BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkungen zur Darstellungstheorie komplexer Liegruppen

Von Michael Otte in Göttingen

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 7. Februar 1964

In der Theorie der Liegruppen bildet der von I. Ado im Jahre 1935 bewiesene Satz, daß jede Liegruppe lokalisomorph zu einer Matrixgruppe ist, den Ausgangspunkt einer Darstellungstheorie. Etwa zur gleichen Zeit kannte man aber schon Liegruppen, die global zu keiner linearen Gruppe topologisch isomorph sind. Die vorliegende Note enthält einen Beitrag zur Bestimmung der Klasse aller zusammenhängenden komplexen Liegruppen, die eine holomorphe, treue Darstellung gestatten: Jede komplexe Untergruppe einer $Gl(n, C)$ trägt „genügend viele" holomorphe Funktionen; abgesehen von einer „entsprechenden" Bedingung an die komplexe Struktur, läßt sich die Gesamtheit der „darstellbaren" Gruppen jedoch durch rein topologische Eigenschaften ihrer Radikale charakterisieren. Die Note schließt sich in vieler Hinsicht eng an die Arbeiten von M. Goto ([4], [5]) bzw. G. Hochschild und G. D. Mostow ([6], [9]) an.

1. Im Folgenden sei stets vorausgesetzt, daß die auftretenden (reellen oder komplexen) Liegruppen G zusammenhängend sind. Unter einer (stetigen, reellanalytischen bzw. holomorphen) Darstellung von G verstehen wir einen (stetigen, . . .) Homomorphismus φ von G in eine $Gl(n, C)$; φ heißt treu, wenn φ injektiv ist, und lokaltreu, falls Kern (φ) diskret in G liegt. Jede stetige Darstellung ist reellanalytisch und sie ist holomorph, genau wenn ihr Differential eine komplex lineare Abbildung ist. Operiert G vermöge der holomorphen Darstellung φ auf dem komplexen Vektorraum V und ist t ein lineares Funktional auf dem Endomorphismenring von V, so heißt $f := t \circ \varphi$ zu φ gehörige (holomorphe) Darstellungsfunktion auf G. Die Gesamtheit der holomorphen Darstellungsfunktionen schlechtweg bildet eine Unteralgebra D der Algebra $\mathfrak{H}(G)$ aller auf G holomorphen Funktionen.

Ist G D-separabel, so bildet $\mathfrak{H}(G)$ die Komplettierung von D in der Topologie der kompakten Konvergenz auf G. Operiert G wieder vermöge φ auf V und bezeichnet V' die direkte Summe der irreduziblen G-Moduln, die als Quotienten einer Jordan-Hölder-Kette[1] des G-Moduls V auftreten, so heißt die von φ auf V' induzierte Darstellung φ' die zu φ gehörige vollreduzible Darstellung von G und man nennt φ unipotent, falls φ' trivial ist.

Als grundlegend erweist sich nun die Tatsache, daß mit zwei linearen Liegruppen G_1, G_2 auch gewisse halbdirekte Produkte G $(= G_1 \cdot G_2)$ Lieuntergruppen einer $Gl(n, C)$ sind (siehe [6]).[2] Was wir hier benötigen, enthält der folgende

Satz 1: Ist $G = G_1 \cdot G_2$ halbdirektes Produkt, wobei der Normalteiler G_2 auflösbar ist, sowie φ eine holomorphe, treue Darstellung von G_2 mit: $\varphi'(yxy^{-1}x^{-1}) = 1$ für jedes $y \in G$ und jedes $x \in G_2$. Dann gibt es eine holomorphe Darstellung ϱ von G, die treu auf G_2 ist, mit: Kern $\varrho' \supset$ Kern φ'. Besitzt überdies G_1 eine treue Darstellung, so auch G.

Der Beweis ergibt sich aus einem Lemma von Hochschild-Mostow (vergl. [6] Lemma 3.1):

Lemma 1: Ist G eine auflösbare, komplexe Liegruppe, φ eine holomorphe Darstellung von G und $\mathfrak{A}$ eine Menge von holomorphen Automorphismen a von G, derart daß i) $\varphi'(a(x)x^{-1}) = 1$ *für alle $x \in G$ gilt, dann ist für jede zu φ gehörige Darstellungsfunktion f der von $f \circ a$ mit $a \in \mathfrak{A}$ über C aufgespannte lineare Raum endlichdimensional.*

Beim Beweis des Lemmas wird zunächst gezeigt, daß man sich auf einfachzusammenhängende Gruppen beschränken kann. (Denn es gibt zu $a \in \mathfrak{A}$ genau einen Automorphismus a^* der universellen Überlagerung $\tilde{G}$ mit: $p \circ a^* = a \circ p$, wo p die kanonische Projektion von $\tilde{G}$ auf G darstellt; i) ist trivial zu verifizieren.) Ist G einfachzusammenhängend, so induziert die Exponentialabbildung eine biholomorphe Abbildung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G auf G. Indem man einige einfache Tatsachen aus der

---

[1] Bourbaki, Algèbre, Chap. I.

[2] Das Beispiel in Bemerkung ii) S. 7 zeigt, daß die Aussage nicht für jedes halbdirekte Produkt gültig ist.

Lietheorie ausnutzt, beweist man das Lemma durch direktes Rechnen in der Algebra. Nun zum Beweis von Satz 1:

Jedes $x_0 \in G$ schreibt sich eindeutig als $x_0 = g_1 \cdot g_2$, $g_i \in G_i$. Bezeichnet D_φ den Vektorraum der zu φ gehörigen Darstellungsfunktionen, so sei für $f \in D_\varphi$

$$ {}_{x_0}f(y) := f(g_1 \cdot y \cdot g_1^{-1} \cdot g_2) $$

Es ist:

$$ {}_{(x_1 \cdot x_2)}f = {}_{x_1}({}_{x_2}f) $$

Nach Lemma 1 ist der von ${}_{g_1}f(g_1 \in G_1)$ aufgespannte Raum endlichdimensional; daher erzeugt die Gesamtheit der G-Transformierten von Elementen aus D_φ einen endlichdimensionalen Darstellungsraum U für G. Bleibt die Inklusion $Kern\ \varrho' \supset Kern\ \varphi'$ zu zeigen; wegen der Bedingung des Satzes ist $Kern\ \varphi'$ Normalteiler in G. Nach einem Satz von Kolchin folgt daher die Behauptung, falls für $x \in Kern\ \varphi'$ die lineare Transformation $(1 - \varrho(x))$ nilpotent ist. Dies ergibt sich wegen ${}_x({}_yf) = {}_y({}_{y^{-1}\,xy}f)$ $y \in G$ aus der Tatsache, daß mit einer Darstellung ψ auch die Darstellung auf D_ψ unipotent ist. Da sich jede Darstellung von G_1 trivial auf G fortsetzen läßt, erhält man durch Bildung der direkten Summe zweier fortgesetzter Darstellungen eine solche von G.

2. Ist $\tilde{K}$ eine maximale kompakte reellanalytische Untergruppe der komplexen Liegruppe G und bezeichnen $\tilde{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{g}$ die zugehörigen Algebren, dann heißt G reduziert, falls gilt:

$$ \text{i)}\ \mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{k}} + i\tilde{\mathfrak{k}} \qquad \text{ii)}\ \tilde{\mathfrak{k}} \cap i\tilde{\mathfrak{k}} = (0) $$

(Vergl. zu dem Folgenden auch [9].)

Man sagt auch, G ist Komplexifizierung von $\tilde{K}$. Bekanntlich ist jede halbeinfache komplexe Liegruppe reduziert. Ist G K-vollständig, so werden für jede positivdimensionale komplexe Untergruppe H von G die Punkte einer Umgebung der 1 in H durch die Spuren holomorpher Funktionen auf G von der 1 getrennt; H kann daher in keiner kompakten Untergruppe K^* von G enthalten sein, da die einparametrigen Untergruppen von H eine ganze Umgebung der 1 bedecken. Da in $\tilde{K}$ eine konjugierte jeder reellanalytischen kompakten Untergruppe von G enthalten ist,[3] läßt sich dies durch die Relation ii) ausdrücken. $\tilde{K}$ ist als maximale kompakte Untergruppe zusammenhängend; G ist daher in diesem Falle genau dann reduziert, wenn G die kleinste komplexe Untergruppe von sich ist, die $\tilde{K}$ umfaßt. Eine K-vollständige komplexe Liegruppe heiße reduktiv, wenn die zugehörige Algebra reduktiv[4] ist.

Es gilt dann der folgende

Satz 2: Jede reduktive Liegruppe G ist direktes Produkt einer reduzierten Gruppe G^* und einer komplexen Vektorgruppe V, $G = G^* \times V$.

Beweis: Da $\mathfrak{g}$ reduktiv ist, gilt: $G = SZ$, wo S halbeinfach, Z abelsch und S und Z abgeschlossen in G sind; weiter ist $S \cap Z$ endlich und daher in einer maximalen kompakten Untergruppe von Z enthalten. In Z gilt wie in G die Relation ii), und es ergibt sich daher leicht: $Z = C^{*m} \times C^n$. Es ist insbesondere $S \cap Z = S \cap C^{*m}$, weiter ist $(SC^{*m}) \cap C^n = (1)$: Sei nämlich $x \in (SC^{*m}) \cap C^n$, so hat x die Form $x = yz$ mit: $y \in S$ und $z \in C^{*m}$, es gilt also $y = z^{-1} x \in S \cap Z$, damit ist $x \in C^{*m}$ und wegen $C^{*m} \cap C^n = (1)$ folgt $x = 1$, also ist $G = (SC^{*m}) \times C^n$ direkt.

Eine darstellungstheoretisch wichtige Charakterisierung der reduzierten Gruppen liefert der

Satz 3: Ist G eine komplexe Liegruppe, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) *G besitzt eine (abgeschlossene) holomorphe, treue Darstellung, und: Jede holomorphe Darstellung ist vollreduzibel.*

ii) *G ist reduziert.*

Eine reduzierte Gruppe ist als komplexe Mannigfaltigkeit holomorph-vollständig.

i) $\rightarrow$ ii) Dies ergibt sich sofort aus Satz 2. (Die Beschränkung einer vollreduziblen Darstellung auf einen Normalteiler bleibt vollreduzibel.)

---

[3] [11], Theorem 6.

[4] réductive bei Bourbaki.

ii) $\rightarrow$ i) Wir haben wieder $G = SC^{*m}$, $S \cap C^{*m}$ endlich. Für die halbeinfache Gruppe S ist die Aussage i) wohlbekannt. (Einen einfachen Beweis findet man etwa in [13], Prop. 1.) Der Beweis wird vollständig mit Hilfe des folgenden

Lemma 2: (Goto) Ist G eine komplexe Liegruppe mit abgeschlossener holomorpher treuer Darstellung und H ein endlicher Normalteiler in G, dann besitzt die Faktorgruppe G/H ebenfalls eine abgeschlossene holomorphe treue Darstellung.

Der Beweis hierfür läßt sich aus [5] (Lemma 8) wörtlich auf den holomorphen Fall übertragen; zur Abgeschlossenheit: G ist abgeschlossene Untergruppe der ebenfalls abgeschlossenen linearen Gruppe aller Matrizen der Form:

$$\begin{pmatrix} g'_1 & & & & & \\ & \cdot & & & & 0 \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ 0 & & & & \cdot & \\ & & & & & g'_h \end{pmatrix}$$

wobei die g'_j volle Matrixgruppen sind. Dehnt man die Abbildung auf diese Gruppe aus, so ist sie offensichtlich eigentlich (die Urbilder kompakter Mengen sind abgeschlossen und beschränkt). Daher ist das Bild von G abgeschlossen. Daß die Darstellungen von G vollreduzibel sind, folgt sofort aus der entsprechenden Aussage für kompakte Liegruppen. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Satz 4: (Matsushima) Jede einfachzusammenhängende komplexe Liegruppe G besitzt eine holomorphe, treue Darstellung.

Beweis: Nach Malcev ist jeder Normalteiler in G einfachzusammenhängend. Mit dem Satz von Ado und dem auf Seite (3) erwähnten Satz von Kolchin, sowie Satz 1 erhält man daher eine Darstellung des Radikals R von G, die auf dem Nilradikal Nr von G unipotent und treu ist, wobei man R aus Nr durch Bildung halbdirekter Produkte aufbaut. Da das Zentrum Z von Nr eine positiv dimensionale Vektorgruppe ist, außer es ist $R = (1)$, kann man eine holomorphe Darstellung von R als gegeben ansehen, deren Kern gerade Z ist und die auf Nr unipotent ist (Induktion nach der Dimension von R!). Durch Bildung der direkten Summe erhält man aus diesen Darstellungen eine treue Darstellung von R, die unipotent auf Nr ist. Da G eine globale Levizerlegung besitzt, ergibt sich aus Satz 1 und Satz 3 die Behauptung.

Satz 5: (Goto) Ist G eine auflösbare Liegruppe, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) G besitzt eine reellanalytische treue Darstellung.

ii) Die abgeschlossene Hülle der Kommutatorgruppe $\bar{G}'$ ist einfachzusammenhängend.

iii) G ist halbdirektes Produkt einer maximalen kompakten Untergruppe K mit einem einfachzusammenhängenden Normalteiler H.

iv) Das Zentrum Z^* von $\bar{G}'$ ist zusammenhängend und einfachzusammenhängend.

v) $K \cap G' = (1)$.

Zum Beweis siehe [5] Theorem 5.

3. In diesem Abschnitt soll ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Darstellbarkeit einer komplexen Liegruppe angegeben werden. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz 6: Eine komplexe Liegruppe G besitzt genau dann eine holomorphe, treue Darstellung, wenn G K-vollständig ist und eine topologische Darstellung besitzt.

Zum Beweis zunächst ein sehr einfaches Lemma:

Lemma 3: Ist H abgeschlossener, einfachzusammenhängender und auflösbarer Normalteiler der Liegruppe G, derart daß G/H ein Torus T ist, dann ist G ein halbdirektes Produkt: $G = T.H$.

Die Aussage ist im abelschen Falle trivial und läßt sich im allgemeinen Fall durch vollständige Induktion nach der Dimension von H in wenigen Zeilen erbringen (siehe etwa [7] Lemma 8.1.).

Nun beweisen wir Satz 6: Sei K eine maximale reellanalytische kompakte Untergruppe in G, dann gilt für die zugehörige Algebra: (*) $\mathfrak{k} \cap i\mathfrak{k} = (0)$ (siehe Abschnitt 2). Weiter ist nach [4] Lemma 7 das Radikal N der Kommutatorgruppe G' von G abgeschlossen und einfachzusammenhängend.

Auch für das Radikal R und die abelsche Gruppe R/N gilt die Relation (*). In der Tat ist zunächst $(\tilde{\mathfrak{k}} + i\tilde{\mathfrak{k}}) \cap \mathfrak{n} = (0)$, denn $\mathfrak{n}$ liegt im Kern jeder vollreduziblen Darstellung von $\mathfrak{g}$. Sei nun weiter φ die kanonische Projektion von $R \to R/N$; nach Iwasawa[5] ist $\mathfrak{k}^* := d\varphi(\tilde{\mathfrak{k}})$ Algebra einer maximalen reellanalytischen kompakten Untergruppe von R/N. Ist $z \in \mathfrak{k}^* \cap i\mathfrak{k}^*$, so existieren Elemente $x, y \in \tilde{\mathfrak{k}}$ mit: $z = d\varphi(x) = d\varphi(iy)$. Daher gilt $d\varphi(x - iy) = 0$, d. h. $(x - iy) \in (\tilde{\mathfrak{k}} + i\tilde{\mathfrak{k}}) \cap \mathfrak{n}$, also $(x - iy) = 0$. Insbesondere ist daher $x = 0$ und also auch $z = d\varphi(x) = 0$. Wegen der Relation (*) erhält man $R/N = C^{*m} \times C^n$. $\varphi^{-1}(C^n)$ ist ein abgeschlossener auflösbarer Normalteiler in R und mit N und C^n einfachzusammenhängend (exakte Homotopiesequenz für Faserbündel). Sei $\varrho\colon R - R/\varphi^{-1}(C^n) = C^{*m}$ die kanonische Abbildung und T ein maximaler Torus in C^{*m}, dann liefert Lemma 3 angewandt auf $\varrho^{-1}(T)$, daß in R ein Torus T^* enthalten ist, der durch ϱ isomorph auf T abgebildet wird. T^* ist maximal, da T maximal gewählt war und *Kern* ϱ außer (1) keine kompakten Untergruppen enthält. Sei K^* die kleinste komplexe Untergruppe von R, die T^* umfaßt, dann läßt sich $\varrho \mid T^*$ nach [12] app. eindeutig zu einem Isomorphismus von K^* auf C^{*m} fortsetzen. Daher ist $K^* \cap$ *Kern* $\varrho = (1)$. D.h. $R = K^*$. *Kern* ϱ ist halbdirekt. Wie im Beweis von Satz 4 erhält man eine treue holomorphe Darstellung von *Kern* ϱ, die unipotent auf N ist; mit Satz 1 eine solche für R und schließlich abermals aus Satz 1 eine holomorphe treue Darstellung des auf kanonische Weise definierten halbdirekten Produktes von S und R (S bezeichne eine maximale halbeinfache Untergruppe von G). Lemma 2 ergibt nun die Behauptung von Satz 6.

Bemerkungen: i) Eine komplexe nilpotente Liegruppe besitzt genau dann eine holomorphe treue Darstellung, wenn sie abgesehen von direkten Faktoren der Gestalt C^{*m} einfachzusammenhängend ist, denn aus [5] Lemma 13 folgt, daß C^{*m} bei der Zerlegung von Satz 6 im Zentrum enthalten ist.

ii) Die Bedingungen von Satz 6 sind unabhängig, wie der Torus und das folgende (im wesentlichen von G. Birkhoff stammende)

---

[5] Siehe [11] S. 531.

Beispiel zeigen: G sei die nilpotente Gruppe, bestehend aus den Matrizen

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ x, y, z \in C \right\}$$

und sei $D := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ n \text{ ganz reell} \right\}$

Dann ist G/D zwar als Mannigfaltigkeit holomorphvollständig, jedoch ohne topologische Darstellung, da die Kommutatorgruppe nicht einfachzusammenhängend ist. Gleichzeitig zeigt dies Beispiel, daß nicht jedes halbdirekte Produkt von linearen Liegruppen wieder eine Matrixgruppe ist.

iii) Weiterhin sei bemerkt, daß man aus dem Beweis von Satz 6, wenn man ihn für den allgemeinen Fall durchführt, indem man stets R durch G ersetzt, Satz 2 verwendet und eine Lemma 3 entsprechende Aussage benutzt (der abelsche Fall folgt aus [2] Theoreme 1, der Rest wieder aus [7] Lemma 8.1), erhält: Jede komplexe Untergruppe einer $Gl(n, C)$ ist halbdirektes Produkt einer reduzierten Gruppe mit einem einfachzusammenhängenden auflösbaren Normalteiler.[6] Insbesondere ist also jede (nicht notwendig abgeschlossene) komplexe Liesche Untergruppe einer $Gl(n, C)$ als Mannigfaltigkeit holomorphvollständig.

iv) Eine komplexe Liegruppe besitzt genau dann eine holomorphe treue Darstellung, wenn ihr Radikal eine besitzt. (Die entsprechende topologische Aussage folgt aus einem Satz von Malcev [5] Theorem 7, so daß Satz 6 die Aussage ergibt.)

Satz 7: Besitzt die komplexe Liegruppe G eine lokaltreue holomorphe Darstellung, so gestattet G auch eine holomorphe treue Darstellung.

Wegen Bemerkung iv) genügt es, den Satz nur für auflösbare Gruppen zu beweisen. Als unverzweigte Überlagerung einer K-vollständigen Mannigfaltigkeit ist G K-vollständig. Wegen Satz 6

---

[6] Siehe [9] Theorem 4.2.

folgt die Aussage nun aus dem entsprechenden Satz für reelle Liegruppen. Ein Beweis hierfür ergibt sich etwa wie folgt: Sei $G^* = G/D$ reelle Untergruppe von $Gl(n, C)$, dann ist wegen Satz 5 $G^{*\prime}$ abgeschlossen und einfachzusammenhängend. Die Komponente der 1 des Urbildes von $G^{*\prime}$ in G ist G'. Damit ist G' abgeschlossen und einfachzusammenhängend, und aus Satz 5 folgt, daß G eine topologische Darstellung besitzt.

Korollar: Jede zusammenhängende komplexe Liegruppe mit diskretem Zentrum besitzt eine holomorphe, treue Darstellung, da in diesem Fall die adjungierte Darstellung lokaltreu ist.

Ebenso ergibt sich ein einfacher Beweis eines Theorems, das unseres Wissens im komplexen Fall auf Hochschild-Mostow zurückgeht ([7] Theorem 7.1, errata [9] S. 89–90):

Satz 8: Ist G eine komplexe Liegruppe und existiert zu $x \neq y \in G$ eine holomorphe Darstellung φ von G, so daß $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, dann besitzt G eine holomorphe, treue Darstellung.

Beweis: G ist holomorphseparabel und daher auch K-vollständig, so daß die Aussage wieder aus dem entsprechenden Satz über reellanalytische Darstellungen auflösbarer Liegruppen folgt. Diesen kann man nach Goto ([5] Cor. 2 p. 101) etwa folgendermaßen beweisen: Besitzt G keine topologische Darstellung, dann enthält das Zentrum von $\overline{G'}$ eine kompakte Untergruppe $K^* \neq (1)$ (Satz 5), die durch jede Darstellung von G auf 1 abgebildet wird.

Formuliert man die Aussage von Satz 8 folgendermaßen: Ist G D-separabel (Bezeichnung von Abschnitt 1), so gibt es endlich viele Elemente aus D, die die Punkte von G trennen; – dann folgt der Satz direkt aus Satz 7, da $1 \in G$ eine offene relativ-kompakte Umgebung besitzt, die von endlich vielen Darstellungsfunktionen separiert wird.

4. Aus dem Voranstehenden ergibt sich: Jede K-vollständige komplexe Liegruppe G ist holomorphes Prinzipalfaserbündel über einer linearen Liegruppe mit Faser $C^{*m} \times C^n$. Nach [16] Seite 68 und Bemerkung iii) zu Satz 6 ist G insbesondere holomorphvollständig. Diese funktionentheoretische Aussage stammt von Matsushima und Morimoto (vgl. [13]) und sei als Satz formuliert:

Satz 9: Ist G eine komplexe Liegruppe und $\mathfrak{k}$ die Algebra einer maximalen kompakten reellanalytischen Untergruppe, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) G ist K-*vollständig.*

ii) $\mathfrak{k} \cap i\mathfrak{k} = (0)$.

iii) G ist holomorphvollständig.

Aus i) folgt ii) (siehe Abschnitt 2). Aus ii) folgt iii), denn ist Z_0 die Zusammenhangskomponente der 1 des Zentrums, dann ist Z_0 abgeschlossener Normalteiler in G, und G ist holomorphes Prinzipalfaserbündel über G/Z_0 mit Z_0 als Faser. Z_0 genügt ebenfalls der Relation ii) und es ist daher $Z_0 = C^{*m} \times C^n$. Unsere Behauptung folgt nun sofort aus dem oben Gesagten sowie aus dem Satz 7. Aus iii) folgt i) trivialerweise.

Literatur

[1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. I, Paris 1960.

[2] P. Cartier, Seminaire „Sophus Lie“ Exp. 22, 1954/55.

[3] C. Chevalley, Theory of Lie Groups I, Princeton 1946.

[4] M. Goto, Faithfull Representations of Lie Groups I, Math. Jap. Vol. I, 1948, 107–118.

[5] —, —, II, Nagoya Journal Vol. I, 1950, 91–107.

[6] G. Hochschild, G. D. Mostow, Extension of Representations of Lie Groups and Lie Algebras I. Am. Journal of Math., 79, 1957, 924–942.

[7] —, Representations and representative functions of Lie Groups. Ann. of Math. 66, 1957, 495–542.

[8] —, —, II. Ebd. 68, 1958, 295–313.

[9] —, —, III. Ebd. 70, 1959, 85–100.

[10] R. Iwahashi, A characterisation of holomorphically complete spaces. Proc. Jap. Acad. 36, Nr. 4, 1960, 205–206.

[11] K. Iwasawa, On some types of topological groups. Ann. Math. 50, 1949, 507–557.

[12] Y. Matsushima, Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes. Nagoya Jour., 16–18, 1960, 205–218.

[13] Y. Matsushima, A. Morimoto, Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein. Bull. Soc. math. France, 88, 1960, 137–155.

[14] L. S. Pontrjagin, Topologische Gruppen I, II. Leipzig, 1958.

[15] H. Samelson, Topology of Lie Groups, Bull. Am. Math. Soc., 58, 1952, 2–37.

[16] J. P. Serre, Coll. sur les fonctions de plusieurs variables. Brüssel, 1953, 59–68.

[17] H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher, halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I, II, III. Math. Z. 23, 1925, 271–309, 24, 1926, 328–395.