BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkungen zum Brückensatz

Von Hans-Joachim Kowalsky in Braunschweig

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 8. November 1963

Von Otto Haupt, Georg Nöbeling und Christian Pauc wurde in [1] ein allgemeiner Brückensatz bewiesen. Als Sonderfall enthält er den sogenannten speziellen Brückensatz, der auch als unmittelbare Konsequenz aus zwei Sätzen von R. L. Moore [4] gewonnen werden kann. Eine Folgerung aus dem speziellen Brückensatz ist schließlich der Randsatz von Z. Janiszewski [2]. Alle diese Sätze beziehen sich auf einen zusammenhängenden und kompakten metrisierbaren Raum X. Nachstehend soll nun gezeigt werden, daß die Voraussetzungen abgeschwächt bzw. abgeändert werden können: Einerseits kann man nämlich die Metrisierbarkeit durch die schwächere Forderung ersetzen, daß X lediglich das Trennungsaxiom T_4 erfüllt. Zweitens aber kann man auch unter Beibehaltung des Zusammenhangs auf die Kompaktheit und die Metrisierbarkeit verzichten und statt dessen verlangen, daß X lokal zusammenhängend ist. Gerade diese Abänderung gestattet in allen Fällen eine verhältnismäßig kurze Beweisführung.

Im folgenden verweisen die Zahlenangaben in runden Klammern auf die entsprechenden Sätze in [3].

Herrn Otto Haupt bin ich für Hinweise auf die Problemstellung zu Dank verpflichtet.

1. Der Randsatz

Das Komplement einer Teilmenge A von X wird stets mit $\complement A$ bezeichnet. Ist M eine zweite Teilmenge von X, so bedeutet $\complement_M A$ das relative Komplement von A in M; es gilt also $\complement_M A = M \cap \complement A$. Der Begriff „kompakt“[1] wird immer ohne Einschluß von Trennungseigenschaften benutzt. Ebenso soll das Tren-

---

[1] In [3] „vollkompakt“.

nungsaxiom T_4 nicht etwa T_1 einschließen; es besagt also lediglich: zu je zwei nicht-leeren, abgeschlossenen und punktfremden Mengen A, B existieren offene Mengen U, V mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \theta$. Jeder abgeschlossene Unterraum eines kompakten T_4-Raumes ist selbst ein kompakter T_4-Raum (9.5, 11.6). Hingewiesen sei schließlich noch auf das folgende

Lemma 1: *Es sei X ein kompakter T_4-Raum, und K sei eine Komponente von X. Ferner bedeute $\mathfrak{S}$ das System aller gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen S von K mit $K \subseteq S$. Dann gilt*

$$K = \bigcap \{S : S \in \mathfrak{S}\}.$$

Zum Beweis vgl. (14.9).

Randsatz: *Es sei X ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

(a) *lokal zusammenhängend*

oder (b) *ein kompakter T_4-Raum*

ist. Ferner sei A *eine nicht-leere und abgeschlossene Teilmenge von X. Dann gilt für jede Komponente K von $\complement A$*

$$\bar{K} \cap A \neq \theta.$$

Beweis: Es kann $A \neq X$ vorausgesetzt werden, weil andernfalls $\complement A$ leer ist und somit keine Komponente besitzt. Weiter sei nun K eine Komponente von $\complement A$, und es werde $\bar{K} \cap A = \theta$ angenommen. Diese Annahme soll in den Fällen (a) und (b) einzeln zum Widerspruch geführt werden.

Fall (a): Als Komponente von $\complement A$ ist K abgeschlossen in $\complement A$, wegen $\bar{K} \cap A = \theta$ aber sogar abgeschlossen in X. Außerdem ist K als Komponente einer offenen Menge wegen des lokalen Zusammenhangs von X aber auch offen in X. Da $K \neq \theta$ und $K \neq X$ gilt, ist dies ein Widerspruch zum Zusammenhang von X.

Fall (b): Wegen T_4 gibt es zu A und $\bar{K}$ offene Mengen U und V mit $A \subseteq U$, $\bar{K} \subseteq V$ und $U \cap V = \theta$. Wegen $K \subseteq \complement U$ und $\complement U \subseteq \complement A$ ist K auch eine Komponente von $\complement U$. Es sei nun $\mathfrak{S}$ das System aller in $\complement U$ gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen S von $\complement U$ mit $K \subseteq S$. Für jedes $S \in \mathfrak{S}$ werde ferner

$B_S = S \cap \bar{U}$ gesetzt und zunächst $B_S \neq \emptyset$ für alle $S \in \mathfrak{S}$ angenommen. Es gilt $B_{S_1 \cap S_2} = B_{S_1} \cap B_{S_2}$. Wegen der Abgeschlossenheit der Mengen B_S und wegen der Kompaktheit von $\bar{U}$ folgt daher, daß die Menge

$$D = \bigcap \{ B_S : S \in \mathfrak{S} \}$$

nicht leer ist (11.19). Nun gilt aber $D \subseteq \bar{U}$ und wegen Lemma 1 auch $D \subseteq \bigcap \{ S : S \in \mathfrak{S} \} = K$. Es folgt $K \cap \bar{U} \neq \emptyset$ im Widerspruch zu $K \subseteq V \subseteq \complement \bar{U}$. Somit kann $B_S \neq \emptyset$ nicht für alle $S \in \mathfrak{S}$ erfüllt sein; d. h. es gibt ein $S_0 \in \mathfrak{S}$ mit $S_0 \cap \bar{U} = \emptyset$. Es ist S_0 abgeschlossen in $\complement U$, wegen der Abgeschlossenheit von $\complement U$ aber sogar abgeschlossen in X. Weiter ist S_0 auch offen in $\complement U$. Wegen $S_0 \subseteq \complement \bar{U}$ ist S_0 aber auch offen in $\complement \bar{U}$ und damit sogar in X. Dies ist ein Widerspruch zum Zusammenhang von X, weil ja $S_0 \neq \emptyset$ wegen $K \subseteq S_0$ und $S_0 \neq X$ wegen $S_0 \subseteq \complement \bar{U} \subseteq \complement A$ gilt.

2. Der spezielle Brückensatz

Zur Vorbereitung sollen zunächst zwei Hilfssätze bewiesen werden.

Lemma 2: *Es sei X ein zusammenhängender und kompakter T_4-Raum. Ferner seien A und B zwei nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen von X. Dann gibt es in dem System $\mathfrak{Z}$ aller zusammenhängenden und abgeschlossenen Teilmengen Z von X mit $Z \cap A \neq \emptyset$ und $Z \cap B \neq \emptyset$ eine minimale Menge.*

Beweis: (Vgl. [1].) Wegen $X \in \mathfrak{Z}$ ist $\mathfrak{Z}$ nicht leer. Weiter sei das Teilsystem $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{Z}$ eine Kette (hinsichtlich der mengentheoretischen Inklusion). Dann ist auch

$$D = \bigcap \{ Z : Z \in \mathfrak{C} \}$$

eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von X (14.6). Wegen $Z \cap A \neq \emptyset$ für alle $Z \in \mathfrak{C}$ und wegen der Kompaktheit von A gilt außerdem $D \cap A \neq \emptyset$ (11.18) und analog $D \cap B \neq \emptyset$. Es folgt $D \in \mathfrak{Z}$, und die Behauptung ergibt sich unmittelbar mit Hilfe des Zornschen Lemmas.

Lemma 3: *Es sei X ein kompakter T_4-Raum, und $\mathfrak{K}$ sei ein nicht-leeres System nicht-leerer, zusammenhängender Teilmengen von X. Schließlich sei $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter von $\mathfrak{K}$. Setzt man dann für jede Menge $\mathfrak{V} \in \mathfrak{v}$*

$$C_{\mathfrak{V}} = \overline{\bigcup \{K : K \in \mathfrak{V}\}},$$

so ist

$$C = \bigcap \{C_{\mathfrak{V}} : \mathfrak{V} \in \mathfrak{v}\}$$

eine nicht-leere, zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von X.

Beweis: Die nicht-leeren und abgeschlossenen Mengen $C_{\mathfrak{V}}$ bilden eine Filterbasis. Wegen der Kompaktheit von X ist daher C ebenfalls nicht leer und abgeschlossen (11.19). Angenommen werde, daß C nicht zusammenhängend ist, daß es also nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen C' und C'' von C mit $C' \cup C'' = C$ gibt. Wegen T_4 existieren dann offene Mengen U' und U'' mit $C' \subseteq U'$, $C'' \subseteq U''$ und $U' \cap U'' = \emptyset$. Wegen $C' \subseteq C \subseteq C_{\mathfrak{V}}$ und $C' \subseteq U'$ gibt es zu jedem $\mathfrak{V} \in \mathfrak{v}$ mindestens ein $K \in \mathfrak{V}$ mit $K \cap U' \neq \emptyset$. Für die Menge $\mathfrak{K}'$ aller $K \in \mathfrak{K}$ mit $K \cap U' \neq \emptyset$ gilt daher $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{v}$, weil $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter ist (3.12). Ebenso erhält man für die Menge $\mathfrak{K}''$ aller $K \in \mathfrak{K}$ mit $K \cap U'' \neq \emptyset$ auch $\mathfrak{K}'' \in \mathfrak{v}$. Für alle $\mathfrak{V} \in \mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{K}' \cap \mathfrak{K}''$ und für alle $K \in \mathfrak{V}$ folgt somit $K \cap U' \neq \emptyset$ und $K \cap U'' \neq \emptyset$. Für alle diese K muß daher auch $K \cap \mathbf{C}(U' \cup U'') \neq \emptyset$ gelten, weil andernfalls die Gleichung $K = (K \cap U') \cup (K \cap U'')$ dem Zusammenhang von K widersprechen würde. Es folgt $C_{\mathfrak{V}} \cap \mathbf{C}(U' \cup U'') \neq \emptyset$ für alle $\mathfrak{V} \in \mathfrak{v}$ und schließlich wegen der Kompaktheit von $\mathbf{C}(U' \cup U'')$ auch $C \cap \mathbf{C}(U' \cup U'') \neq \emptyset$. Dies aber widerspricht $C = C' \cup C'' \subseteq U' \cup U''$.

Spezieller Brückensatz: *Es sei* X *ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

(a) *lokal zusammenhängend*

oder

(b) *ein kompakter T_4-Raum*

ist. Ferner seien A *und* B *zwei nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen von* X. *Dann gibt es eine Komponente K von $\mathbf{C}(A \cup B)$ mit $\bar{K} \cap A \neq \emptyset$ und $\bar{K} \cap B \neq \emptyset$.*

Beweis: Die Behauptung wird einzeln für die Fälle (a) und (b) bewiesen.

Fall (a): Wegen des Zusammenhangs von X gilt $A \cup B \neq X$, also $\complement(A \cup B) \neq \theta$. Es sei nun $\mathfrak{K}$ das System aller Komponenten von $\complement(A \cup B)$. Da $A \cup B$ eine nicht-leere und abgeschlossene Teilmenge von X ist, gilt für jedes $K \in \mathfrak{K}$ nach dem Randsatz $\bar{K} \cap A \neq \theta$ oder $\bar{K} \cap B \neq \theta$. Angenommen werden soll, daß für kein $K \cap \mathfrak{K}$ gleichzeitig $\bar{K} \cap A \neq \theta$ und $\bar{K} \cap B \neq \theta$ erfüllt ist. Und diese Annahme muß zum Widerspruch geführt werden.

Es werde gesetzt

$$\mathfrak{K}_A = \{ K' : K' \in \mathfrak{K}, \overline{K'} \cap A \neq \theta \} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{K}_B = \{ K'' : K'' \in \mathfrak{K}, \overline{K''} \cap B \neq \theta \}.$$

Dann gilt $\mathfrak{K}_A \cap \mathfrak{K}_B = \theta$. Setzt man noch

$$K_A = A \cup \bigcup \{ K' : K' \in \mathfrak{K}_A \} \quad \text{und}$$

$$K_B = B \cup \bigcup \{ K'' : K'' \in \mathfrak{K}_B \},$$

so folgt $K_A \cap K_B = \theta$, $K_A \cup K_B = X$ und außerdem $K_A \neq \theta$, $K_B \neq \theta$. Dies ist ein Widerspruch zum Zusammenhang von X, wenn jetzt abschließend noch gezeigt wird, daß K_A (und aus Symmetriegründen dann auch K_B) eine offene Menge ist.

Es gelte $x \in A$. Wegen des lokalen Zusammenhangs existiert dann eine zusammenhängende, offene Umgebung U von x mit $U \cap B = \theta$ (15.1). Es werde zunächst $U \cap K'' \neq \theta$ für ein $K'' \in \mathfrak{K}_B$ angenommen. Als Komponente von $\complement(A \cup B)$ ist K'' offen in X und abgeschlossen in $\complement(A \cup B)$. Wegen $K'' \in \mathfrak{K}_B$, also $\overline{K''} \cap A = \theta$, ist K'' aber sogar abgeschlossen in $\complement B$. Da $U \subseteq \complement B$ gilt, ist somit $U \cap K''$ eine in U gleichzeitig offene und abgeschlossene Menge. Wegen des Zusammenhangs von U folgt $U \cap K'' = U$, was jedoch $x \in U$ und $x \in K''$ ($x \in A$!) widerspricht. Daher muß $U \cap K'' = \theta$ für alle $K'' \in \mathfrak{K}_B$ erfüllt sein. Es folgt $U \cap K_B = \theta$, also $U \subseteq K_A$. Außerdem sind die Mengen $K' \in \mathfrak{K}_A$ als Komponenten von $\complement(A \cup B)$ offen. Zusammen ergibt sich hieraus schließlich, daß auch K_A eine offene Menge ist.

Fall (b): Nach Lemma 2 existiert eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge Z von X mit $Z \cap A \neq \theta$ und $Z \cap B \neq \theta$, die hinsichtlich dieser Eigenschaften minimal ist. Wenn also $C \subseteqq Z$ ebenfalls eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von X mit $C \frown A \neq \theta$ und $C \frown B \neq \theta$ ist, so muß $C = Z$ gelten.

Es ist Z ein zusammenhängender und kompakter T_4-Raum. Setzt man $A^* = Z \frown A$ und $B^* = Z \frown B$, so sind A^* und B^* zwei nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen von Z, und das relative Komplement $Y = \mathbf{C}_Z(A^* \smile B^*)$ ist nicht leer. Außerdem gilt $\bar{Y} \frown A^* \neq \theta$ und $\bar{Y} \frown B^* \neq \theta$, weil z. B. aus $\bar{Y} \frown A^* = \theta$ folgen würde, daß die zusammenhängende Menge Z Vereinigung der nicht-leeren, abgeschlossenen und punktfremden Mengen A^* und $\bar{Y} \smile B^*$ ist.

Nimmt man nun zunächst an, daß Y zusammenhängend ist, so gibt es wegen $Y \subseteq \mathbf{C}(A \smile B)$ eine Komponente K von $\mathbf{C}(A \smile B)$ mit $Y \subseteq K$. Für sie gilt $\bar{K} \frown A \supseteqq \bar{Y} \frown A^* \neq \theta$ und entsprechend $\bar{K} \frown B \supseteqq \bar{Y} \frown B^* \neq \theta$. Damit ist die Behauptung des speziellen Brückensatzes unter dieser zusätzlichen Annahme bewiesen.

Weiterhin soll daher vorausgesetzt werden, daß Y unzusammenhängend ist. Und diese Annahme muß noch zum Widerspruch geführt werden.

Jetzt gibt es nicht-leere und punktfremde Teilmengen M_1 und M_2 von Y, die beide in Y abgeschlossen sind. Für jede Komponente K von Y gilt $K \subseteq M_1$ oder $K \subseteq M_2$. Bedeutet daher $\mathfrak{K}_i$ das System aller Komponenten K von Y mit $K \subseteq M_i$ $(i = 1, 2)$, so gilt $\mathfrak{K}_1 \frown \mathfrak{K}_2 = \theta$, und $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \smile \mathfrak{K}_2$ ist das System aller Komponenten von Y. Für jedes $K \in \mathfrak{K}$ gilt nach dem Randsatz (angewandt auf Z statt X und A^*, B^* statt A, B) $\bar{K} \frown A^* \neq \theta$ oder $\bar{K} \frown B^* \neq \theta$. Aber für kein $K \in \mathfrak{K}$ sind beide Beziehungen gleichzeitig erfüllt, weil sonst $C = \bar{K}$ eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von Z (und also auch von X) mit $C \frown A \neq \theta$ und $C \frown B \neq \theta$ wäre, für die jedoch nicht $C = Z$ erfüllt ist (s. o.). Setzt man daher weiter für $i = 1, 2$

$$\mathfrak{K}_{i,A} = \{K\colon\ K \in \mathfrak{K}_i,\ \bar{K} \frown A^* \neq \theta\} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{K}_{i,B} = \{K\colon\ K \in \mathfrak{K}_i,\ \bar{K} \frown B^* \neq \theta\},$$

so sind die Systeme $K_{i,A}$, $\mathfrak{K}_{i,B}$ $(i = 1, 2)$ paarweise elementfremd, und es gilt $\mathfrak{K}_{i,A} \smile \mathfrak{K}_{i,B} = \mathfrak{K}_i$. Schließlich werde

$$K_{i,A} = A^* \cup \bigcup \{K\colon\ K \in \mathfrak{K}_{i,A}\} \quad \text{und}$$

$$K_{i,B} = B^* \cup \bigcup \{K\colon\ K \in \mathfrak{K}_{i,B}\} \quad (i = 1, 2)$$

gesetzt. Von diesen Mengen kann zunächst festgestellt werden, daß nicht gleichzeitig

$$\overline{K_{i,A}} \cap K_{i,B} = \theta \text{ und } K_{i,A} \cap \overline{K_{i,B}} = \theta \quad \text{für } i = 1, 2$$

gelten kann: Da nämlich die Mengen M_i in Y abgeschlossen sind, würde folgen, daß die nicht-leeren und punktfremden Mengen $K_{1,A} \cup K_{2,A}$ und $K_{1,B} \cup K_{2,B}$ abgeschlossen sind. Da aber Z die Vereinigung dieser beiden Mengen ist, würde dies dem Zusammenhang von Z widersprechen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann daher weiter die Existenz eines Punktes $p \in \overline{K_{1,A}} \cap K_{1,B}$ vorausgesetzt werden. Dann gibt es zu jeder Umgebung U aus dem Umgebungsfilter $\mathfrak{u}$ von p mindestens ein $K \in \mathfrak{K}_{1,A}$ mit $K \cap U \neq \theta$. Setzt man daher

$$\mathfrak{V}_U = \{K\colon\ K \in \mathfrak{K}_{1,A}, K \cap U \neq \theta\} \qquad (U \in \mathfrak{u}),$$

so sind die Mengen $\mathfrak{V}_U$ nicht leer, und $\{\mathfrak{V}_U\colon U \in \mathfrak{u}\}$ ist Basis eines Filters von $\mathfrak{K}_{1,A}$, der zu einem Ultrafilter $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{K}_{1,A}$ verfeinert werden kann. Mit

$$C_{\mathfrak{V}} = \overline{\bigcup \{K\colon\ K \in \mathfrak{V}\}} \quad \text{und} \quad C = \bigcap \{C_{\mathfrak{V}}\colon\ \mathfrak{V} \in \mathfrak{v}\}$$

gilt dann nach Lemma 3, daß C eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von Z ist. Ferner ergibt sich laut Konstruktion $C \cap U \neq \theta$ für alle $U \in \mathfrak{u}$, wegen der Abgeschlossenheit von C also $p \in C$. Schließlich gilt $\bar{K} \cap A \neq \theta$ für alle $K \in \mathfrak{K}_{1,A}$ und somit $C_{\mathfrak{V}} \cap A \neq \theta$ für alle $\mathfrak{V} \in \mathfrak{v}$. Wegen der Kompaktheit von A folgt daher $C \cap A \neq \theta$ (11.18).

Aus $p \in K_{1,B}$ ergibt sich $p \in B^*$ oder $p \in K'$ für ein $K' \in \mathfrak{K}_{1,B}$. Setzt man im ersten Fall $C^* = C$ und im zweiten Fall $C^* = C \cup \overline{K'}$, so ist C^* in jedem Fall eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von Z mit $C^* \cap A \neq \theta$ und $C^* \cap B \neq \theta$ (wegen $K' \in \mathfrak{K}_{1,B}$ gilt ja $\overline{K'} \cap B \neq \theta$). Es folgt

(s. o.) $C^* = Z$ und damit $M_2 \subseteq C^*$. Dies ist ein Widerspruch, weil C^* offenbar in der zu M_2 punktfremden Menge $A^* \cup M_1 \cup B^*$ enthalten ist.

3. Verallgemeinerungen

Abschließend soll jetzt noch der eingangs erwähnte allgemeine Brückensatz unter den hier gemachten Voraussetzungen bewiesen werden. Vorausgeschickt wird eine entsprechende Verallgemeinerung des Randsatzes.

Ist Q eine beliebige Teilmenge eines topologischen Raumes X, und ist $\mathfrak{K}$ das System aller Komponenten von $\complement Q$, so werde

$$\langle Q, X \rangle = Q \cap \bigcup \{ \bar{K} : K \in \mathfrak{K} \}$$

gesetzt. Gilt $Q = X$, so ist $\mathfrak{K}$ leer und daher auch $\langle Q, X \rangle$.

Lemma 4: *Es sei X ein lokal zusammenhängender Raum, und Q sei eine abgeschlossene Teilmenge von X. Weiter sei Z eine zusammenhängende Teilmenge von X mit $Z \cap \langle Q, X \rangle = \emptyset$. Dann gilt $Z \subseteq Q$ oder $Z \subseteq \complement Q$.*

Beweis: Es werde $Z \cap \complement Q \neq \emptyset$ angenommen. Dann gibt es eine Komponente K von $\complement Q$ mit $K \cap Z \neq \emptyset$. Als Komponente der offenen Menge $\complement Q$ ist K wegen des lokalen Zusammenhangs offen, also $K \cap Z$ offen in Z. Weiter ist K als Komponente von $\complement Q$ auch abgeschlossen in $\complement Q$. Wegen $\bar{K} \cap Q \subseteq \langle Q, X \rangle$ ist K aber sogar abgeschlossen in $\complement \langle Q, X \rangle$. Daher ist schließlich $K \cap Z$ abgeschlossen in Z, weil ja $Z \subseteq \complement \langle Q, K \rangle$ gilt. Wegen des Zusammenhangs von Z folgt $K \cap Z = Z$, also $Z \subseteq K \subseteq \complement Q$.

Lemma 5: *Es sei X ein kompakter T_4-Raum, Q eine abgeschlossene Teilmenge von X und U eine offene Teilmenge von X mit $\langle Q, X \rangle \subseteq U$. Ist dann Z eine zusammenhängende Teilmenge von X mit $Z \cap U = \emptyset$, so gilt $Z \subseteq Q$ oder $Z \subseteq \complement Q$.*

Beweis: Es werde $Z \cap Q \neq \emptyset$ und $Z \cap \complement Q \neq \emptyset$ angenommen. Es ist $\bar{Z}$ ein zusammenhängender und kompakter T_4-Raum, $A = \bar{Z} \cap Q$ ist eine nicht-leere und abgeschlossene Teilmenge von $\bar{Z}$, und das relative Komplement $Y = \complement_{\bar{Z}} Q$ ist nicht leer. Es gibt daher eine Komponente K' von Y, und für sie gilt nach dem

Randsatz $\overline{K'} \cap A \neq \theta$. Wegen $Y \subseteq \complement Q$ gibt es weiter eine Komponente K von $\complement Q$ mit $K' \subseteq K$. Es folgt $\overline{K'} \cap A \subseteq \bar{K} \cap Q \subseteq \langle Q, X\rangle$ und wegen $\overline{K'} \subseteq \bar{Z}$ sogar $\overline{K'} \cap A \subseteq \bar{Z} \cap \langle Q, X\rangle$. Wegen $Z \cap U = \theta$ und $\langle Q, X\rangle \subseteq U$ gilt aber $\bar{Z} \cap \langle Q, X\rangle = \theta$, also erst recht $\overline{K'} \cap A = \theta$ im Widerspruch zu $\overline{K'} \cap A \neq \theta$.

Verallgemeinerter Randsatz: *Es sei X ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

(a) lokal zusammenhängend

oder

(b) ein kompakter T_4-Raum

ist. Ferner gelte $\langle Q, X\rangle \subseteq A \subseteq Q$ mit nicht-leeren und abgeschlossenen Teilmengen A und Q von X. Ist dann K eine Komponente des relativen Komplements $Y = \complement_Q A$, so gilt $\bar{K} \cap A \neq \theta$.

Beweis:

Fall (a): Jedenfalls ist K in einer Komponente Z von $\complement A$ enthalten, für die dann nach dem Randsatz $\bar{Z} \cap A \neq \theta$ gilt. Wegen $\langle Q, X\rangle \subseteq A$ erhält man $Z \cap \langle Q, X\rangle = \theta$. Wegen $K \subseteq Z$ und $K \subseteq Q$ gilt $Z \cap Q \neq \theta$, und aus Lemma 4 folgt $Z \subseteq Q$, also $Z \subseteq Q \cap \complement A = Y$. Da K aber eine Komponente von Y ist, muß $K = Z$ und damit $\bar{K} \cap A = \bar{Z} \cap A \neq \theta$ erfüllt sein.

Fall (b): Es werde $\bar{K} \cap A = \theta$ angenommen. K ist abgeschlossen in Y, wegen $\bar{K} \cap A = \theta$ aber sogar abgeschlossen in Q und damit in X; d. h. es gilt $\bar{K} = K$. Wegen T_4 gibt es offene Mengen U und V mit $A \subseteq U$, $K \subseteq V$ und $U \cap V = \theta$. Es folgt $K \cap \bar{U} = \theta$, und nach dem speziellen Brückensatz gibt es eine Komponente Z von $\complement(K \cup \bar{U})$ mit $\bar{Z} \cap K \neq \theta$ und $\bar{Z} \cap \bar{U} \neq \theta$. Die Menge $K^* = K \cup \bar{Z}$ ist zusammenhängend und wegen $K^* \cap \bar{U} \neq \theta$, $K \cap \bar{U} = \theta$ eine echte Obermenge von K. Da aber K eine Komponente von Y ist, kann K^* und somit $\bar{Z}$ nicht in Y enthalten sein. Wegen $\bar{Z} \cap A \subseteq \bar{Z} \cap U = \theta$ muß daher $\bar{Z} \cap \complement Q \neq \theta$ gelten. Hieraus folgt aber wegen $\langle Q, X\rangle \subseteq A \subseteq U$ und $\bar{Z} \cap U = \theta$ nach Lemma 5 sogar $\bar{Z} \subseteq \complement Q$. Dies ist ein Widerspruch zu $\bar{Z} \cap Q \supseteq \bar{Z} \cap K \neq \theta$.

Setzt man in dem verallgemeinerten Randsatz $Q = X$, so erhält man als Spezialfall den Randsatz.

Allgemeiner Brückensatz: *Es sei X ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

oder (a) *lokal zusammenhängend*

(b) *ein kompakter T_4-Raum*

ist. Ferner gelte $A \subseteq Q$, $B \subseteq Q$, $A \frown B = \theta$ und $\langle Q, X\rangle \subseteq A \smile B$, mit nicht-leeren und abgeschlossenen Teilmengen A, B und Q von X. Dann gibt es eine zusammenhängende Teilmenge Z von $\complement(A \smile B)$ mit $\bar{Z} \frown A \neq \theta$ und $\bar{Z} \frown B \neq \theta$, für die $Z \subseteq Q$ oder $Z \subseteq \complement Q$ gilt.

Beweis: Nach dem speziellen Brückensatz gibt es eine Komponente K von $\complement(A \smile B)$ mit $\bar{K} \frown A \neq \theta$ und $\bar{K} \frown B \neq \theta$.

Fall (a): Wegen $\langle Q, X\rangle \subseteq A \smile B$ gilt $K \frown \langle Q, X\rangle = \theta$, und nach Lemma 4 folgt $K \subseteq Q$ oder $K \subseteq \complement Q$. Die Behauptung ist also mit $Z = K$ erfüllt.

Fall (b): Es seien A_0 und B_0 Komponenten von A bzw. B mit $\bar{K} \frown A_0 \neq \theta$ und $\bar{K} \frown B_0 \neq \theta$. Dann ist $X^* = A_0 \smile K \smile B_0$ ein zusammenhängender und kompakter T_4-Raum. Weiter seien A^* und B^* diejenigen Komponenten von $Q^* = X^* \frown Q$, für die $A_0 \subseteq A^*$ und $B_0 \subseteq B^*$ gilt. Dann sind A^*, B^*, Q^* nicht-leere und abgeschlossene Teilmengen von X^* mit $A^* \subseteq Q^*$, $B^* \subseteq Q^*$, $A^* \frown B^* = \theta$ und $\langle Q^*, X^*\rangle \subseteq A^* \smile B^*$. Es werden nun zwei Fälle unterschieden:

1. $A^* \frown B^* \neq \theta$: Dann folgt $A^* = B^*$, und A^* ist ein zusammenhängender, kompakter T_4-Raum mit $A_0 \subseteq A^*$ und $B_0 \subseteq A^*$. Nach dem speziellen Brückensatz existiert daher eine Komponente Z von $\complement(A_0 \smile B_0) \frown A^*$ mit $\bar{Z} \frown A_0 \neq \theta$ und $\bar{Z} \frown B_0 \neq \theta$. Erst recht folgt $\bar{Z} \frown A \neq \theta$ und $Z \frown B \neq \theta$. Wegen $Z \subseteq \complement(A_0 \smile B_0) \frown A^*$ erhält man $Z \subseteq \complement(A \smile B)$ und wegen $A^* \subseteq Q^* \subseteq Q$ schließlich auch $Z \subseteq Q$.

2. $A^* \frown B^* = \theta$: Nach dem verallgemeinerten Randsatz (angewandt auf X^*, Q^*, $A^* \smile B^*$ statt X, Q, A) müßte für jede Komponente K^* von $\complement(A^* \smile B^*) \frown Q^*$ entweder $\overline{K^*} \frown A^* \neq \theta$ oder $\overline{K^*} \frown B^* \neq \theta$ gelten, was in jedem Fall dem widerspricht, daß A^* und B^* Komponenten von Q^* sind. Es folgt $A^* \frown B^* = Q^*$. Nach dem speziellen Brückensatz existiert daher eine Kompo-

nente Z von $\complement(A^* \cup B^*) \cap X^* = \complement Q \cap X^*$ mit $\bar{Z} \cup A^* \neq \theta$ und $\bar{Z} \cap B^* \neq \theta$. Wegen $Z \subseteq \complement Q$ gibt es weiter eine Komponente Z' von $\complement Q$ mit $Z \subseteq Z'$. Es folgt $\bar{Z} \cap A^* \subseteq \overline{Z'} \cap Q \cap A^* \subseteq \langle Q,X \rangle \cap A^* \subseteq A$, also $\bar{Z} \cap A \neq \theta$, und entsprechend $\bar{Z} \cap B \neq \theta$.

Damit ist in beiden Fällen die Behauptung bewiesen.

Setzt man in dem allgemeinen Brückensatz $Q = X$, so erhält man wieder als Spezialfall den speziellen Brückensatz.

Literatur

[1] Haupt-Nöbeling-Pauc, Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen, Journ. f. r. u. a. Math. 182 (1940), 105–121.

[2] Janiszewski, Sur les continus irréductibles entre deux points, Thèse (Paris 1911) = Journ. École Polyt. (2) 16 (1912), 100.

[3] Kowalsky, Topologische Räume, Birkhäuser (Basel) 1961.

[4] Moore, Foundations of point set theory, Colloquium Publications of the Amer. Math. Soc. 13, New York 1932.