BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Unverzweigte Konkretisierung von Riemannschen Flächen

Von **Helmut Oeljeklaus** in Würzburg

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 14. Januar 1966

Zu jedem Punkt einer Riemannschen Fläche gibt es eine Umgebung und eine darin holomorphe Funktion, die diese Umgebung biholomorph auf ein Gebiet der komplexen Zahlenebene abbildet. Es ist eine naheliegende Frage, ob auf jeder offenen Riemannschen Fläche eine global holomorphe Funktion existiert, die hinreichend kleine Umgebungen jedes Punktes der Fläche biholomorph abbildet. Durch eine solche Funktion wird die Fläche unverzweigt über einem Gebiet der komplexen Zahlenebene konkretisiert. Die Existenz einer solchen Funktion soll hier für einige spezielle Riemannsche Flächen gezeigt werden.

Satz: Sei R eine offene Riemannsche Fläche, auf der zwei holomorphe Funktionen x und y mit folgenden Eigenschaften existieren

1. Die Differentiale dx und dy haben keine gemeinsame Nullstelle;
2. $y^n = g(x)$, wobei n eine positive natürliche Zahl und g eine in einer einfach-zusammenhängenden Umgebung von $x(R)$ holomorphe Funktion ist.

Dann gibt es eine auf R holomorphe Funktion, deren Differential keine Nullstelle hat.

Sei g in dem $x(R)$ umfassenden einfach-zusammenhängenden Gebiet G holomorph. Es gibt dann in G zwei holomorphe Funktionen p und q, so daß $g = p^n q$ und q nur Nullstellen von höchstens der Ordnung $n - 1$ besitzt. Die Funktion $v = \frac{y}{p(x)}$ ist wegen $v^n = q(x)$ auf R holomorph. dv und dx haben keine gemeinsame Nullstelle.[1] Seien $a_1, a_2, \ldots$ die Nullstellen von q in G und $q(z) = b_i(z-a_i)^{m_i} + \ldots$, $b_i \neq 0$, die Potenzreihenentwicklung von q um a_i. Sei h eine in G holomorphe Funktion, die genau in den Punkten a_i Nullstellen hat, und zwar von der Ordnung $m_i - 1$. Die Potenzreihenentwicklung von h um a_i laute $h(z) = c_i(z-a_i)^{m_i-1} + \ldots$, $c_i \neq 0$, und es sei r eine in G holomorphe Funktion, die im Punkte a_i den Wert $ln \frac{m_i b_i}{c_i}$ annimmt für $i = 1, 2, \ldots$. Dann ist die Funktion $l = \frac{h \cdot e^r - q'}{q}$ in G holomorph und ebenso $k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} l(z)\, dz$. Die Funktion $u = v \cdot e^{\frac{1}{n} k(x)}$ ist auf R holomorph. Wegen $v^n = q(x)$ und $q' + qk' = h\, e^r$ ist

$$du = e^{r(x) + \frac{1}{n} k(x)}\, h(x) \frac{dx}{n \cdot v^{n-1}} = e^{r(x) + \frac{1}{n} k(x)}\, h(x) \frac{dv}{q'(x)}.$$

du hat also höchstens dort Nullstellen, wo auch $h(x)$ gleich Null ist. Da dv und dx keine gemeinsame Nullstelle besitzen und q nur Nullstellen von höchstens der Ordnung $n-1$ hat, ist dv in diesen Punkten nicht gleich Null. Dies gilt auch für $\frac{h(x)}{q'(x)}$. Also hat du keine Nullstelle auf R.

Folgerung: Jede offene Riemannsche Fläche, die sich zweiblättrig und eigentlich einem einfach-zusammenhängenden Gebiet der komplexen Zahlenebene überlagern läßt, läßt sich unverzweigt über einem Gebiet der komplexen Zahlenebene konkretisieren.

Sei $x : R \to G$ die zweiblättrige Abbildung und sei v eine auf R holomorphe Funktion, deren Differential dv keine Nullstelle mit dem Differential dx gemeinsam hat. Es gibt dann zwei in G holomorphe Funktionen a und b, so daß $v^2 + a(x)\, v + b(x) = 0$. Die in R holomorphe Funktion $y = v + \frac{1}{2} a(x)$ genügt einer Gleichung $y^2 = g(x)$, wobei g in G holomorph ist. dy und dx haben keine gemeinsame Nullstelle.

Zu den in der Folgerung genannten Flächen gehören die in einem beliebigen Punkt punktierten kompakten Riemannschen

[1] Ist v konstant, so hat dx keine Nullstellen auf R.

Flächen vom Geschlecht eins und alle in einem Weierstraßpunkt punktierten hyperelliptischen Flächen. Auf diesen Flächen gibt es holomorphe Funktionen x und y, so daß $y^2 = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$.

Die Funktion, welche die unverzweigte Konkretisierung liefert, läßt sich mit Hilfe der vorstehenden Ableitung explizit und in einfacher Weise durch x und y ausdrücken.