BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Radikale und kleine Moduln

Von **Bodo Pareigis** in München

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 10. Dezember 1965

1. Eine der Methoden, die Struktur von Moduln zu bestimmen, ist die getrennte Untersuchung des Radikals eines Moduls und des radikalfreien Faktormoduls. Das duale Verfahren, den Sockel und das Koradikal, das heißt den Faktormodul nach dem Sockel, zu untersuchen, ist weniger gebräuchlich. Da wir jedoch die Dualität von abelschen Kategorien verwenden wollen, werden wir auch hierfür Aussagen erhalten.

In der vorliegenden Arbeit sollen im wesentlichen Untermoduln des Radikals bzw. Faktormoduln des Koradikals genauer untersucht werden. Um die Dualität in abelschen Kategorien verwenden zu können, werden wir unsere Resultate weitgehend in der Sprache der Kategorien formulieren und erst im letzten Teil einige Anwendungen für die Kategorie der Moduln über einem Dedekindring geben. Dafür werden wir die Klasse der endlich erzeugten Untermoduln aller Radikale, der sogenannten kleinen Moduln, und die Klasse der kokleinen Moduln, die gewisse Faktormoduln der Koradikale sind, bestimmen. Letztere wird genau die Klasse der Torsionsmoduln sein.

2. Sei im folgenden $\mathfrak{C}$ eine abelsche Kategorie mit unendlichen direkten Summen und Produkten.

Wenn wir von einer *Kategorie von R-Moduln* sprechen, so ist damit immer die volle Kategorie aller unitären R-Moduln über einem Ring R mit Einselement gemeint. Die volle Kategorie aller beliebigen Moduln über einem Ring R, der kein Einselement zu haben braucht, ist nämlich isomorph zur vollen Kategorie der unitären S-Moduln, wobei S der Ring ist, der aus R durch Adjunktion einer Eins entsteht.

Für eine Menge von Unterobjekten U_α eines Objekts A in $\mathfrak{C}$ definieren wir

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} \cup U_\alpha: &= \mathrm{Bi}\,(\textstyle\sum U_\alpha \xrightarrow{f} A)\\ \cap U_\alpha: &= \mathrm{Ker}\,(A \xrightarrow{g} \prod A/U_\alpha)\\ \cup^* A/U_\alpha: &= \mathrm{Cobi}\,(A \xrightarrow{g} \prod A/U_\alpha)\\ \cap^* A/U_\alpha: &= \mathrm{Coker}\,(\textstyle\sum U_\alpha \xrightarrow{f} A), \end{aligned}$$

wobei f und g die durch die natürlichen Morphismen $U_\alpha \to A$ und $A \to A/U_\alpha$ definierten Summen- bzw. Produktmorphismen sind. Mit U_α bezeichnen wir sowohl die Unterobjekte als auch die Repräsentanten der Unterobjekte. $\cup U_\alpha$ und $\cap U_\alpha$ sind wieder Unterobjekte von A. Man sieht, daß $\cup$ und $\cap$ zu $\cup^*$ und $\cap^*$ duale Begriffe sind. Weiter ist klar, daß

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} \cup^* A/U_\alpha &\cong A/\cap U_\alpha\\ \cap^* A/U_\alpha &\cong A/\cup U_\alpha. \end{aligned}$$

Für $\cup U_\alpha$ wird bei Moduln meist $\sum U_\alpha$ geschrieben. Wir wollen das im allgemeinen vermeiden, um Verwechslungen mit direkten Summen auszuschließen. Bei Moduln stimmt $\cap$ mit dem mengentheoretischen Durchschnitt überein.

Ein Unterobjekt K eines Objekts A in $\mathfrak{C}$ heiße *klein in* A, wenn für alle Unterobjekte B von A aus $K \cup B = A$ folgt $B = A$. Ein Objekt K in $\mathfrak{C}$ heiße *klein*, wenn es als Repräsentant eines kleinen Unterobjekts von einem Objekt A in $\mathfrak{C}$ vorkommt.

Ein Unterobjekt G eines Objekts A in $\mathfrak{C}$ heiße *groß in* A, wenn für alle Unterobjekte B von A aus $G \cap B = 0$ folgt $B = 0$.

Dual zu klein definieren wir *kokleine Objekte*. Diese sind wegen (2.2) Faktorobjekte nach großen Kernen.

Wir nehmen von jetzt an an, daß in $\mathfrak{C}$ die Unterobjekte jedes Objekts eine Menge bilden. Dann definieren wir das (Jacobson-) *Radikal* eines Objekts A durch

$$\mathrm{Ra}\, A := \cap \{M \mid M \text{ maximales Unterobjekt von } A\}.$$

Dual dazu definieren wir das *Koradikal* durch

$$\mathrm{Cora}\, A := \cap^* \{M^* \mid M^* \text{ maximales Faktorobjekt von } A\}.$$

Der *Sockel* von A werde definiert durch

$$\mathrm{So}\, A := \bigcup \{U \mid U \text{ einfaches Unterobjekt von } A\}.$$

Dann ist nach Definition $A/\mathrm{So}\, A \cong \mathrm{Cora}\, A$.

Für Modulkategorien sind nun folgende Aussagen bekannt [5, 6]

$$\mathrm{Ra}\, A = \bigcup \{U \mid U \text{ kleines Unterobjekt in } A\} \tag{2.3}$$

$$\mathrm{So}\, A = \bigcap \{G \mid G \text{ großes Unterobjekt in } A\}. \tag{2.4}$$

Die Aussage (2.4) wurde zuerst von F. Sandomierski bewiesen (unveröff.).

Wegen der Definition von $\bigcup^*$ und $\bigcap^*$ ist dann

$$\mathrm{Cora}\, A = \bigcup^* \{V \mid V \text{ kokleines Faktorobjekt von } A\}. \tag{2.5}$$

Die Beweise von (2.3) und (2.4) verwenden nicht duale Eigenschaften von $\mathfrak{C}$, wir wollen daher nur fordern, daß in $\mathfrak{C}$ (2.3) und (2.5) erfüllt sind.

Im folgenden benötigen wir zwei weitere zueinander duale Eigenschaften von $\mathfrak{C}$, die wir jetzt für den Fall von Modulkategorien herleiten wollen. Zunächst bemerken wir, daß das Radikal eines Objekts Vereinigung (Summe) von kleinen Objekten ist, und zwar von solchen kleinen Objekten, die sich monomorph in das Radikal abbilden lassen. Das Radikal eines Objekts ist also die Vereinigung der im Radikal enthaltenen kleinen Unterobjekte. (Diese sind im allgemeinen nicht klein im Radikal!)

Hilfssatz 2.1 [6]: *Jeder Untermodul U eines Radikals* $\mathrm{Ra}\, A$ *von einem Modul A ist Summe der in U enthaltenen Untermoduln, die als Moduln klein sind.*

Beweis: Da U die Summe der einfach erzeugten Untermoduln von U ist, genügt es zu zeigen, daß jeder einfach erzeugte Untermodul des Radikals $\mathrm{Ra}\, A$ klein in A ist. Sei $m \in \mathrm{Ra}\, A$ und Rm nicht klein in A. Dann existiert ein echter Untermodul B von A mit $Rm + B = A$. B kann mit dem Zornschen Lemma maximal bezüglich dieser Eigenschaften gewählt werden, und man sieht, daß dann B ein maximaler Untermodul von A wird. Dann ist aber wegen $m \in \operatorname{Ra} A = \cap \{M | M$ maximaler Untermodul von $A\}$ auch $Rm \subset B$ im Widerspruch zu $B + Rm = A$. Also ist Rm klein in A.

Hilfssatz 2.1*: *Jeder Faktormodul V eines Koradikals* Cora A *von einem Modul A ist Kovereinigung* ($\cup^*$) *der Faktormoduln von V, die als Moduln koklein sind.*

Beweis: Jeder Untermodul B von A, der den Sockel $\operatorname{So} A$ enthält, ist Durchschnitt derjenigen großen Untermoduln G von A, die B enthalten. Dann ist nämlich

$$(A/\operatorname{So} A)/(B/\operatorname{So} A) \cong A/B \cong A/\cap G = \cup^* A/G.$$

Wir zeigen dazu, daß für jedes $a \in A$ mit $a \notin B$ ein großes G so existiert, daß $B \subset G$ und $a \notin G$. Sei G maximal bezüglich dieser Eigenschaft gewählt. Wir wollen zeigen, daß G groß in A ist. Sei G nicht groß in A. Dann existiert ein Untermodul U von A mit $U \neq 0$ und $G \subset U = 0$. Also ist $G + U = G \oplus U$. Da G maximal und $B \subset G \oplus U$, ist $a \in G \oplus U$, also erhalten wir eine eindeutige Darstellung $a = g + u$. Wegen $0 = U \cap G = U \cap \operatorname{So} A$ ist U nicht einfach. Es existiert also ein $W \subset U$ mit $u \notin W$ und $W \neq 0$. Da $G \cap W = 0$ und $B \subset G + W = G \oplus W$, ist wieder $a \notin G \oplus W$, also erhalten wir wieder eine eindeutige Darstellung $a = g + w$. Damit ist $u = w$ im Widerspruch zu $u \notin W$. Also ist G groß in A.

Die zueinander dualen Eigenschaften der Hilfssätze 2.1 und 2.1* werden wir später für die abelsche Kategorie $\mathfrak{C}$ fordern. Zunächst aber wollen wir die Begriffe klein und koklein in $\mathfrak{C}$ weiter untersuchen.

3. Wir nennen einen *Monomorphismus f wesentlich* [2, 3, 6, 8, 10], wenn gilt: gf ist genau dann Monomorphismus, wenn g Monomorphismus ist. Es ist trivial zu sehen, daß das Bild eines Monomorphismus $f : A \to B$ genau dann groß in B ist, wenn f wesentlich ist. Also ist ein Objekt genau dann koklein, wenn es als Kokern eines wesentlichen Monomorphismus auftritt.

Ein *Epimorphismus* f heiße *wesentlich*, wenn gilt: fg ist genau dann Epimorphismus, wenn g Epimorphismus ist. Ein Objekt ist genau dann klein, wenn es als Kern eines wesentlichen Epimorphismus auftritt.

Hilfssatz 3.1: *Sei K klein in A und $f: A \longrightarrow B$ ein Morphismus. Dann ist* Bi $(K \longrightarrow A \longrightarrow B)$ *klein in B* [6].

Beweis: Sei $f(K) \cup U = B$. Dann ist $A = f^{-1}(f(K) \cup U) = f^{-1} f(K) \cup f^{-1}(U) = K \cup f^{-1}(U)$. Da K klein in A ist, ist $f^{-1}(U) = A$, also ist $U = B$. Dieser Schluß ist berechtigt wegen [2, Th. 4.31 und Th. 7.34].

Hilfssatz 3.1*: *Sei K ein kokleines Faktorobjekt von A und $f: B \longrightarrow A$ ein Morphismus. Dann ist* Cobi $(B \longrightarrow A \longrightarrow K)$ *kokleines Faktorobjekt von B.*

Hilfssatz 3.1* besagt also, daß das Urbild eines großen Unterobjekts G von A bei $f: B \longrightarrow A$ groß in B ist.

Satz 3.2: *Die volle Unterkategorie $\mathfrak{K}$ der kleinen Objekte von $\mathfrak{C}$ ist eine abelsche Kategorie.*

Satz 3.2*: *Die volle Unterkategorie $\mathfrak{K}^*$ der kokleinen Objekte von $\mathfrak{C}$ ist eine abelsche Kategorie.*

Beweis: Sind K bzw. L klein in A bzw. B, so ist offenbar $K \oplus L$ klein in $A \oplus B$, denn $K \cup L = K \oplus L$ in $A \oplus B$, und da K und L klein in $A \oplus B$ (Hilfssatz 3.1), ist auch $K \cup L$ klein in $A \oplus B$. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{K}$ eine abelsche Kategorie ist, genügt es jetzt zu zeigen, daß die Kerne und Kokerne von Morphismen in $\mathfrak{K}$ schon selbst in $\mathfrak{K}$ liegen [2, Th. 3.41]. Dann existiert nämlich für jeden Morphismus in $\mathfrak{K}$ eine Analyse, also ist $\mathfrak{K}$ abelsch. Ist nun K ein Objekt in $\mathfrak{K}$, so existiert ein A, so daß K klein in A ist. Ist $L \subset K$, so ist auch L klein in A, also ist auch L ein Objekt in $\mathfrak{K}$. Ist $K \longrightarrow L$ ein Epimorphismus mit Kern M, so ist L klein in A/M nach Hilfssatz 3.1.

4. Wir überlassen im folgenden die Formulierungen und Beweise der dualen Sätze dem Leser und beweisen nur die Sätze für kleine Objekte.

Hilfssatz 4.1: *Für das Objekt K sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) K ist klein.

2) Es existiert ein Objekt A und ein Monomorphismus $f: K \to A$ derart, daß aus der Existenz eines kommutativen Diagramms

(4.1)
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[dl] \\ Q & \end{tikzcd}$$

mit Epimorphismus g immer $Q = 0$ folgt.

Beweis: Ist K klein, so sei K klein in A. Nach Hilfssatz 3.1 ist dann $Q = 0$. Ist K nicht klein, so ist für alle A und alle Monomorphismen $f: K \to A$ auch K nicht klein in A. Es existiert daher immer ein Unterobjekt B von A, das echt in A enthalten ist, mit $K \cup B = A$. Also ist $K \to A/B = Q$ ein Epimorphismus mit $Q \neq 0$.

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Kategorie $\mathfrak{C}$ auch genügend viele injektive Objekte besitzt, d. h., daß jedes Objekt monomorph in ein injektives Objekt abgebildet werden kann. Aus Dualitätsgründen besitze $\mathfrak{C}$ auch genügend viele projektive Objekte. Dann gilt:

Hilfssatz 4.2: *K ist genau dann klein, wenn K in jeder injektiven Erweiterung I von K klein ist.*

Beweis: Sei K klein in A und I injektive Erweiterung von K. Dann existiert ein kommutatives, exaktes Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd}.$$

Nach Hilfssatz 3.1 ist also K klein in I.

Folgerung 4.3: *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) K ist klein.

2) Für alle injektiven Erweiterungen I von K und alle kommutativen, exakten Diagramme

(4.2)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & I \arrow[dl, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

mit Epimorphismus g ist $Q = 0$.

Für einfache und halbeinfache Objekte wird unsere Charakterisierung der kleinen Objekte wesentlich einfacher. Wir wollen ein Objekt *halbeinfach* nennen, wenn jedes Unterobjekt direkter Summand ist.

Folgerung 4.4: *Sei K halbeinfach (einfach). Dann sind äquivalent:*

1) K ist klein.

2) K besitzt kein von Null verschiedenes injektives Unterobjekt (K ist nicht injektiv).

Beweis: Sei K nicht klein. Dann existiert ein Diagramm (4.2) mit $Q \neq 0$, und da K halbeinfach ist, zerfallen die Morphismen g und h, also besitzt K ein injektives Unterobjekt Q. Ist umgekehrt $Q \neq 0$ ein injektives Unterobjekt von K, so existiert für alle I ein Diagramm (4.2), also ist K nicht klein.

Sei von nun an $\mathfrak{C}$ eine abelsche Kategorie mit unendlichen Summen und Produkten, die (2.3) und (2.5) erfüllt, mit genügend vielen injektiven und projektiven Objekten und mit Generatoren und Kogeneratoren.

Ein Objekt A in $\mathfrak{C}$ heiße *klein erzeugt*, wenn es die Vereinigung derjenigen in A enthaltenen Unterobjekte ist, die durch kleine Objekte repräsentiert werden. Das Radikal eines Objekts in $\mathfrak{C}$ ist also klein erzeugt. In Hilfssatz 2.1 hatten wir bewiesen, daß Untermoduln des Radikals eines Moduls klein erzeugt sind. Das wollen wir jetzt allgemein für $\mathfrak{C}$ fordern. $\mathfrak{C}$ erfülle also die Bedingungen:

(4.3) Jeder Repräsentant eines Unterobjekts von einem Radikal eines Objekts in $\mathfrak{C}$ sei klein erzeugt.

(4.4) Jeder Repräsentant eines Faktorobjekts von einem Koradikal eines Objekts in $\mathfrak{C}$ sei koklein erzeugt (d. h. die Kovereinigung von kokleinen Objekten).

Sei A in $\mathfrak{C}$ klein erzeugt und sei I eine injektive Erweiterung von A. Dann sind die Unterobjekte von A, die durch kleine Objekte repräsentiert werden, nach Hilfssatz 4.2 kleine Unterobjekte von I. Damit ist A im Radikal von I enthalten. Ist $B \subset A$, so ist B in Ra I enthalten, nach (4.3) also klein erzeugt.

Hilfssatz 4.5: *Jeder Repräsentant eines Unterobjekts von einem klein erzeugten Objekt ist klein erzeugt.*

Folgerung 4.6: *Ein Objekt A ist genau dann klein erzeugt, wenn es im Radikal einer (und damit jeder) injektiven Erweiterung von A enthalten ist.*

Satz 4.7: *Ein Objekt repräsentiert ein Unterobjekt eines Radikals genau dann, wenn es klein erzeugt ist.*

Für eine Untersuchung der Radikale von Objekten in $\mathfrak{C}$ wäre es daher jetzt von Interesse, die klein erzeugten Objekte von $\mathfrak{C}$ zu kennen. Der folgende Satz 4.8 und die Beispiele in Teil 6 zeigen allerdings, daß diese Methode in einigen interessanten Fällen viel zu grob ist, um daraus Aussagen über das Radikal zu erhalten.

Satz 4.8: *Folgende Aussagen über die Kategorie $\mathfrak{C}$ sind äquivalent:*

1) Es existiert ein klein erzeugter Generator G.

2) Alle Objekte in $\mathfrak{C}$ sind klein erzeugt.

3) Alle injektiven Objekte in $\mathfrak{C}$ sind klein erzeugt.

4) Kein injektives Objekt besitzt maximale Unterobjekte.

5) Es gibt eine injektive Erweiterung I eines Generators in $\mathfrak{C}$, die mit ihrem Radikal übereinstimmt: Ra $I = I$.

Beweis: 1 impliziert 2: Sei A ein beliebiges Objekt in $\mathfrak{C}$. Dann ist bekanntlich $\mathrm{Bi}(\sum G \to A) = A$. Da $G = \mathrm{Bi}(\sum K \to G)$, ist also $A = \mathrm{Bi}(\sum \sum K \to A)$, wobei die Abbildungen der K in A durch die Zusammensetzung $K \to G \to A$ definiert seien. Jedes Bild K' eines K in A repräsentiert ein Faktorobjekt von K, ist also nach Satz 3.2 klein. Daher ist $A = \mathrm{Bi}(\sum K' \to A)$, wobei die K' klein sind und Unterobjekte von A repräsentieren. Also ist A klein erzeugt.

2 impliziert 3 trivialerweise.

3 impliziert 4: Durch Folgerung 4.6 folgt aus 3 die Aussage $\mathrm{Ra}\, I = I$ für alle injektiven Objekte I. Nach Definition des Radikals ist daher 4 erfüllt.

5 ist ein Spezialfall von 4 und 1 folgt aus 5 durch die Folgerung 4.6.

Gilt für $\mathfrak{C}$ eine der äquivalenten Aussagen von Satz 4.8, so nennen wir $\mathfrak{C}$ *klein erzeugt*. Wir bemerken, daß nicht alle Objekte in $\mathfrak{C}$ klein sein können, d. h. daß $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ nicht übereinstimmen, da nach Hilfssatz 4.2 die injektiven von Null verschiedenen Objekte nicht klein sein können. Es besteht also ein ganz wesentlicher Unterschied zwischen den kleinen und den klein erzeugten Objekten in $\mathfrak{C}$. Wenn wir allerdings zur Erzeugung nur endlich viele kleine Objekte zulassen, also $A = \cup \{K_i \mid i = 1, \ldots, r\}$ bilden, dann ist A wieder klein, da $\mathfrak{K}$ eine abelsche volle Unterkategorie von $\mathfrak{C}$ ist.

Wir geben jetzt noch ein hinreichendes Kriterium für kleine Objekte an, das später zur Charakterisierung der kleinen Moduln über Dedekindringen verwendet werden wird.

Folgerung 4.9: *Sei $\mathfrak{C}$ klein erzeugt. Sei A ein Objekt mit der Eigenschaft, daß jedes von Null verschiedene Faktorobjekt von seinem Radikal verschieden ist. Dann ist A klein.*

Beweis: Sei K nicht klein, dann existiert ein Diagramm (4.2) mit $Q \neq 0$ nach Folgerung 4.3. Also ist $Q \neq \mathrm{Ra}\, Q$, d. h. Q hat maximale Unterobjekte, also einfache Faktorobjekte. Daher hat I einfache Faktorobjekte, also maximale Unterobjekte im Widerspruch zu Aussage 4 von Satz 4.8.

5. Die bisher gewonnenen Ergebnisse lassen sich auf Grund der dualen Voraussetzungen alle dualisieren. In diesem Teil wollen wir die Ergebnisse auf Modulkategorien anwenden. Daher müssen von jetzt ab die kleinen und die kokleinen Moduln gesondert untersucht werden. Wir wollen trotzdem versuchen, weitgehend duale Resultate zu erzielen.

Sei R ein beliebiger Ring und ϱ die Menge der Elemente aus R, die keinen Linksannullator in R haben. Wir nennen einen R-Linksmodul A *teilbar*, wenn für alle $r \in \varrho$ gilt $rA = A$. Offenbar ist ein Faktormodul eines teilbaren Moduls teilbar. Ein Element $b \neq 0$ eines R-Rechtsmoduls B heiße *Torsionselement*, wenn es ein $r \in \varrho$ gibt mit $br = 0$. B heiße *torsionsfrei*, wenn es in B keine Torsionselemente gibt. Ein Untermodul eines torsionsfreien Moduls ist torsionsfrei. Wie im Falle eines Integritätsbereiches zeigt man, daß alle injektiven Moduln teilbar und alle projektiven Moduln torsionsfrei sind [1].

Hilfssatz 5.1: *Hat K keinen von Null verschiedenen teilbaren Faktormodul, so ist K klein.*

Beweis: Sei K nicht klein. Dann existiert ein Diagramm (4.2) mit $Q \neq 0$ und Q ist teilbar. Analog beweisen wir

Hilfssatz 5.2: *Ist K ein Torsionsmodul, d. h. hat K keinen von Null verschiedenen torsionsfreien Untermodul, so ist K koklein.*

Nennen wir einen Integritätsbereich R echt, wenn R kein Körper ist, so gilt:

Folgerung 5.3: *Jeder echte Integritätsbereich R ist klein in der Kategorie der R-Moduln. Die Kategorie der R-Moduln ist klein erzeugt.*

Beweis: Die Aussage folgt aus Hilfssatz 5.1 und Satz 4.8, da R ein Generator ist.

Folgerung 5.4: *Ist R ein echter Integritätsbereich, so ist die Kategorie der R-Moduln koklein erzeugt.*

Beweis: Wir weisen das Duale der Aussage 4 von Satz 4.8 nach. Da R ein echter Integritätsbereich ist, enthält R keine einfachen Untermoduln. Sei nämlich $E \subset R$ einfach, so hätte für $0 \neq e \in E$ der Epimorphismus $r \to re$ von R auf E den Kern I, d. h. I ist der Annullator von E. Da R ein Integritätsbereich ist, ist $I = 0$, also $R \cong E$. Aber R ist kein Körper. Damit ist unsere Aussage bewiesen. Eine direkte Summe von Kopien von R besitzt also auch keine einfachen Untermoduln, und ein projektiver Modul als direkter Summand dieser Summe erfüllt ebenfalls die Eigenschaft.

Hilfssatz 5.5: *Sei der Modul M klein erzeugt und endlich erzeugt. Dann ist M klein.*

Beweis: Da jeder klein erzeugte Modul M Untermodul eines Radikals ist, ist jeder einfach erzeugte Untermodul von M klein, wie im Beweis von Hilfssatz 2.1 gezeigt wurde. Da M als endlich erzeugter Modul von endlich vielen kleinen Untermoduln erzeugt wird, ist M selbst klein.

Folgerung 5.6: *Ein Ring R ist genau dann klein, wenn die Kategorie der R-Moduln klein erzeugt ist.*

Es ist klar, daß unendlich erzeugte Moduln in einer klein erzeugten Modulkategorie im allgemeinen nicht klein sein werden, wie etwa die injektiven Moduln. Wir kennen aber trotzdem eine große Klasse von kleinen unendlich erzeugten Moduln:

Satz 5.7: *Sei die Kategorie der R-Moduln klein erzeugt. Dann sind die halbeinfachen Moduln klein.*

Folgerung 5.8: *Ist die Kategorie der R-Moduln klein erzeugt, so existieren keine von Null verschiedenen injektiven, halbeinfachen Moduln.*

Beweis: Der Satz folgt aus Folgerung 4.9, da jeder Faktormodul maximale Untermoduln enthält. Analog zeigt man:

Satz 5.9: *Sei die Kategorie der R-Moduln koklein erzeugt. Dann sind die halbeinfachen Moduln koklein.*

Folgerung 5.10: *Ist die Kategorie der R-Moduln koklein erzeugt, so existieren keine von Null verschiedenen projektiven, halbeinfachen Moduln.*

Damit haben wir für Integritätsbereiche R eine Klasse von Moduln angegeben, die sowohl koklein als auch klein sind.

Ehe wir zur Charakterisierung der kleinen und kokleinen Moduln über einem Dedekindring kommen, wollen wir noch eine Bemerkung zur abelschen Kategorie der kleinen Moduln machen. Die Frage, ob diese Kategorie wieder als eine Modulkategorie darstellbar ist, ist negativ zu beantworten, falls der Ring R klein ist. Sei nämlich I ein injektives Objekt von $\mathfrak{K}$, so ist I bezüglich aller Einbettungen von Idealen in R injektiv, da diese in $\mathfrak{K}$ liegen. Also ist I ein injektiver Modul. Da I klein und injektiv ist, ist $I = 0$. Also gilt:

Satz 5.11: *Sei der Ring R klein und $\mathfrak{K}$ die abelsche Kategorie der kleinen R-Moduln. $\mathfrak{K}$ besitzt keine von Null verschiedenen injektiven Objekte.*

6. Im letzten Teil wollen wir die injektiven und die endlich erzeugten, projektiven Moduln über einem Dedekindring charakterisieren [11, 12] und damit die kleinen und kokleinen Moduln untersuchen.

Satz 6.1: *Sei R ein echter Integritätsbereich. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) Ein Modul I ist genau dann injektiv, wenn er mit seinem Radikal übereinstimmt.

2) R ist ein Dedekindring.

Beweis: 1 impliziert 2: Ist $\mathrm{Ra}\, I = I$, so stimmen auch alle Faktormoduln J von I mit ihrem Radikal überein. Also sind alle Faktormoduln eines injektiven Moduls injektiv. Damit ist R hereditär, also ein Dedekindring.

2 impliziert 1: In Satz 4.8 wurde schon bewiesen, daß das Radikal eines injektiven Moduls mit dem Modul übereinstimmt. Sei nun I nicht injektiv. Dann ist I nicht teilbar [1 S. 134 Prop. 5.1]. Also existiert ein $r \in R$, $r \neq 0$ mit $rI \neq I$, also auch $RrI \neq I$. Aber $Rr = \prod_{i=1}^{s} (\mathfrak{p}_i)^{n_i}$ als Ideal in einem Dedekindring. Daher existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}I \neq I$. $I/\mathfrak{p}I \neq 0$

ist ein $R/\mathfrak{p}$-Vektorraum, hat also einfache $R/\mathfrak{p}$-Faktormoduln. Diese sind auch einfache R-Faktormoduln. Da I jetzt maximale Untermoduln hat, ist $I \neq \text{Ra } I$.

Satz 6.2: *Sei R ein echter Dedekindring. Ein R-Modul M ist dann und nur dann klein, wenn alle von Null verschiedenen Faktormoduln N von M von ihrem Radikal verschieden sind.*

Beweis: Wegen Folgerung 4.9 brauchen wir nur eine Richtung zu zeigen. Habe M einen Faktormodul $N \neq 0$ mit $\text{Ra } N = N$, so ist N injektiv. Nach Hilfssatz 4.1 ist damit M nicht klein.

Folgerung 6.3 (Leonard): *Eine abelsche Gruppe G ist dann und nur dann klein, wenn zu jeder Untergruppe H von G eine maximale Untergruppe existiert, die H enthält.*

Das folgt direkt aus Satz 6.2, da die Bedingung äquivalent ist zu $\text{Ra } (G/H) \neq G/H$ und da $\mathbf{Z}$ ein echter Dedekindring ist.

Wir geben jetzt die Beweise für den dualen Fall der kokleinen Moduln über Dedekindringen.

Satz 6.4: *Sei R ein echter Noetherscher Integritätsbereich. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *Ein endlich erzeugter Modul P ist genau dann projektiv, wenn sein Sockel Null ist:* So $P = 0$.
2) *R ist ein Dedekindring.*

Beweis: 1 impliziert 2: Nach Satz 4.8* haben alle projektiven Moduln den Sockel Null. Wegen 1 sind dann alle endlich erzeugten Untermoduln von projektiven Moduln projektiv. Also ist R ein Prüferring. Da R ein Noetherscher Ring ist, ist R ein Dedekindring.

2 impliziert 1: Wegen Satz 4,8* brauchen wir nur zu zeigen, daß endlich erzeugte Moduln mit Sockel Null projektiv sind. Sei M endlich erzeugt, aber nicht projektiv. Dann ist M nicht torsionsfrei [1 S. 133 Prop. 4.1]. Also existiert ein $r \in R$, $m \in M$, $r \neq 0$, $m \neq 0$ mit $Rrm = 0$. Da $Rr = \prod (\mathfrak{p}_i)^{n_i}$, $i = 1, \ldots, s$, existiert ein maximales $\mathfrak{p}$ und ein $m' \in M$, $m' \neq 0$ mit $\mathfrak{p}m' = 0$.

Also ist $\mathfrak{p} Rm' = 0$. Da Rm' ein $R/\mathfrak{p}$-Vektorraum wird, besitzt Rm' einen einfachen $R/\mathfrak{p}$-Untermodul, der auch einfacher R-Untermodul ist. Damit besitzt M einen einfachen Untermodul, also ist So $M \neq 0$.

Hilfssatz 6.5: *Sei R ein echter Dedekindring. Ein R-Modul M ist genau dann koklein, wenn für alle von Null verschiedenen Untermoduln U von M der Sockel von Null verschieden ist.*

Beweis: Wegen Folgerung 4.9* brauchen wir wieder nur eine Richtung zu beweisen. Sei K koklein. Wegen Folgerung 4.3* besitzt K keine projektiven Untermoduln. Sei $U \subset K$, $U \neq 0$. Dann existiert ein endlich erzeugter Untermodul V von U, der als Untermodul von K nicht projektiv ist. Wegen Satz 6.4 ist So $V \neq 0$. Damit ist auch So $U \neq 0$, da der Sockel die Summe der einfachen Untermoduln ist.

Satz 6.6: *Sei R ein echter Dedekindring. Ein R-Modul M ist genau dann koklein, wenn M ein Torsionsmodul ist.*

Beweis: Sei M ein Torsionsmodul. Wegen Hilfssatz 5.2 ist dann M koklein. Sei M kein Torsionsmodul. Dann existiert ein $m \in M$ mit $Rm \cong R$. Nach dem Beweis von Folgerung 5.4 ist So $R = 0$, also So $Rm = 0$. Nach Hilfssatz 6.5 ist M nicht koklein. Damit ist Satz 6.6 bewiesen.

Satz 6.6 legt eine weitere Frage nahe, die wir noch untersuchen wollen. In jedem Modul über einem Integritätsbereich existiert ein größter Torsionsuntermodul. Für Dedekindringe heißt das, daß in jedem Modul ein größter kokleiner Untermodul existiert. Wir fragen, ob sich dieses Resultat verallgemeinern läßt. Nach Hilfssatz 5,2 ist klar, daß jeder Torsionsmodul über einem echten Integritätsbereich kokleiner Modul ist. Ein größter kokleiner Untermodul müßte also den größten Torsionsuntermodul enthalten.

Satz 6.7: *Sei R ein Integritätsbereich. Jeder R-Modul M besitzt einen größten kokleinen Untermodul.*

Beweis: Sei $\{K_\alpha\}$ die Menge aller kokleinen Untermoduln von M. Seien $0 \to G_\alpha \to P_\alpha \to K_\alpha \to 0$ exakte Folgen mit freien

R-Moduln P_α. Nach Hilfssatz 4.2* sind die G_α groß in P_α. Wir bilden $\oplus G_\alpha \to \oplus P_\alpha$. Dann ist $\oplus G_\alpha$ groß in $\oplus P_\alpha$. Sei $U \subset \oplus P_\alpha$, $u \in U$, $u \neq 0$. Dann ist $u = \sum u_i$, $i = 1, \ldots, n$ mit $u_i \neq 0$. Also ist $Ru_i \cap G_i \neq 0$, da die G_i groß in P_i sind. Also ist $r_i u_i = g_i \in Ru_i \cap G_i$. Sei $r = \prod r_i$, dann ist $r \neq 0$, da R ein Integritätsbereich ist. Wir definieren $s_j = \prod r_i$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq j$. Dann ist $ru = \sum s_i g_i \in \oplus G_\alpha \cap U$, also ist $\oplus G_\alpha$ groß in $\oplus P_\alpha$. Bilden wir $\oplus P_\alpha$ in M ab vermöge der Homomorphismen $P_\alpha \to K_\alpha \to M$, so ist $\oplus G_\alpha$ im Kern von $\oplus P_\alpha \to M$ enthalten und die K_α sind im Bild enthalten. Das Bild ist ein kokleiner Modul, der alle kokleinen Untermoduln von M enthält, also der gesuchte größte kokleine Untermodul.

Literatur

[1] Cartan, H. und Eilenberg, S.: Homological Algebra. Princeton 1956.

[2] Freyd, P.: Abelian Categories. Harper and Row, New York, 1964.

[3] Gabriel, P.: Des catégories abéliennes. Bull. Soc. math. France, 90 (1962) 323–448.

[4] Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohuku Math. J. 9 (1957) 119–221.

[5] Isphording, U.: Diplomarbeit. Universität München 1965.

[6] Kasch, F.: Seminar. Universität München 1963–64.

[7] Leonard, W. W.: Some results on small modules (preliminary report) Notices AMS 11 (1964) 748.

[8] Leonard, W. W.: Some results on small modules (Proc. AMS).

[9] Leonard, W. W.: A note on small modules and K-maximal modules (unveröffentlicht).

[10] MacLane, S.: Homology. Springer Berlin, Academie Press New York, 1963.

[11] Serre, J.-P.: Corps locaux. Hermann Paris, 1962.

[12] Zariski, O. und Samuel, P.: Commutative Algebra. Van Nostrand, 1958.