allgemeinste partielle Differentialgleichung führt homogen geschrieben zu den Weltlinien.

## 7. Ausblick

Es war meine Absicht, in diesem Vortrag zu zeigen, daß eine Entwicklung der Ideen, die hier skizziert werden, viele Gebiete der Mathematik und theoretischen Physik zusammenfassen können. Diese Ideen und die daraus zu ziehenden Konsequenzen wird der Verfasser in einem bald erscheinenden Buch weiter ausführen. Die wesentlichen Ideen gehen zurück auf einen Artikel des Verfassers im Journal für reine und angewandte Mathematik 1931.

Da es unmöglich ist, alle einschlägige Literatur anzugeben, möchte ich nur auf die Autoren hinweisen, die mein Denken hier wesentlich beeinflußten. Außer den Werken von Grassmann und Hamilton sind es die Ideen von Elie Cartan, die elegante Behandlung der dreidimensionalen Geometrie in Lagallys Vektorrechnung, viele mündliche und schriftliche Diskussionen mit C. Carathéodory, Levi Civita und H. Mehnke, einem persönlichen Schüler von Grassmann.

*

*Ich danke dem Schweizer Nationalfond, sowie Herrn Gehret für Hilfe bei der Korrektur.*