BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Der mathematische Begriff der Signifikanz

Von Georg Aumann, in München

Vorgelegt am 5. Juni 1964

Im folgenden wird ein allgemeiner Begriff beschrieben, der bei vielen mathematischen Überlegungen eine maßgebliche Rolle spielt. Er ist in gewisser Weise mit dem Prinzip der vollständigen Induktion verwandt. Seine systematische Anwendung in den verschiedenen Bereichen der Mathematik führt auf wichtige bisher nur wenig beachtete Problemstellungen.

1. Es sei M eine Menge, $\mathfrak{K}$ eine Menge von Teilmengen von M und $A(X)$ eine Aussage, die für $X \in \mathfrak{K}$ und $X = M$ sinnvoll ist.

$\mathfrak{K}$ heißt *signifikant für* $A(M)$, wenn aus der Gültigkeit von $A(X)$ für alle $X \in \mathfrak{K}$ die Gültigkeit von $A(M)$ folgt.

Dieser Begriff legt ein zweiteiliges Beweisverfahren für die Gültigkeit von $A(M)$ nahe, das dem der vollständigen Induktion analog ist:

(1) Nachweis von $A(X)$ für $X \in \mathfrak{K}$;
(2) Nachweis der Signifikanz von $\mathfrak{K}$.

Da es sich um einen Schluß „von Teilen auf das Ganze" handelt, gibt es sich, daß in den Anwendungen häufig die umgekehrte Schlußweise „vom Ganzen auf Teile" als Selbstverständlichkeit vorhanden ist, indem die Aussage A „erblich" ist, d. h.

aus $A(X)$ und $X_1 \subset X$ stets $A(X_1)$ folgt.

2. Beispiele und Probleme

(a) Es sei M ein topologischer Raum, in dem das erste Abzählbarkeitsaxiom gilt, und $f|M$ sei eine reelle Funktion. $A(N)$ besage, daß die Einengung $f|N$ von $f|M$ auf die Teilmenge N von M eine stetige Funktion ist. $\mathfrak{K}_0$, das System der abzählbaren Teilmengen von M, ist signifikant für $A(M)$, d. h. für die Stetigkeit von f auf ganz M.

(b) f sei eine reelle analytische Funktion der reellen Veränderlichen x und y, erklärt in einem offenen Bereich B der x, y-Ebene, der den Punkt (0, 0) enthält. $A(N)$ bedeute die Aussage, daß $(0, 0) \in N \subset B$ und $f|N$ in (0, 0) ein relatives Maximum besitzt. Das System der analytischen Kurven durch (0, 0) ist signifikant für $A(B)$, d. h. dafür, daß $f|B$ in (0, 0) ein relatives Maximum besitzt.

Neuartig dürften die folgenden Probleme sein.

(c) Es sei $f|G$ eine reelle Funktion auf einer endlichen Gruppe G. Die Frage nach dem Maximum von $f|G$ ist an sich unproblematisch, da es sich um die Bestimmung des größten Wertes unter den endlich vielen Zahlen $f(x)$, $x \in G$, handelt. Wenn man jedoch die Suche nach dem größten Wert systematisch betreiben will, so kommt das Problem der Signifikanz zum Vorschein. Um die Vorstellungen zu fixieren, fragen wir nach Bedingungen dafür, daß die Gruppeneins 1 Maximumstelle von $f|G$ ist. Es ist klar, daß hierzu notwendig ist, daß 1 Maximumstelle für $f|U$ ist, wo U irgendeine Untergruppe von G bezeichnet. Offensichtlich ist jede Menge von Untergruppen, deren Vereinigung gleich G ist, signifikant dafür, daß 1 Maximumstelle von $f|M$ ist. Gibt es kleinere Systeme von Untergruppen, die ebenfalls signifikant sind? Dies kann man nur dann erwarten, wenn f besondere Eigenschaften hat, die mit der Struktur von G verbunden sind. Hier bieten sich Funktionen der Bauart

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i(x)$$

an, worin χ_i Charaktere von G in die reellen Zahlen $\neq 0$ bedeuten. Hierüber soll in einer späteren Arbeit berichtet werden.

(d) Das Problem der Signifikanz tritt überall da auf, wo neben der „Totalaufgabe" eines mathematischen Problems auch „zugehörige Teilaufgaben" formulierbar sind. Um hier einen konkreten Fall zu beschreiben, betrachten wir ein Linearprogramm P: Bei vorgegebenen Koeffizienten a_{ik} seien die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und s so zu bestimmen, daß

$$-s \leq a_{i0} + a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leq s, \qquad i = 1, \ldots, m$$

gilt und dabei s möglichst klein ist; das ist die „Totalaufgabe". Eine zugehörige „Teilaufgabe" ist gestellt, wenn eine nicht-leere Teilmenge N_1 von $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ und Werte x_h^0 für $h \in N - N_1$ vorgegeben sind und die Unbekannten x_k, $k \in N_1$, und s so zu bestimmen sind, daß

$$-s \leq a_{i0} + \sum_{h \in N - N_1} a_{ih} x_h^0 + \sum_{k \in N_1} a_{ik} x_k \leq s$$

gilt und s möglichst klein ist; wir nennen das die „Teilaufgabe" $(N_1; x_h^0)$. Man gehe von Werten $x_1^0, \ldots, x_n^0$ aus; $A(N_1)$ besage, daß $\{x_k^0 : k \in N_1\}$ eine Lösung der Teilaufgabe $(N_1; x_h^0)$ ist.

Wenn sich für ein vorgegebenes Linearprogramm P nachweisen läßt, daß etwa die Menge $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ signifikant ist für $A(N)$, so besteht die Möglichkeit, das „große" Problem N durch alternierende und periodische Anwendung der „kleinen" Probleme N_j im Sinne einer Approximation zu lösen.

3. Es sei noch bemerkt, daß sich die Fragestellung auch umkehren kann, indem man versucht, mathematische Probleme zu kennzeichnen, bei welchen ein *vorgegebenes* System $\mathfrak{K}_0$ signifikant ist.[1]

Nachtrag bei der Korrektur (29. 9. 1964)

Zu Beispiel (a)

A. Rosenthal (On the continuity of functions of several variables. Math. Z. 63 (1955), 31–38) beweist: Für die Stetigkeit in (0,0) der in der Umgebung U von (0,0) erklärten reellen Funktion $f(x, y)$ der reellen Veränderlichen x, y ist die Menge aller durch (0,0) laufenden konvexen einmal differenzierbaren Bogen B signifikant, d. h. ist $f|B$ in (0,0) stetig für jedes B, dann ist $f|U$ in (0,0) stetig.

[1] In diesem Sinne kann z. B. der Hauptsatz (S. 497) in meiner Arbeit "Approximation by step functions" (Proc. Amer. Math. Soc. 14 [1963]) aufgefaßt werden.

Zu Beispiel (b)

Ein Beweis für die darin formulierte Behauptung ergibt sich mit Hilfe des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes für reelle analytische Funktionen und der Resultate von L. Scheffer (Math. Ann. **35** (545–551) (1890)).

Zu Beispiel (d). Jedes lineare Approximationsproblem

$$(AP): f(t) \sim x_1 \varphi_1(t) + \cdots + x_n \varphi_n(t),\ t \in T,$$

mit *glatter* Norm $\|\cdots\|$ („Glattheit" besagt: Gilt $\|f+\lambda g_i\| \geqq \|f\|$ für alle λ und für $i=1,2$, so gilt $\|f+(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)\| \geqq \|f\|$ für alle alle (λ_1, λ_2)) besitzt „eindimensionale Signifikanz", d. h. es gilt folgendes: Hat das System $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ die Eigenschaft, das für $i=1, \cdots, n$ das Approximationsproblem

$$(AP)_i: f(t) - (x_1^0 \varphi_1(t) + \cdots + x_n^0\ \varphi_n(t)) + x_i^0 \varphi_i(t) \sim x_i \varphi_i(t),\ t \in T,$$

die Lösung $x_i = x_i^0$ besitzt, so ist $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ Lösung für (AP) selbst.