BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Der Satz von Ptolemäus in der hyperbolischen Geometrie

Von Oskar Perron in München

Mit einer Abbildung

Vorgelegt am 8. November 1963

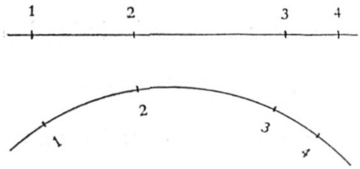
Über den Kreis lernt man in der Schule oder sollte man wenigstens lernen allerhand schöne Dinge, z. B. den Satz von der Konstanz des Peripheriewinkels, dann den im wesentlichen damit gleichbedeutenden Satz, daß im Kreisviereck die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln gleich 180° ist, weiter den Sekanten- und Tangentensatz und als besonderes Paradestück wohl auch den Satz von Ptolemäus: Wenn in einem Kreisviereck a, c und b, d die zwei Paare gegenüberliegender Seiten und e, f die Diagonalen sind, so ist $ac + bd = ef$. Beim Beweis der letzten beiden Sätze stützt man sich auf den Satz von der Konstanz des Peripheriewinkels und auf die Ähnlichkeitslehre. Weder zum einen noch zum andern gibt es in der hyperbolischen Geometrie ein Analogon. Aber beim Sekanten- und Tangentensatz kann man es auch anders machen und findet dann einen ganz hübschen Sekanten- und Tangentensatz auch in der hyperbolischen Geometrie.[1] Das legt den Gedanken nahe, daß es auch beim Satz von Ptolemäus vielleicht anders geht und man ein hübsches Analogon in der hyperbolischen Geometrie finden kann. Im folgenden soll gezeigt werden, daß das wirklich so ist.

Zunächst bemerken wir, daß der Satz von Ptolemäus auch gilt, wenn der Kreis, auf dem die Ecken des Vierecks liegen sollen, in eine gerade Linie ausartet, und dann ist er sogar fast

---

[1] Man vergleiche § 39, 44, 51 in meinem Buch: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1962 (wird in der Folge einfach als „Buch“ zitiert).

trivial. Sind nämlich in der Figur (obere Hälfte) 1, 2, 3, 4 die Ecken des Vierecks in dieser Reihenfolge und bezeichnet man die Strecken $\overline{12}, \overline{13}, \overline{14}$ mit l, m, n, so gilt für die Seiten und Diagonalen des Vierecks etwa



$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a = \overline{12} = l, & b = \overline{23} = m - l, \\ c = \overline{34} = n - m, & d = \overline{41} = n, \\ e = \overline{24} = n - l, & f = \overline{13} = m. \end{array}\right.$$

Nun ist identisch

$$(2)\qquad l(n-m) + (m-l)n = (n-l)m,$$

und daraus folgt vermöge (1) sofort

$$(3)\qquad ac + bd = ef.$$

In der hyperbolischen Geometrie gilt diese triviale Überlegung natürlich ebenso. Nun besteht aber neben (2) auch die Identität

$$(4)\quad \sinh\frac{l}{k}\cdot\sinh\frac{n-m}{k} + \sinh\frac{m-l}{k}\cdot\sinh\frac{n}{k} = \sinh\frac{n-l}{k}\cdot\sinh\frac{m}{k}.$$

Denn man braucht in ihr bloß dreimal die Formel

$$\sinh(q-r) = \sinh q\cdot\cosh r - \cosh q\cdot\sinh r$$

anzuwenden, um zu sehen, daß das wirklich eine Identität ist. Sie besagt dann vermöge (1)

$$(5)\qquad \sinh\frac{a}{k}\cdot\sinh\frac{c}{k} + \sinh\frac{b}{k}\cdot\sinh\frac{d}{k} = \sinh\frac{e}{k}\cdot\sinh\frac{f}{k}.$$

Auch diese Formel mit beliebigem k gilt natürlich in der Euklidischen wie in der hyperbolischen Geometrie. In der Euklidischen ist sie aber völlig uninteressant. In der hyperbolischen ebenfalls, außer für $k = 2$; da gewinnt sie Interesse, weil sie auch gilt, wenn die Ecken des Vierecks nicht auf einer Geraden, sondern auf einer der drei hyperbolischen Kreisformen liegen. Es gilt nämlich der „Satz von Ptolemäus" in folgender Gestalt:

Theorem. *Liegen in der hyperbolischen Geometrie die Ecken eines Vierecks auf einem Kreis oder einem Grenzkreis oder einer Abstandslinie, sind ferner a, c und b, d die zwei Paare gegenüberliegender Seiten und e, f die Diagonalen, so ist*

$$\sinh\frac{a}{2}\cdot\sinh\frac{c}{2}+\sinh\frac{b}{2}\cdot\sinh\frac{d}{2}=\sinh\frac{e}{2}\cdot\sinh\frac{f}{2}.$$

Beweis. Die Seiten und Diagonalen $a, b, \ldots$ des Vierecks sind Sehnen der betreffenden Kurve. Bezeichnet man die zugehörigen Kurvenbogen mit $a', b', \ldots$, so ist in der Figur (untere Hälfte) analog zu (1)

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a' &= \overline{12}' = l', & b' &= \overline{23}' = m' - l', \\ c' &= \overline{34}' = n' - m', & d' &= \overline{41}' = n', \\ e' &= \overline{24}' = n' - l', & f' &= \overline{13}' = m'. \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt, wie oben (3) aus (1) folgte,

$$(7)\qquad a'c' + b'd' = e'f'.$$

Wenn man hier jeden Bogen durch die zugehörige Sehne ausdrückt, kommt beim Grenzkreis das Theorem sofort heraus. Der Zusammenhang zwischen Sehne a und Bogen a' ist nämlich nach Buch, § 45

$$a' = 2\sinh\frac{a}{2},$$

entsprechend für b' usw. Setzt man das in (7) ein, so steht bereits die Behauptung da.

Beim gewöhnlichen Kreis mit dem Radius r geht es nicht ganz so schnell. Da benutzen wir statt der Bogen die zugehörigen Zentriwinkel mit den entsprechenden griechischen Buchstaben. Gemäß (6) ist dann

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha = \lambda, & \beta = \mu - \lambda, \\ \gamma = \nu - \mu, & \delta = \nu, \\ \varepsilon = \nu - \lambda, & \varphi = \mu. \end{cases}$$

Nun besteht die Identität

$$(9)\qquad \sin\frac{\lambda}{2}\cdot\sin\frac{\nu-\mu}{2} + \sin\frac{\mu-\lambda}{2}\cdot\sin\frac{\nu}{2} = \sin\frac{\nu-\lambda}{2}\cdot\sin\frac{\mu}{2},$$

wie man durch dreimalige Anwendung der Formel

$$\sin(\vartheta - \eta) = \sin\vartheta\cdot\cos\eta - \cos\vartheta\cdot\sin\eta$$

sofort verifiziert. Also ist

$$(10)\qquad \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = \sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck, das entsteht, wenn man den einen Endpunkt der Sehne a mit dem Kreismittelpunkt verbindet und von diesem aus das Lot auf die Sehne fällt, durch welches Sehne und Zentriwinkel halbiert werden, ergibt sich nach Buch, § 28 Formel (II)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sinh\frac{a}{2}}{\sinh r}.$$

Entsprechende Formeln gelten für die anderen Zentriwinkel, und wenn man das alles in (10) einsetzt, steht sofort die zu beweisende Formel da.

Auch bei der Abstandslinie mit dem Abstand h von ihrer Null-Linie benutzen wir statt (6) etwas andere Formeln. Wenn man von den vier Ecken des Vierecks die Lote auf die Null-Linie fällt und die zu den Sehnen $a, b, \ldots$ gehörigen Basisstrecken mit $a'', b'', \ldots$ bezeichnet, dann kann man analog zu (1) setzen:

$$(11)\qquad \begin{cases} a'' = l'', & b'' = m'' - l'', \\ c'' = n'' - m'', & d'' = n'', \\ e'' = n'' - l'', & f'' = m''. \end{cases}$$

Wie nun oben aus (1) die Formel (5) folgte, so folgt aus (11) die Formel

$$(12)\quad \sinh\frac{a''}{2}\cdot\sinh\frac{c''}{2}+\sinh\frac{b''}{2}\cdot\sinh\frac{d''}{2}=\sinh\frac{e''}{2}\cdot\sinh\frac{f''}{2}.$$

Das S-Trapez mit der Basis a'' und der gegenüberliegenden Seite a wird durch sein Mittellot in zwei kongruente Spitzecke zerlegt, aus denen man gemäß Buch, § 29 Formel (I) abliest:

$$\sinh\frac{a}{2}=\cosh h\cdot\sinh\frac{a''}{2},\quad \text{also } \sinh\frac{a''}{2}=\frac{\sinh\frac{a}{2}}{\cosh h},$$

und entsprechende Formeln gelten für b'', c'', ... Wenn man das alles in (12) einsetzt, dann steht sofort die zu beweisende Formel da.