

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen von hoher Ordnung

Von Hans Hornich in Wien

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 5. Juni 1964

Der Existenzsatz für die gewöhnlichen Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung wird üblicherweise durch Übergang zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung gezeigt, für welches dann das Approximationsverfahren nach Picard angewendet wird. Dieses Verfahren läßt sich speziell für lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = f(x) \quad (1)$$

ohne den Umweg über ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung auch so modifizieren, daß man bei der Approximation mehrfache Integrale heranzieht und die Lösung direkt als Reihe von iterierten Integralen anschreibt, die in dem Intervall konvergiert, in dem (1) definiert ist und die Koeffizienten  $L$ -integrierbar sind.

Die dabei auftretenden Formeln und Abschätzungen speziell für große  $n$  zeigen nun, daß eine nicht verschwindende unbeschränkt differenzierbare Funktion, die an einer Stelle mit allen Ableitungen verschwindet, für hinreichend große  $n$  nicht die Lösung einer Differentialgleichung (1) mit beschränkten Koeffizienten sein kann.

Von den Funktionen  $\sigma_i(x)$  und  $f(x)$  setzen wir nur  $L$ -Integrierbarkeit in einem festen Intervall  $I$ , das den Nullpunkt enthält, voraus. Wir beschränken uns stets auf die Lösungsfunktion mit

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \quad (2)$$

die durch Übergang von  $y$  auf  $\bar{y} = y + \sum_{j=1}^{n-1} a_j x^j$  mit geeigneten  $a_j$  stets erreicht werden kann.

Für eine  $L$ -integrierbare Funktion  $g(x)$  in  $I$  schreiben wir kurz

$$\int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_0^{\xi_{j-1}} g(\xi_j) d\xi_j = \int_0^x g(\xi) d\xi, \quad (3)$$

dieser Operator definiert in  $I$  eine  $j$ -fach differenzierbare Funktion  $G(x)$  mit

$$G^{(r)}(x) = \int_{(j-r)}^x g(\xi) d\xi \quad r = 0, \dots, j. \quad (4)$$

Dann läßt sich (1) in der Form anschreiben:

$$y(x) = \int_{(n)}^x f(\xi) d\xi - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{(n)}^x \sigma_i(\xi) y^{(i)}(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Wir bilden dann eine Folge von Funktionen  $y_k(x)$  mit

$$y_1(x) = \int_{(n)}^x f(\xi) d\xi \quad (6)$$

und

$$y_{k+1}(x) = \int_{(n)}^x f(\xi) d\xi - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{(n)}^x \sigma_i(\xi) y_k^{(i)}(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Man sieht sofort, daß alle so gebildeten  $y_k$   $n$ -fach differenzierbar sind, und es gilt

$$y_{k+1}^{(j)}(x) = \int_{(n-j)}^x f(\xi) d\xi - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{(n-j)}^x \sigma_i(\xi) y_k^{(i)}(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Nach (6) und (7) ist also

$$y_{k+1}(x) - y_k(x) = - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{(n)}^x \sigma_i(\xi) \cdot [y_k^{(i)}(\xi) - y_{k-1}^{(i)}(\xi)] d\xi \quad (9)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} y_{k+1}(x) - y_k(x) &= (-1)^{k-1} \sum_{i_1=0}^{n-1} \int_{(n)}^x \sigma_{i_1}(\xi_1) d\xi_1 \cdot \\ &\cdot \sum_{i_2=0}^{n-1} \int_{(n-i_1)}^{\xi_1} \sigma_{i_2}(\xi_2) d\xi_2 \dots \sum_{i_{k-1}=0}^{n-1} \int_{(n-i_{k-2})}^{\xi_{k-2}} \sigma_{i_{k-1}}(\xi_{k-1}) [y_2^{(i_{k-1})}(\xi_{k-1}) - y_1^{(i_{k-1})}(\xi_{k-1})] d\xi_{k-1}. \end{aligned}$$

Wir zeigen die Konvergenz der Reihe

$$y(x) = y_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [y_{k+1}(x) - y_k(x)] = \lim y_k(x). \quad (10)$$

Sei

$$F = \sup_{\xi \in I} |f(\xi)| \quad S_i = \sup_{\xi \in I} |\sigma_i(\xi)|;$$

dann ist

$$\left| \int_{(n-j)} f(\xi) d\xi \right| \leq F \frac{|x|^{n-j}}{(n-j)!} \quad (11)$$

und

$$|y_2^{(j)}(x) - y_1^{(j)}(x)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{(n-j)} \sigma_i(\xi) y_1^{(i)}(\xi) d\xi \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} F \cdot S_i \frac{|x|^{2n-i-j}}{(2n-i-j)!} \quad (12)$$

( $j = 0, \dots, n$ )

also

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \sum_{i_1=0}^{n-1} \dots \sum_{i_k=0}^{n-1} F \cdot S_{i_1} \dots S_{i_k} \frac{|x|^{n+(n-i_1)+\dots+(n-i_k)}}{(n+(n-i_1)+\dots+(n-i_k))!}. \quad (13)$$

Analoge Formeln gelten für die  $j$ -ten Ableitungen

$$y_{k+1}^{(j)}(x) - y_k^{(j)}(x).$$

Für die Konvergenz der Reihe (10) ist also die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{n-1} \dots \sum_{i_k=0}^{n-1} \frac{|x|^{n+(n-i_1)+\dots+(n-i_k)}}{(n+(n-i_1)+\dots+(n-i_k))!} \quad (14)$$

für alle  $x$  hinreichend.

Jede natürliche Zahl  $N$  läßt sich auf  $2^{N-1}$  verschiedene Arten als Summe natürlicher Zahlen mit Berücksichtigung der Anordnung darstellen; daher kommt in (14) jedes Glied  $\frac{|x|^{n+N}}{(n+N)!}$  auf höchstens  $2^{n+N-1}$  Arten vor und es konvergiert die Reihe (10) für jedes  $x$  absolut.

Die Reihe (10) liefert also die Lösung von (1) mit der Bedingung (2) für jedes  $x$  in  $I$ .

Durch die Abschätzungen (14) wird gleichzeitig die Güte der Approximation unserer Lösung durch die Reihe (10) gegeben.

Auf Grund dieser Darstellung der Lösung und wegen der Abschätzung (13) können wir auch asymptotische Aussagen über die Lösungen von Folgen von Differentialgleichungen (1) mit wachsendem  $n$  machen.

Bei festem  $x$  strebt das iterierte Integral  $\int_{(n)}^x g(\xi) d\xi$  mit  $n \rightarrow \infty$  gegen Null. Daraus und aus (13) (14) folgt:

Für eine Folge von Differentialgleichungen

$$y_n^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{i,n}(x) \cdot y_n^{(i)} = f_n(x) \quad (15)$$

mit  $n \rightarrow \infty$  und mit gleichmäßig beschränkten Koeffizienten  $|\sigma_{i,n}(x)| < K$  und  $|f_n(x)| < K$  in  $I$  strebt die Folge der Lösungen  $y_n$  von (15) mit den Bedingungen  $y_n(0) = y_n'(0) = \dots = y_n^{(n-1)}(0) = 0$  gegen Null. Es folgt also:

*Zu jeder nicht identisch verschwindenden, unbeschränkt differenzierbaren Funktion  $h(x)$  in  $I$ , die im Nullpunkt mit allen Ableitungen verschwindet, und zu jeder Zahl  $K > 0$  gibt es eine Zahl  $N$  so, daß für alle  $n > N$  die Funktion  $h(x)$  sicher nicht eine Lösung einer Differentialgleichung (1) mit Koeffizienten  $|\sigma_i(x)| < K$  und  $|f(x)| < K$  ist.*