BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Herleitung der Richtungs- und Verträglichkeitsbedingungen der Charakteristikentheorie bei einer beliebigen Anzahl der unabhängigen Veränderlichen

Von Robert Sauer in München

Vorgelegt am 9. Oktober 1964

## Übersicht



Die Grundgleichungen (*Richtungs-* und *Verträglichkeitsbedingungen*) der Charakteristikentheorie für Systeme partieller Differentialgleichungen bei Problemen vom hyperbolischen Typus werden in den meisten Lehrbüchern nur für den Fall von 2 unabhängigen Veränderlichen hergeleitet. Der allgemeine Fall einer beliebigen Anzahl der unabhängigen Veränderlichen wird dann gewöhnlich mit einigen kurzen Bemerkungen abgetan oder nur für Sonderfälle erörtert. So ist z. B. in meinem Buch „Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen", 2. Auflage, Springer-Verlag, 1958, in § 30 die Untersuchung auf 2 quasilineare Differentialgleichungen mit 3 unabhängigen Veränderlichen beschränkt. Der Übergang von dieser Untersuchung zum allgemeinen Fall würde eine sehr undurchsichtige und zudem nur spezielle Form der Verträglichkeitsbedingungen liefern.

In der vorliegenden Note wird gezeigt, daß sich die Grundgleichungen der Charakteristikentheorie mit Hilfe von Linearkombinationen der vorgelegten Differentialgleichungen und mit Verwendung des Matrizenkalküls im allgemeinen Fall in derselben einfachen Weise herleiten und in derselben durchsichtigen Form darstellen lassen wie im Spezialfall von 2 unabhängigen Veränderlichen. Zum Schluß wird ein für die Numerik wichtiger Spezialfall und ein Beispiel aus der Physik mit 4 unabhängigen Veränderlichen (Ausbreitung nichtlinearer Druckwellen idealer Gase im Raum) erörtert.

## § 1. Systeme quasilinearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir setzen voraus, daß sich das vorgegebene System partieller Differentialgleichungen auf ein System von $m > 1$ quasilinearen Differentialgleichungen erster Ordnung für $m$ Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ der $n+1$ unabhängigen Veränderlichen $t, x_1, \ldots, x_n$ zurückführen läßt. Die durch die Bezeichnung $t$ hervorgehobene Veränderliche bedeutet in den physikalischen Anwendungen die Zeit. Das Problem soll bezüglich $t$ vom hyperbolischen Typus sein, d. h. die Anfangswertaufgabe, bei der die Anfangsdaten für $t = 0$ in einem gewissen Bereich der $x_1, \ldots, x_n$ vorgegeben sind, soll ein „sachgemäß gestelltes" Problem für ein gewisses Zeitintervall $0 \leqq t < \bar{t}$ sein.

Wir fassen die $m$ Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ und die rechten Seiten $h_1, \ldots, h_m$ der Differentialgleichungen zu den Spaltenmatrizen

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_m \end{pmatrix},$$

ferner die Koeffizienten der Ableitungen von $f$ nach den $x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ zu den quadratischen Matrizen

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & \ldots & a_{1m}^{(i)} \\ \hline a_{m1}^{(i)} & \ldots & a_{mm}^{(i)} \end{pmatrix}$$

zusammen. Die Koeffizienten der $a_{\mu\nu}^{(i)}$ sowie die rechten Seiten $h_1, \ldots, h_m$ sind Funktionen der $t, x_1, \ldots, x_n$ und der $f_1, \ldots, f_m$. Dann läßt sich das System der $m$ quasilinearen Differentialgleichungen in matrizieller Form schreiben:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = h.} \tag{1}$$

## § 2. Charakteristische Flächenelemente

Ein $n$-dimensionales „*Flächenelement*" (Hyperflächenelement) durch einen Punkt des $R_{n+1}$ der $t, x_1, \ldots, x_n$ ist festgelegt durch

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i = dt. \tag{2}$$

Hierbei sind die $p_i$ Funktionen von $t, x_1, \ldots, x_n$.

Wir zeichnen irgendeine der $x$-Achsen, etwa die $x_k$-Achse $(1 \leq k \leq n)$, aus und spannen das Flächenelement auf durch $n$ linear unabhängige Richtungen, nämlich

a) durch 1 Richtung parallel zur $(x_k, t)$-Ebene:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{1}{p_k}, \quad dx_i = 0 \text{ für } i \neq k, \tag{3a}$$

b) durch $n-1$ Richtungen parallel zu den $n-1$ $(x_k, x_i)$-Ebenen mit $i \neq k$:

$$\frac{dx_k}{dx_i} = -\frac{p_i}{p_k}, \quad dt = 0 \text{ und } dx_j = 0 \text{ für } j \neq i \text{ und } \neq k. \tag{3b}$$

Die Ableitungen einer Funktion nach diesen Richtungen bezeichnen wir mit

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{4a}$$

bzw.

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{p_i}{p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{für } i \neq k. \tag{4b}$$

Man kann nun 2 Klassen von Flächenelementen unterscheiden, nämlich *reguläre* und *charakteristische* Flächenelemente:

Bei einem regulären Flächenelement lassen sich mit Hilfe der Gl. (1) die äußeren (d. h. aus dem Flächenelement herausführenden) Ableitungen der Funktionen $f$ im $R_{n+1}$ berechnen, wenn ihre inneren Ableitungen im Flächenelement bekannt sind.

Bei einem charakteristischen Flächenelement sind durch die inneren Ableitungen der Funktionen $f$ im Flächenelement die äußeren Ableitungen von $f$ durch die Gl. (1) nicht festgelegt. Die Gln. (1) liefern statt dessen mindestens eine lineare Beziehung *(Verträglichkeitsbedingung)* zwischen den inneren Ableitungen der $f$. Die inneren Ableitungen der $f$ in einem charakteristischen Flächenelement sind also nicht beliebig wählbar, sondern Verträglichkeitsbedingungen unterworfen.

## § 3. Ermittlung der charakteristischen Flächenelemente

Bei einem charakteristischen Flächenelement durch einen festen Punkt des $R_{n+1}$ muß mindestens eine Linearkombination der $m$ Gln. (1) existieren, in der nur innere Ableitungen $\frac{d}{dt}$ und $\frac{d}{dx_i}$ $(i \neq k)$ von $f$ auftreten, während äußere Ableitungen nicht vorkommen. Diese Linearkombinationen sind dann die Verträglichkeitsbedingungen für das betreffende charakteristische Flächenelement.

Wir bilden nun zunächst irgendeine Linearkombination der Gln. (1) durch vordere Multiplikation mit einer Zeilenmatrix

$$\tau^T = (\tau_1, \ldots, \tau_m).$$

Vorher formen wir die Gln. (1) mit Hilfe der Gln. (4a) und (4b) um in

$$\frac{df}{dt} - \frac{1}{p_k}\frac{\partial f}{\partial x_k} + \left(A_k + \frac{1}{p_k}\sum_{i \neq k}' p_i A_i\right)\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i \neq k}' A_i \frac{df}{dx_i} = h.$$

Dabei wird in den Summen $\sum'$ über $i$ von 1 bis $n$ mit Auslassung von $i = k$ summiert. Wegen

$$A_k + \frac{1}{p_k} \sum_{i \neq k}' p_i A_i = \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{n} p_i A_i$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = E \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

ergibt sich

$$\tau^T \left( \frac{df}{dt} + \sum_{i \neq k}' A_i \frac{df}{dx_i} \right) + \frac{\tau^T}{p_k} \left( \sum_{i=1}^{n} p_i A_i - E \right) \frac{\partial f}{\partial x_k} = \tau^T h. \tag{5}$$

$E$ ist die Einheitsmatrix.

Wenn nun das durch die $p_i$ festgelegte Flächenelement charakteristisch ist, enthält die Linearkombination (5) bei geeigneter Wahl von $\tau^T$ nur die inneren Ableitungen $\frac{df}{dt}$ und $\frac{df}{dx_i}$ $(i \neq k)$. Umgekehrt: Wenn die Linearkombination (5) nur diese inneren Ableitungen enthält, ist das Flächenelement charakteristisch. Daraus ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die charakteristischen Flächenelemente, daß das in den $\tau_1, \ldots, \tau_m$ homogen-lineare Gleichungssystem

$$\boxed{\tau^T \left( \sum_{i=1}^{n} p_i A_i - E \right) = 0} \tag{6}$$

eine nichttriviale Lösung $\tau^T$ zuläßt, daß also

$$\boxed{\det \left( \sum_{i=1}^{n} p_i A_i - E \right) = 0} \tag{7}$$

gilt.

Die der Gl. (7) *(Richtungsgleichung)* genügenden Wertesysteme $p_1, \ldots, p_n$ liefern die durch einen festen Punkt des $R_{n+1}$ gehenden charakteristischen Flächenelemente. Hierauf ergeben sich zu jedem dieser charakteristischen Flächenelemente aus der Gl. (6) nichttriviale Lösungen $\tau^T$, für welche die Linearkombination Gl. (5) sich auf

$$\boxed{\tau^T \left( \frac{df}{dt} + \sum_{i \neq k}' A_i \frac{df}{dx_i} \right) = \tau^T h} \tag{8}$$

reduziert. Jede sich so ergebende Gl. (8) ist *Verträglichkeitsbedingung* für das betreffende charakteristische Flächenelement.

Wenn das zu lösende Anfangswertproblem, wie in § 2 vorausgesetzt, hinsichtlich $t$ vom hyperbolischen Typus ist, hat Gl. (7) eine $(n-1)$-parametrige Menge reeller Lösungen $p_1, \ldots, p_n$, d. h. es existiert in dem betreffenden Punkt des $R_{n+1}$ eine $(n-1)$-parametrige Menge charakteristischer Flächenelemente mit $dt \neq 0$.

## § 4. Ergänzungen

Man kann die Ausführungen des § 3 dadurch verallgemeinern, daß man die Richtung (3a) des betreffenden charakteristischen Flächenelements, die parallel zur $(x_k, t)$-Ebene verläuft, durch eine beliebige Richtung mit $dt \neq 0$ in diesem Flächenelement ersetzt. Dann tritt

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{1}{p_k}, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \lambda_i \text{ für } i \neq k \tag{3a*}$$

anstelle der Gln. (3a), ferner

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^* = \frac{d}{dt} + \sum_{i \neq k}{}' \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i \neq k}{}' \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4a*}$$

anstelle der Gl. (4a) und die allgemeine Verträglichkeitsbedingung

$$\boxed{\tau^T \left\{ \left(\frac{df}{dt}\right)^* + \sum_{i \neq k}{}' (A_i - \lambda_i E) \frac{df}{dx_i} \right\} = \tau^T h} \tag{8*}$$

anstelle der spezielleren Verträglichkeitsbedingung (8).

Für die numerische Behandlung hyperbolischer Anfangswertprobleme mit Hilfe von Differenzenverfahren auf Grund der Charakteristikentheorie (vgl. Literaturverzeichnis [1], [3]) ist es zweckmäßig, sich auf spezielle charakteristische Flächenelemente zu beschränken, nämlich auf solche mit

$$p_i = 0 \text{ für } i \neq k.$$

Gl. (4b) spezialisiert sich dann zu

$$\overline{(4b)} \qquad \frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{für } i \neq k.$$

Anstelle der Gln. (6) bis (8*) treten die spezielleren Gleichungen

$$\overline{(6)} \qquad \tau^T (p_k A_k - E) = 0,$$

$$\overline{(7)} \qquad \det (p_k A_k - E) = 0,$$

$$\overline{(8)} \qquad \tau^T \left( \frac{df}{dt} + \sum_{i \neq k}' A_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \tau^T h,$$

$$\overline{(8^*)} \qquad \tau^T \left\{ \left( \frac{df}{dt} \right)^* + \sum_{i \neq k}' (A_i - \lambda_i E) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} = \tau^T h.$$

## § 5. Ausbreitung nichtlinearer Druckwellen idealer Gase im Raum

Wir erläutern die allgemeinen Erörterungen der vorhergehenden Paragraphen an folgendem Beispiel (vgl. Literaturverzeichnis [2]): Die Ausbreitung räumlicher nichtlinearer isentropischer Druckwellen in idealen Gasen ($c_p$, $c_v$ = konstante spezifische Wärmen bei konstantem Druck bzw. Volumen, $\gamma = c_p/c_v > 1$) genügen den 4 quasilinearen Differentialgleichungen

$$u_t + u u_x + v u_y + w u_z + \frac{2}{\gamma - 1} a a_x = 0,$$

$$v_t + u v_x + v v_y + w v_z + \frac{2}{\gamma - 1} a a_y = 0,$$

$$w_t + u w_x + v w_y + w w_z + \frac{2}{\gamma - 1} a a_z = 0,$$

$$\frac{2}{\gamma - 1} (a_t + u a_x + v a_y + w a_z) + a(u_x + v_y + w_z) = 0$$

für die 4 Funktionen $u$, $v$, $w$, $a$ der 4 unabhängigen Veränderlichen $t$, $x$, $y$, $z$. Dabei sind $u$, $v$, $w$ die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in einem Cartesischen rechtwinkligen ($x$, $y$, $z$-)Koordinatensystem, $a$ ist die Schallgeschwindigkeit (= Ausbreitungsgeschwindigkeit „kleiner" Störungen) und $t$ die Zeit.

Es handelt sich hier um ein Problem mit $m = n = 3$. Wir setzen $x = x_1 = x_k$, ferner $y = x_2$ und $z = x_3$.

Die Richtungsbedingung $(\overline{7})$, in der wir jetzt $\frac{1}{p_k} = \varrho$ setzen, liefert nach elementarer Rechnung

$$(u - \varrho)^2 \, [(u - \varrho)^2 - a^2] = 0,$$

woraus sich für $\varrho$ die Werte

$$\varrho^{(1,2)} = u \pm a, \quad \varrho^{(3)} = \varrho^{(4)} = u$$

ergeben.

Aus der Gl. $(\overline{6})$ erhält man hierauf 4 Linearkombinationen

$$\tau^T_{1,2,3,4} = \begin{cases} (1, & 0, & 0, & 1), \\ (1, & 0, & 0, & -1), \\ (0, & 1, & 0, & 0), \\ (0, & 0, & 1, & 0). \end{cases}$$

Als Richtungsgleichungen (3a*) bekommt man

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{1,2} &= u \pm a, \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_3 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)_4 = u, \end{aligned}\right\} \quad \frac{dy}{dt} = \lambda^{(1,2,3,4)}, \quad \frac{dz}{dt} = \mu^{(1,2,3,4)}$$

und als Verträglichkeitsbedingungen (8*)

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^*_1 \left(u + \frac{2}{\gamma - 1} a\right) = \begin{cases} (\lambda^{(1)} - v) \dfrac{\partial}{\partial y}\left(u + \dfrac{2}{\gamma-1} a\right) + \left(\mu^{(1)} - w\right) \dfrac{\partial}{\partial z}\left(u + \dfrac{2}{\gamma-1} a\right) \\ \qquad - a(v_y + w_z), \end{cases}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^*_2 \left(u - \frac{2}{\gamma - 1} a\right) = \begin{cases} (\lambda^{(2)} - v) \dfrac{\partial}{\partial y}\left(u - \dfrac{2}{\gamma-1} a\right) + \left(\mu^{(2)} - w\right) \dfrac{\partial}{\partial z}\left(u - \dfrac{2}{\gamma-1} a\right) \\ \qquad + a(v_y + w_z), \end{cases}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^*_3 v = (\lambda^{(3)} - v)\, v_y + (\mu^{(3)} - w)\, v_z - \frac{2}{\gamma - 1}\, a a_y,$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^*_4 w = (\lambda^{(4)} - v)\, w_y + (\mu^{(4)} - n)\, w_z - \frac{2}{\gamma - 1}\, a a_z.$$

Dabei ist

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_j^* = \frac{\partial}{\partial t} + \varrho^{(j)}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda^{(j)}\frac{\partial}{\partial y} + \mu^{(j)}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{mit } j = 1, 2, 3, 4.$$

**Literaturverzeichnis**


[1] R. Sauer: Differenzenverfahren für hyperbolische Anfangswertprobleme bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen mit Hilfe von Nebencharakteristiken. Num. Mathematik 5, 55–67 (1963).

[2] —: Anwendung eines neuen Differenzenverfahrens auf die Ausbreitung nichtlinearer Druckwellen. Publ. de l'Institut Mathématique de Beógrade, 2 (16), 43–53 (1962).

[3] W. Werner: Experimental results on the method of „Nebencharakteristiken". European Office of Aerospace Research, Bericht Nr. 6408 (1964).