

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1962

MÜNCHEN 1963

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bestimmung von Eibereichen und Eikörpern durch Steiner-Symmetrisierungen¹

Von Oswald Giering in Stuttgart

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 9. November 1962

Mit 10 Abbildungen

Übersicht

1. Problemstellung und Ergebnisse	225
2. Eibereichen einbeschriebene Sehnenzüge	227
3. Bestimmung von Eibereichen durch Steiner-Symmetrisierungen	236
4. Bestimmung von Eikörpern durch Steiner-Symmetrisierungen	245
5. Eine Kennzeichnung der Ellipsoide	251
Literaturverzeichnis	253

1. Problemstellung und Ergebnisse

Eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Punktmenge mit inneren Punkten heißt in der Ebene *Eibereich*, im Raum *Eikörper*. In der Ebene heißt die Gesamtheit ihrer Randpunkte *Eilinie*, im Raum *Eifläche* (vgl. H. Hadwiger [10], [11]).

Als *Steiner-Symmetrisierung* eines Eibereichs [Eikörpers] A an einer Geraden l [Ebene ε] wird die Parallelesehnenmenge A' bezeichnet, die entsteht, wenn man jede zu l [zu ε] normale Sehne

¹ Die vorliegende Arbeit enthält die wesentlichen Ergebnisse meiner von der Technischen Hochschule Stuttgart genehmigten Dissertation. Die Originalfassung befindet sich in der Bibliothek der Mathematischen Institute der T. H. Stuttgart.

Herrn Prof. Dr. Dr. H. Brauner danke ich für seine allzeit tatkräftige Unterstützung bei der Fertigstellung dieser Arbeit.

von A auf ihrer Geraden, Symmetrisierungsgerade genannt, symmetrisch zu l [zu ε] verschiebt. Diese von J. Steiner in [16] und [17] zum Nachweis der isoperimetrischen Eigenschaft von Kreis und Kugel eingeführte Konstruktion diene mit ihren zahlreichen Eigenschaften wiederholt als Beweishilfsmittel, besonders bei geometrischen Problemen (vgl. W. Blaschke [1], [2], [3]; H. Hadwiger [10], [11]; G. Pólya und G. Szegő [14]).

Im folgenden wird untersucht, wieviel verschiedene Steiner-Symmetrisierungen A' , A'' , ... einen gegebenen Eibereich [Eikörper] A bestimmen.² Zur Konkurrenz sind alle nicht notwendig konvexen Bereiche [Körper] B zugelassen, deren Berandung stetig ist, deren Umfang [Oberfläche] existiert und welche die betrachteten Symmetrisierungen A' , A'' , ... des Eibereichs [Eikörpers] A besitzen. Man findet, daß ein Eibereich durch höchstens drei und ein Eikörper durch höchstens vier gewisse Symmetrisierungen bestimmt ist, während eine beliebige Anzahl beliebiger Symmetrisierungen zur Bestimmung i. a. nicht ausreicht.³ Wie die Symmetrisierungen im Einzelfall zu wählen sind, die einen Eibereich oder Eikörper bestimmen, wird angegeben. Entscheidend ist dabei die Charakterisierung der Eibereiche durch einbeschriebene Sehnenzüge mit abwechselnd zu zwei ver-

² Die Problemstellung ändert sich nicht wesentlich, wenn anstelle der Steiner-Symmetrisierungen A' , A'' , ... Bereiche A^* , A^{**} , ... treten, die lediglich von jeder Symmetrisierungsgeraden in gleichlangen Sehnen wie A geschnitten werden, z. B. Schüttelungen (vgl. W. Blaschke [4] S. 446, [3] S. 58), Scherungen (vgl. H. Hadwiger [11] S. 22) oder nach H. Brunn [8] S. 49 konstruierte Eibereiche. Die Steiner-Symmetrisierungen sind Modellbereiche dafür und werden künftig meist kurz *Symmetrisierungen* genannt. Entsprechendes gilt im Raum. Die Bezeichnung *Symmetrisierung* für J. Steiners Konstruktion stammt wie die Bezeichnung *Symmetrisierungsgerade* und *Symmetrisierungsrichtung* von W. Blaschke [3] (vgl. die dort angegebene Originalliteratur) und [6] S. 65.

³ Zur Bestimmung eines Eibereichs A sind mindestens zwei Symmetrisierungen A' , A'' erforderlich, jedoch wird A durch zwei Symmetrisierungen nicht stets bestimmt. Ein Kriterium, das angibt, wann A durch zwei Symmetrisierungen A' , A'' bestimmt ist oder ein Verfahren zur Bestimmung aller Bereiche B , die mit A die Symmetrisierungen A' und A'' gemeinsam haben, wäre deshalb wünschenswert. Dieses Problem übersteigt jedoch den hier gesteckten Rahmen und weist, wie man sich an Beispielen leicht klarmacht, erhebliche Schwierigkeiten auf.

schiedenen Symmetrisierungsrichtungen parallelen Sehnen. Die Bestimmung eines Eikörpers wird durch die Betrachtung einer Schar ebener Parallelschnitte auf das ebene Problem zurückgeführt. Die Untersuchung führt überdies zu einer Kennzeichnung der Ellipsoide.

2. Eibereichen einbeschriebene Sehnenzüge

1. Die parallelen Stützgeraden eines Eibereichs A , die jeweils die Mengen der Symmetrisierungsgeraden der Symmetrisierungen A', A'', \dots beranden, heißen *Randgeraden*; sie werden – wie auch die zugehörigen Symmetrisierungsrichtungen – mit s', t', s'', t'', \dots und die A einbeschriebenen Sehnenzüge mit abwechselnd zu s' und s'' parallelen Sehnen s_k mit $s = (\dots, s_k, s_{k+1}, \dots)$ bezeichnet. Ist künftig von Sehnenzügen die Rede, so handelt es sich stets um Eibereichen einbeschriebene Sehnenzüge mit abwechselnd zu zwei festen, nicht parallelen Randgeraden parallelen Sehnen. Jede Sehne, die auf keiner Randgeraden liegt und die auf keiner Randgeraden endet, besitzt in jedem ihrer Endpunkte genau eine folgende. Sehnen mit von null verschiedener Länge, die auf einer Randgeraden liegen, heißen *Randsehnen*; sie werden erst in 4.2. in Sehnenzüge einbezogen. Sehnen, die auf einer Randgeraden enden, heißen *Anfangs-* bzw. *Endsehnen* eines Sehnenzuges. Sehnen der Länge null heißen *Nullsehnen*; sie liegen wegen der Konvexität von A höchstens auf Randgeraden, seien nicht Anfangs- oder Endsehne eines Sehnenzuges und werden höchstens in endliche Sehnenzüge einbezogen. Zu der Randgeraden $s^{(k)}$ parallele Sehnen bzw. Symmetrisierungsgeraden heißen kurz $s^{(k)}$ -*Sehnen* bzw. $s^{(k)}$ -*Symmetrisierungsgeraden*.

Damit können Eibereichen, jeweils ausgehend von einer s' - oder s'' -Sehne, die nicht Randsehne ist, genau folgende Sehnenzüge einbeschrieben sein (Abb. 1):

- 1 a. *endliche geschlossene Sehnenzüge* $s = (s_1, \dots, s_n, s_{n+1} = s_1)$, wenn die Sehnenfolge sich schließt;
- 1 b. *endliche nicht geschlossene Sehnenzüge* $s = (s_1, \dots, s_n)$, wenn die Sehnenfolge sich nicht schließt und nicht fortsetzbar ist, also eine Anfangs- und Endsehne besitzt;

- 2 a. *unendliche Sehnenzüge* $s = (\dots, s_{-n}, \dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$ ohne Anfangssehne, wenn in beiden Durchlaufungsrichtungen des Sehnenzuges auf jede Sehne eine noch nicht durchlaufene folgt;

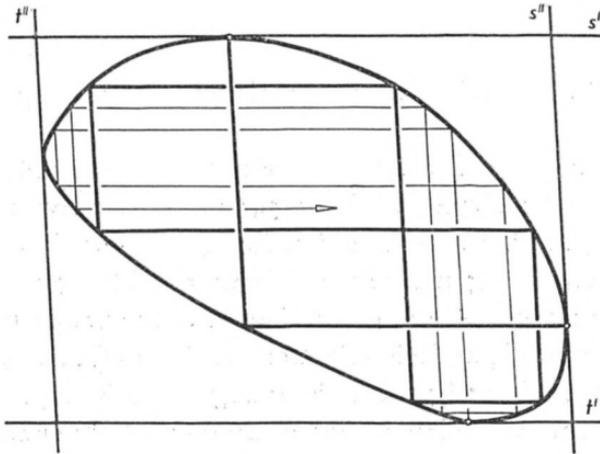


Abb. 1

- 2 b. *unendliche Sehnenzüge* $s = (s_1, s_2, \dots)$ mit Anfangssehne s_1 , wenn nur in einer Durchlaufungsrichtung des Sehnenzuges auf jede Sehne eine noch nicht durchlaufene folgt. Diese Durchlaufungsrichtung sei im folgenden gewählt.

2. Ein unendlicher Sehnenzug s enthält zwischen den Randgeraden s' und t' sowie s'' und t'' abzählbar unendlich viele Sehnen; diese bilden jeweils eine beschränkte unendliche Sehnenmenge. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt deshalb ein unendlicher Sehnenzug s zwischen s' und t' sowie zwischen s'' und t'' mindestens eine Häufungssehne.

Sei s_1 die Anfangssehne und \bar{s}_v eine Häufungssehne des unendlichen Sehnenzuges $s = (s_1, s_2, \dots)$. Im Durchlaufungssinn von s schließen an die Sehne \bar{s}_v weitere Sehnen $\bar{s}_{v+1}, \bar{s}_{v+2}, \dots$ an (Nullsehnen eingeschlossen), die abwechselnd s' - bzw. s'' -Sehnen sind und wegen der Konvexität und der aus ihr folgenden Stetigkeit der Randkurve des Eibereichs⁴ sämtlich Häufungssehnen

⁴ Eine Eilinie ist stetig, sogar streckbar. Allgemein besitzt ein Eibereich [Eikörper] einen Peano-Jordanschen Inhalt, eine Eilinie einen Umfang und

1. Ein dem Eibereich A einbeschriebener unendlicher Sehnenzug s mit Anfangssehne besitzt nur endlich viele – nämlich p – Häufungssehnen, die sich zu einem A einbeschriebenen endlichen Sehnenzug \bar{s} zusammenschließen.
2. Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ werden die um die Häufungssehnen $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_p$ abgegrenzten ε -Streifen von den Sehnen des Sehnenzuges s mit der Periode p durchlaufen; zwischen s_n und s_{n+p} liegt daher keine weitere Sehne von s . Da auf jede s' -Sehne eine s'' -Sehne folgt (Nullsehnen eingeschlossen), ist p eine gerade Zahl.

Der endliche Sehnenzug $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_p)$, den die Häufungssehnen $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_p$ eines unendlichen Sehnenzuges s mit Anfangssehne bilden, heißt *Grenzsehnenzug* von s , und s heißt *konvergent* gegen \bar{s} .

Spaltet man einen unendlichen Sehnenzug $s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$ ohne Anfangssehne auf in die Teilsehnenzüge $s_+ = (s_1, s_2, \dots)$ und $s_- = (s_{-1}, s_{-2}, \dots)$, so folgt unmittelbar

Satz 1: *Ist dem Eibereich A ein unendlicher Sehnenzug s einbeschrieben, so gilt:*

- a) *Besitzt s eine Anfangssehne s_1 , so konvergiert $s = (s_1, s_2, \dots)$ gegen einen A einbeschriebenen endlichen Grenzsehnenzug \bar{s} (Abb. 3 a).*
- b) *Besitzt s keine Anfangssehne, so konvergiert jeder Teilsehnenzug $s_+ = (s_1, s_2, \dots)$, $s_- = (s_{-1}, s_{-2}, \dots)$ von $s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$ gegen einen A einbeschriebenen endlichen Grenzsehnenzug \bar{s}_+, \bar{s}_- (Abb. 3 b).*

Die Grenzsehnenzüge $\bar{s}, \bar{s}_+, \bar{s}_-$ können in eine Nullsehne entarten (Abb. 3 e); \bar{s}_+ und \bar{s}_- können zusammenfallen (Abb. 3 c). Ist eine – jedoch nicht jede – Häufungssehne von s Nullsehne, so sind die von Nullsehnen verschiedenen Häufungssehnen zweifache Häufungssehnen (Abb. 3 d).

3. Sind s_n und s_{n+p} benachbarte Parallelsehnen eines unendlichen p -periodischen Sehnenzuges s und ist $S(s_n, s_{n+p})$ die zwischen s_n und s_{n+p} liegende Parallelsehnenmenge⁵ des Eibereichs A , so sind

⁵ Eine Sehnenmenge wird im folgenden nicht nur als die Gesamtheit ihrer Sehnen, sondern gelegentlich auch als die Gesamtheit ihrer Sehnenpunkte, d. h. als Punktmenge, betrachtet.

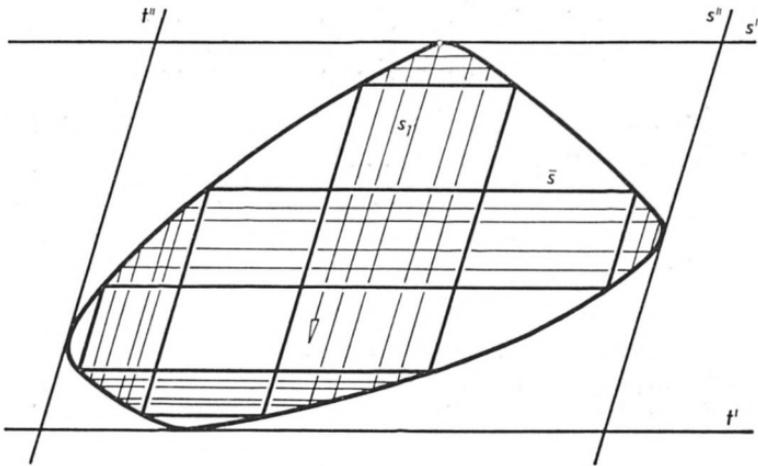


Abb. 3a

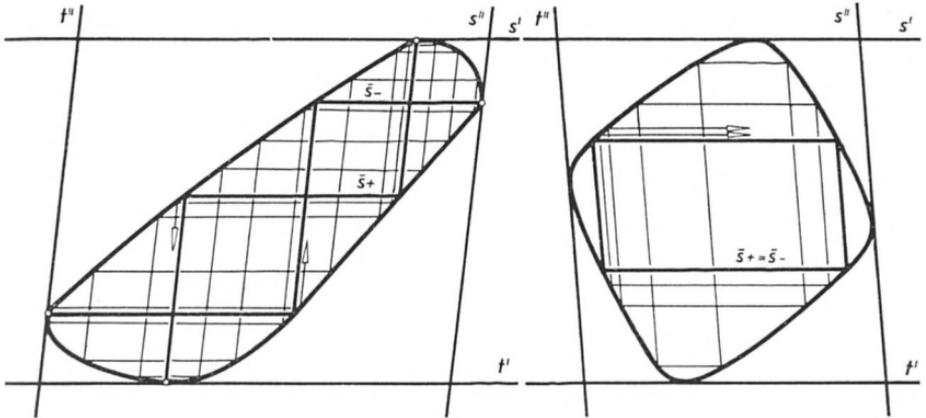


Abb. 3b

Abb. 3c

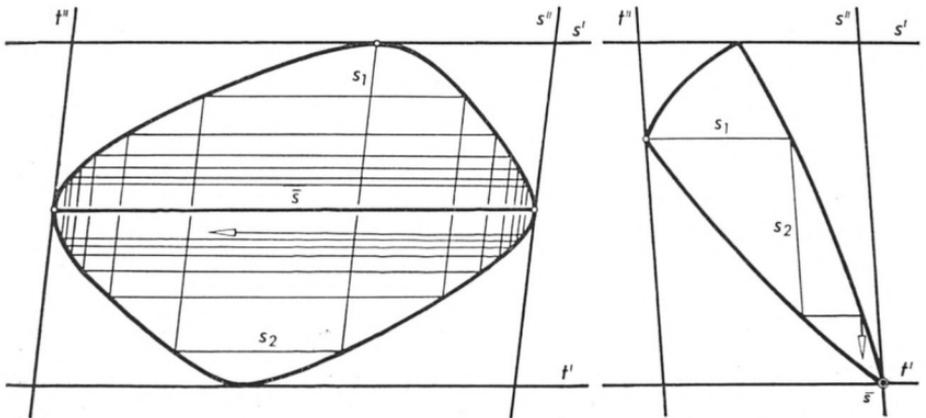


Abb. 3d

Abb. 3e

$$S(s_n, s_{n+p}), S(s_{n+1}, s_{n+1+p}), \dots$$

und

$$S(s_n, s_{n+p}), S(s_{n-1}, s_{n-1+p}), \dots$$

zwei Folgen von Paralleelsehnenmengen, deren erste gegen den Grenzsehnenzug von (s_n, s_{n+1}, \dots) und deren zweite gegen den Grenzsehnenzug von (s_n, s_{n-1}, \dots) strebt, falls s keine Anfangssehne besitzt (Abb. 4 a). Besitzt s die Anfangssehne s_1 , so bricht die zweite Folge mit der Paralleelsehnenmenge $S(s_{(-p/2)+1}, s_{(+p/2)+1})$ ab. Dabei ist s_0 die an s_1 anschließende Nullsehne und $s_1 = s_{-1}, \dots, s_{p/2} = s_{-p/2}$ (Abb. 4 b). Die Vereinigungsmenge $A_s = \bigcup_{\pm n=0}^{\infty} S(s_n, s_{n+p})$ ist ein Teilbereich des Eibereichs A .

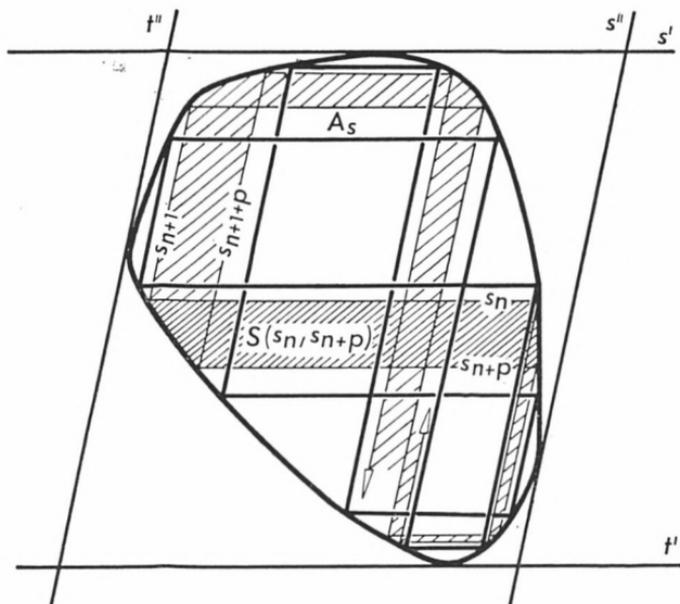


Abb. 4 a

Der durch einen unendlichen Sehnenzug s festgelegte Teilbereich

$$A_s = \bigcup_{\pm n=0}^{\infty} S(s_n, s_{n+p})$$

des Eibereichs A heißt der durch s erfaßte Teilbereich von A . Liegen zwei benachbarte Paralleelsehnen s_n und s_{n+p} des unendlichen p -periodischen Sehnenzuges s in einem hinreichend schma-

len, um eine Häufungssehne \bar{s}_v abgegrenzten ε -Streifen, so gehört jede *zwischen* s_n und s_{n+p} liegende Sehne t_n wegen der daraus folgenden weiteren *zwischen*-Beziehungen einem unendlichen Sehnenzug t an, der gegen denselben Grenzsehnenzug wie s konvergiert. Daher ist der von t erfaßte Teilbereich $A_t = A_s$.

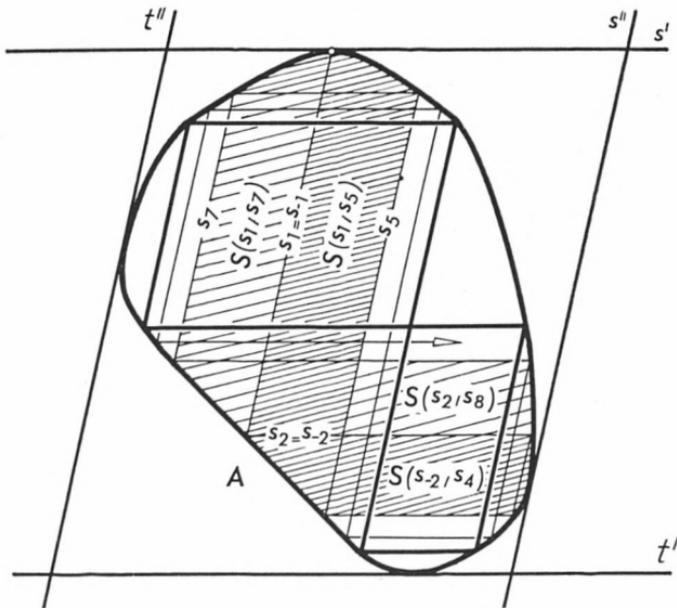


Abb. 4b

Die von unendlichen Sehnenzügen erfaßten Teilbereiche von A hängen somit nur von den Grenzsehnenzügen der unendlichen Sehnenzüge ab.

Ein geschlossener Sehnenzug \bar{s} zerlegt A in zwei sich teilweise überdeckende Teilbereiche und trägt zu ihrer Berandung bei; jeder Teilbereich besteht aus aufeinanderfolgenden, zwischen benachbarten Parallelsehnen von \bar{s} liegenden Parallelsehnenmengen. Ist \bar{s} endlich, aber nicht geschlossen, so existiert nur eine Aufeinanderfolge von Parallelsehnenmengen, und A wird nicht in zwei Teilbereiche zerlegt. Der von einem unendlichen Sehnenzug s erfaßte Teilbereich $A_s \subseteq A$ fällt daher mit A zusammen, wenn die – höchstens zwei – Grenzsehnenzüge von s außer A_s keinen weiteren Teilbereich mitberanden. Dies ist bei fehlenden Randsehnen genau dann der Fall, wenn sie die einzi-

gen, Nullsehnen enthaltenden und damit endlichen, nicht geschlossenen Sehnenzüge von A sind. Also ist $A_s = A$ genau dann, wenn A höchstens zwei endliche Sehnenzüge einbeschrieben und diese nicht geschlossen sind.

4. Wir betrachten erneut die Gesamtheit der einem Eibereich A einbeschriebenen Sehnenzüge mit abwechselnd zu zwei festen, nichtparallelen Randgeraden s' bzw. s'' parallelen Sehnen. Dann gilt für diese Sehnenzüge:

Satz 2: a) Mindestens ein Sehnenzug ist endlich (Nullsehnenzüge eingeschlossen, Abb. 3e).

b) Ist p die Sehnenanzahl eines endlichen Sehnenzuges, so ist p die Sehnenanzahl jedes endlichen Sehnenzuges (Nullsehnenzüge ausgeschlossen).

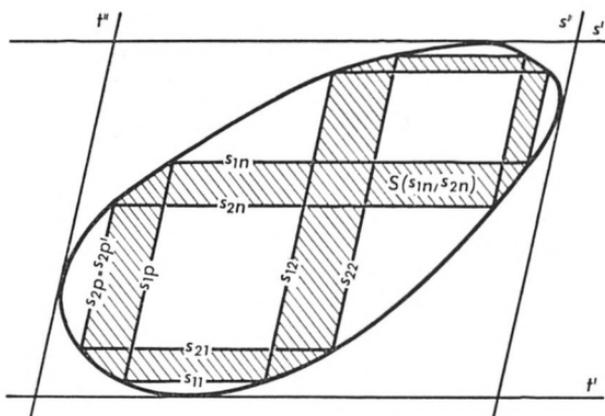


Abb. 5

Beweis: Ist A kein unendlicher Sehnenzug einbeschrieben, so gilt a); ist A ein unendlicher Sehnenzug s einbeschrieben, so konvergiert nach Satz 1 jeder unendliche Teilsehnenzug von s gegen einen A einbeschriebenen endlichen Grenzsehnenzug, also gilt wieder a).

Zum Nachweis von b) seien $s_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1p})$ und $s_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2p'})$ zwei A einbeschriebene endliche Sehnenzüge. Es sei $p \leq p'$ und s_{i1} die s' nächstliegende Sehne von s_i ($i = 1, 2$). Durchläuft man s_1 und s_2 , ausgehend von den Parallelsehnen s_{11}

und s_{21} gleichsinnig, so sind s_{1n} und s_{2n} für $1 \leq n \leq p$ zwei gleichsinnig durchlaufene einander eineindeutig entsprechende Parallelechnen (Abb. 5). Ist $n = p$, so ist s_1 geschlossen. Wäre dann s_2 nicht geschlossen, so läge entweder die auf s_{2p} folgende Sehne $s_{2,p+1}$ zwischen s_{11} und s_{21} oder die s_{21} vorangehende Sehne s_{20} zwischen s_{1p} und s_{2p} . Wegen der Konvexität des Eibereichs folgte im ersten Fall die Beziehung $s_{2,p+2}$ zwischen s_{12} und s_{22} , im zweiten Fall die Beziehung $s_{2,-1}$ zwischen $s_{1,p-1}$ und $s_{2,p-1}$. An jede zwischen-Beziehung würde sich eine folgende anschließen, so daß s_2 niemals geschlossen, sondern im Widerspruch zur Voraussetzung ein A einbeschriebener unendlicher Sehnenzug der Periode p wäre. Ist $n = p$, so ist also auch s_2 geschlossen und es ist $p = p'$.

Aus Satz 2 folgt unmittelbar

Satz 3: *Konvergiert der Teilsehnenzug (s_1, s_2, \dots) eines dem Eibereich A einbeschriebenen unendlichen Sehnenzuges $s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$ gegen den endlichen Grenzsehnenzug \bar{s}_+ mit p Häufungssehnen, so konvergiert auch der Teilsehnenzug (s_{-1}, s_{-2}, \dots) gegen einen endlichen Grenzsehnenzug \bar{s}_- mit p Häufungssehnen (Abb. 3b).*

Sind $s_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1p})$ und $s_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2p})$ zwei endliche, gleichsinnig durchlaufene Sehnenzüge mit nach Satz 2 gleichen Sehnenzahlen p und einander entsprechenden Parallelechnen s_{1n}, s_{2n} ($n = 1, \dots, p$), und ist $S(s_{1n}, s_{2n})$ die zwischen s_{1n} und s_{2n} liegende Parallelechnenmenge des Eibereichs A , so ist die Vereinigungsmenge $A_{12} = \bigcup_{n=1}^p S(s_{1n}, s_{2n})$ ein Teilbereich von A (Abb. 5).

Der durch zwei endliche Sehnenzüge $s_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1p})$ und $s_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2p})$ festgelegte Teilbereich

$$A_{12} = \bigcup_{n=1}^p S(s_{1n}, s_{2n})$$

des Eibereichs A heißt der *zwischen s_1 und s_2 liegende Teilbereich* von A .

Sind s_+ und s_- zwei verschiedene Grenzsehnenzüge des unendlichen Sehnenzuges s , so ist der *zwischen s_+ und s_- liegende*

Teilbereich $A_{+-} \subseteq A$ gleich dem von s erfaßten Teilbereich $A_s \subseteq A$.

Genau dann ist $A_{12} = A$, wenn s_1 und s_2 keinen weiteren Teilbereich mitberanden, d. h. bei fehlenden Randsehnen, wenn s_1 und s_2 die einzigen, Nullsehnen enthaltenden und damit endlichen nicht geschlossenen Sehnenzüge von A sind.

5. Dem Eibereich A seien unendliche Sehnenzüge s eingeschrieben. Der Inhalt des von einem unendlichen Sehnenzug s erfaßten Teilbereichs A_s sei $F(A_s)$; der Inhalt des zwischen zwei Grenzsehnenzügen s_i, s_k liegenden Teilbereichs A_{ik} sei $F(A_{ik})$ und nur berücksichtigt, falls er von keinem unendlichen Sehnenzug ganz oder teilweise erfaßt wird. Der Inhalt von A sei $F(A)$. Da A als zweifache Parallelesehnenmenge auftritt, erhält man:

$$2F(A) = \bigcup_{A_s} F(A_s) + \bigcup_{A_{ik}} F(A_{ik}).$$

A ist beschränkt und es gibt daher nur endlich viele Teilbereiche A_s mit $F(A_s) > \frac{F(A)}{2^n}$ für $n = 1, 2, \dots$. Daraus folgt

Satz 4: *Jeder Eibereich A besitzt höchstens abzählbar viele von unendlichen Sehnenzügen s erfaßte Teilbereiche A_s und höchstens abzählbar viele Grenzsehnenzüge.*

3. Bestimmung von Eibereichen durch Steiner-Symmetrisierungen

1. Besitzt neben dem gegebenen Eibereich A ein Bereich B die Symmetrisierung $A^{(k)}$ längs der Randgeraden $s^{(k)}$, so entsteht B aus A durch Abschieben der zu $s^{(k)}$ parallelen Sehnen von A auf ihren Symmetrisierungsgeraden;⁶ entsprechend entsteht A aus B . Dafür wird kurz gesagt: A und B gehen durch *Abschiebung längs $s^{(k)}$* ineinander über. Ein Bereich B ist daher

⁶ Wird *längs* einer Geraden $s^{(k)}$ symmetrisiert, so ist $s^{(k)}$ normal zu der Geraden l bzw. Ebene ε , an der symmetrisiert wird.

wenigstens längs $s^{(k)}$ konvex,⁷ jedoch nicht notwendig konvex, besitzt also nicht notwendig eine stetige Berandung und einen Umfang. Entsprechendes gilt im Raum. *Zur Konkurrenz werden daher nur solche Bereiche [Körper] B zugelassen, deren Berandung stetig ist und deren Umfang [Oberfläche] existiert.*

Haben A und B die Symmetrisierungen A' und A'' , so seien S'' , T'' zwei Randpunkte von A , die bzw. auf den A und B gemeinsamen Randgeraden s'' , t'' liegen. Bei der Abschiebung von A nach B längs s' werden nicht alle s' -Sehnen von A gleichsinnig abgeschoben, da sonst die in S'' oder die in T'' endende s' -Sehne dem A und B umschriebenen Parallelogramm $s' s'' t' t''$ nicht mehr vollständig angehört. Wegen der Stetigkeit der Randkurven von A und B liegt zwischen entgegengesetzt abgeschobenen s' -Sehnen mindestens eine festbleibende Sehne. Analog schließt man für die s'' -Sehnen von A . Daraus folgt

Satz 5: *Besitzt neben dem Eibereich A ein Bereich B die Symmetrisierungen A' und A'' , so haben A und B mindestens eine s' - und mindestens eine s'' -Sehne gemeinsam.*

Satz 5 kann nicht verschärft werden, da es Fälle gibt, in denen A und B genau eine s' - und genau eine s'' -Sehne gemeinsam haben.

Unter den A und B gemeinsamen s' -Sehnen sei \overline{PQ} die s' nächstliegende. Die Parallelsehnenmengen zwischen \overline{PQ} und s' , $A_1 \subset A$ und $B_1 \subset B$, seien von den Bogen a_1 bzw. b_1 über \overline{PQ} berandet (Abb. 6). Da B_1 aus A_1 durch Abschiebung längs

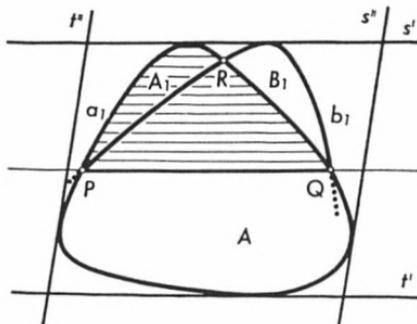


Abb. 6

⁷ Ein Bereich [Körper] B heißt längs einer Geraden $s^{(k)}$ konvex, wenn mit je zwei Punkten P , Q von B (PQ parallel $s^{(k)}$) die Strecke PQ zu B gehört.

s' entsteht, sind nach dem Satz von Cavalieri A_1 und B_1 inhaltsgleich. Daher kann, wenn $A_1 \neq B_1$ ist, a_1 nicht ganz in B_1 und b_1 nicht ganz in A_1 verlaufen; a_1 und b_1 haben somit mindestens einen von P und Q verschiedenen Punkt R gemeinsam. Da für $A_1 \equiv B_1$ dasselbe gilt, hat man

Satz 6: *Besitzt neben dem Eibereich A ein Bereich B die Symmetrisierungen A' und A'' , so haben A und B zwischen s' und der s' nächstliegenden gemeinsamen Sehne mindestens einen gemeinsamen Randpunkt.*

Da es Fälle gibt, in denen A und B genau eine s' -Sehne und auf jeder ihrer Seiten genau einen Randpunkt gemeinsam haben, läßt sich Satz 6 nicht verschärfen.

Ist ein unendlicher, p -periodischer Sehnenzug $s = (s_k, s_{k+1}, \dots)$ sowohl dem Eibereich A als auch einem Bereich B mit den Symmetrisierungen A' und A'' einbeschrieben, so gehört mit den Sehnen s_n ($n = k, k+1, \dots$) auch der Grenzsehnenzug \bar{s} von s zu A und B . Die von s erfaßten Teilbereiche $A_s \subseteq A$ und $B_s \subseteq B$ werden durch Teilbogen der Randkurven von A bzw. B mitberandet. Der Teilbogen, der sowohl die Parallelsehnenmenge $S(s_n, s_{n+p})$ als auch die Parallelsehnenmenge $S(s_{n+1}, s_{n+1+p})$ mitberandet, sei $q_n(A_s)$ bei A_s und $q_n(B_s)$ bei B_s ($n = k, k+1, \dots$) (Abb. 7). Die von $q_n(A_s)$ und $q_n(B_s)$ umschlossene Fläche

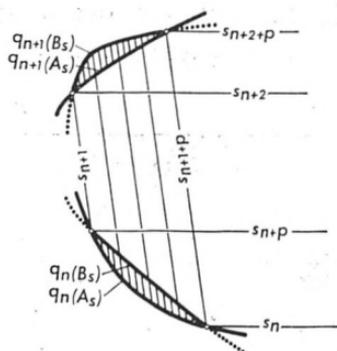


Abb. 7

sei $F(q_n)$. Bei der Abschiebung von A nach B längs s' sowie längs s'' überstreicht jeder Teilbogen $q_n(A_s)$ die Fläche $F(q_n)$, die nach dem Satz von Cavalieri der Fläche $F(q_{n+1})$ gleich ist. Daher ist $F(q_n) = \text{const.}$ für $n = k, k+1, \dots$. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(A_s) = 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(B_s) = 0$$

ist auch
$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(q_n) = 0,$$

so daß $F(q_n) = 0$ für $n = k, k+1, \dots$ folgt. Damit ist $q_n(A_s) = q_n(B_s)$ für alle n , womit sich $A_s = B_s$ ergibt. Somit gilt

Satz 7: *Ist dem Eibereich A und einem Bereich B mit den Symmetrisierungen A' und A'' ein unendlicher Sehnenzug s einbeschrieben, so ist der von s erfaßte Teilbereich $A_s \subseteq A$ durch A' und A'' bestimmt.*

Gehört ein Randpunkt R des Eibereichs A zu jedem Bereich B mit der Symmetrisierung $A^{(k)}$, so kann zur Ermittlung der Bereiche B mit Hilfe von $A^{(k)}$ die in R endende $s^{(k)}$ -Sehne von A nur auf zwei verschiedene Arten in R angesetzt werden. Daraus folgt unmittelbar

Satz 8: *Gehört mit einem Randpunkt R des Eibereichs A ein weiterer Punkt der in R endenden $s^{(k)}$ -Sehne $s_i \subset A$ zu jedem Bereich B mit der Symmetrisierung $A^{(k)}$, so gehört die ganze Sehne s_i zu jedem Bereich B mit der Symmetrisierung $A^{(k)}$.*

Ein dem Eibereich A einbeschriebener vierseitiger geschlossener Sehnenzug $s = (s_1, \dots, s_4)$ teilt A in fünf fremde Teilbereiche: das von s begrenzte Parallelogramm A_0 und die Restbereiche A_i ($i = 1, \dots, 4$), gelegen zwischen s_i und einer dazu parallelen Randgeraden. Jeder Bereich B mit den Symmetrisierungen A' und A'' entsteht aus A durch Abschiebung längs s' sowie längs s'' . Durch Abschiebung des Teilbereichs $A_i \subset A$ längs s_i entstehe der Teilbereich $B_i \subset B$ ($i = 1, \dots, 4$). Da sich die Teilbereiche B_i möglicherweise überdecken, gilt für ihren Gesamtinhalt

$$F\left(\bigcup_1^4 B_i\right) \leq \sum_1^4 F(A_i).$$

Gilt das Kleinerzeichen, so ist

$$F\left(\bigcup_1^4 B_i\right) = \sum_1^4 F(A_i) - \eta \quad (\eta > 0).$$

Der innerhalb des Parallelogramms A_0 liegende Teilbereich $B_0 \subset B$ hat somit den Inhalt

$$F(B_0) = F(A) - F\left(\bigcup_1^4 B_i\right)$$

oder

$$F(B_0) = F(A) - \sum_1^5 F(A_i) + \eta$$

$$= F(A_0) + \eta \quad (\eta > 0)$$

Da jedoch stets $F(B_0) \leq F(A_0)$ ist, kann nur das Gleichheitszeichen gelten. Das heißt, das Parallelogramm A_0 ist jedem Bereich B mit den Symmetrisierungen A' und A'' eingeschrieben. Damit gilt

Satz 9: *Ein dem Eibereich A eingeschriebenes Parallelogramm ist durch die Symmetrisierungen A' und A'' bestimmt.*

Satz 9 gilt nicht für geschlossene Sehnenzüge $s = (s_1, \dots, s_p)$ mit $p > 4$.

2. Es sei A' die Symmetrisierung des Eibereichs A längs einer solchen Randgeraden s' , auf der – ebenso wie auf t' – nur ein Randpunkt von A liegt; diese Randpunkte seien S' auf s' und T' auf t' . Wird A von keinen Strecken berandet, so haben die Randgeraden jeder Symmetrisierung diese Eigenschaft. Enthält die Berandung von A Strecken, so sind höchstens abzählbar viele Symmetrisierungsrichtungen ausgenommen.⁸

Wie man sofort erkennt, kann man A über jeder s' -Sehne ein Parallelogramm einschreiben, wobei zu den Nullsehnen S' , T' das zur Sehne $\overline{S'T'}$ entartete Parallelogramm gehört. Die Richtungen sämtlicher zu s' nichtparallelen Parallelogrammseiten erfüllen aus Stetigkeitsgründen einen gewissen Winkel $\alpha \geq 0$.

Ist $\alpha = 0$ und A'' die Symmetrisierung von A längs den zu s' nichtparallelen Parallelogrammseiten, so besteht A aus einbe-

⁸ Ein Eibereich besitzt für jedes $n = 1, 2, \dots$ nur endlich viele Berandungsstrecken der Länge $l > \frac{l}{2^n}$; er besitzt daher insgesamt höchstens abzählbar viele Berandungsstrecken.

schriebenen Parallelogrammen mit abwechselnd zu s' und s'' parallelen Seiten und ist mit Satz 9 durch A' und A'' bestimmt.⁹

Ist $\alpha > 0$, so werde eines dieser nicht entarteten Parallelogramme – mit den s' -Sehnen $s_1 = \overline{S_1 S_2}$, $s_3 = \overline{S_3 S_4}$ und den zu s' nichtparallelen Seiten $s_2 = \overline{S_2 S_3}$, $s_4 = \overline{S_4 S_1}$ – so ausgewählt, daß keine zu s_2 parallele Sehne A mitberandet. Ist dann A'' die Symmetrisierung von A längs s_2 , so liegt auch auf jeder der Randgeraden s'' , t'' nur ein Randpunkt von A . Diese Randpunkte seien S'' bzw. T'' . Für $\alpha > 0$ wird A durch A' und A'' nicht notwendig bestimmt, z. B. dann nicht, wenn eine der beiden Symmetrisierungen, etwa A'' , zur Mittelparallelen m'' der Randgeraden s'' , t'' symmetrisch ist und m'' die s' -Sehnen von A nicht halbiert.

1. Fall: Das Parallelogramm $s = (s_1, \dots, s_4)$ ist der einzige A einbeschriebene geschlossene Sehnenzug aus s' - und s'' -Sehnen (Abb. 8).

Damit ist jeder andere A einbeschriebene Sehnenzug ein unendlicher Sehnenzug, der gegen s konvergiert.¹⁰ Da s nach Satz 9 durch A' und A'' bestimmt ist, erfaßt ein A einbeschriebener unendlicher Sehnenzug entweder die Parallelesehnenmenge $S(s_1, s_3) \subset A$ oder die Parallelesehnenmenge $S(s_2, s_4) \subset A$.

Es sei A''' eine von A' und A'' verschiedene Symmetrisierung von A , welche keine der Diagonalen $S_1 S_3$, $S_2 S_4$ des Parallelogramms s als Symmetrisierungsgerade besitzt. In zwei gegenüberliegenden Parallelogrammecken, etwa S_1 und S_3 , endet dann je eine s''' -Sehne von A , die außer S_1 bzw. S_3 weitere Parallelogrammpunkte mit jedem Bereich B gemeinsam hat, der die Symmetrisierungen A' , A'' , A''' besitzt.¹¹ Sind diese s''' -Sehnen

⁹ Werden die Parallelogramme nicht als eindimensionale Punktmengen (Sehnenzüge), sondern als zweidimensionale Punktmengen betrachtet, so liegt eine Ausfüllung des Eibereichs durch Parallelogramme vor; vgl. O. Giering [9].

¹⁰ Nur wenn $\overline{S' T'}$ eine s'' -Sehne oder $\overline{S'' T''}$ eine s' -Sehne ist, treten in $S' T'$ bzw. $S'' T''$ noch endliche nicht geschlossene Sehnenzüge auf, zugleich als Grenzsehnenzüge unendlicher Sehnenzüge von A .

¹¹ Der Nebensatz „der die Symmetrisierungen A' , A'' , A''' besitzt“ wird künftig i. a. weggelassen.

$\overline{S_1 T_1}$ und $\overline{S_3 U_1}$, so gehören sie nach Satz 8 zu jedem Bereich B ; beide liegen entweder in $S(s_1, s_3) \subset A$ oder in $S(s_2, s_4) \subset A$, etwa in $S(s_1, s_3)$ (Abb. 8). Die in T_1 und U_1 endenden s' -Sehnen $t_1 = \overline{T_1 T_2}$ und $u_1 = \overline{U_1 U_2}$ gehören wieder mit Satz 8 zu jedem Bereich B . Mindestens eine der Sehnen $\overline{T_1 U_2}$ bzw. $\overline{T_2 U_1}$ (Abb. 8) ist nicht zu s'' parallel, da sonst entgegen der Voraussetzung in $T_1 T_2 U_1 U_2$ ein weiterer A einbeschriebener geschlossener Sehnenzug vorläge. Daher schneidet entweder die auf t_1 folgende s'' -Sehne $t_2 = \overline{T_2 T_3}$ von A die Sehne u_1 oder die u_1 vorangehende s'' -Sehne $u_0 = \overline{U_0 U_1}$ die Sehne t_1 .

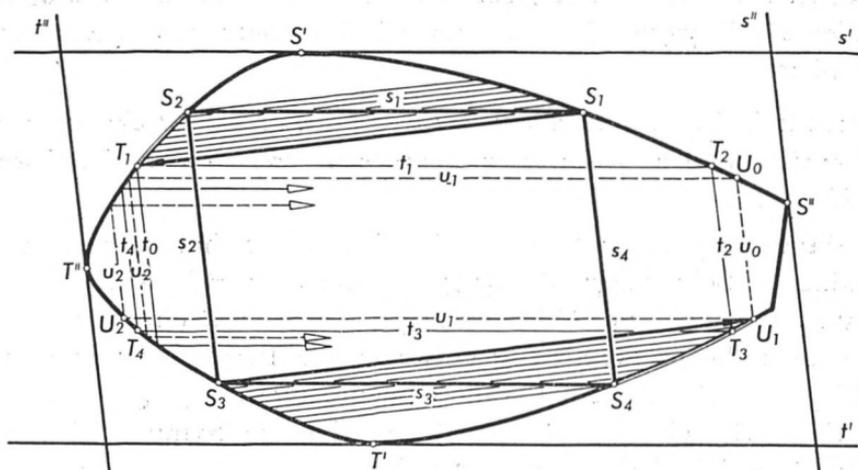


Abb. 8

Im ersten Fall gehört t_2 nach Satz 8 zu jedem Bereich B , ebenso die auf t_2 folgende s' -Sehne $t_3 = \overline{T_3 T_4}$. Nach Voraussetzung ist analog zu vorhin die Sehne $\overline{T_1 T_4}$ nicht zu s'' parallel. Man schließt daher wie zuvor, daß entweder die auf t_3 folgende s'' -Sehne t_4 oder die t_1 vorangehende s'' -Sehne t_0 von A zu jedem Bereich B gehört. Im zweiten Fall erhält man für die Sehnen u_i ($i = -2, \dots, 2$) von A dasselbe Ergebnis.

Von dem A einbeschriebenen unendlichen Sehnenzug $t = (\dots, t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots)$ [oder $u = (\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots)$], der mit mindesten einem seiner Teilsehnenzügen t_+, t_- (vgl. Fußnote 10) mit der Periode 4 gegen das Parallelogramm $s = (s_1, \dots, s_4)$ konvergiert, gehören somit vier aufeinanderfolgende Sehnen zu

jedem Bereich B . Die weitere Anwendung von Satz 8 ergibt, daß jeder der beiden Teilsehnenzüge $(\dots, t_1, t_2, t_3, t_4), (t_1, t_2, t_3, t_4, \dots)$ [oder $(\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1), (u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, \dots)$] jedem Bereich B angehört. Der von t (oder u) erfaßte Teilbereich $S(s_1, s_3) \subset A$ ist nach Satz 7 durch A', A'', A''' bestimmt.

Zwei s''' -Sehnen von A , die in einem inneren Punkt der Randbogen $\widehat{S_2 T_1}, \widehat{S_4 U_1}$ des Teilbereichs $S(s_1, s_3)$ enden, gehören mit Satz 8 zu jedem Bereich B und bestimmen zwei Randpunkte von $S(s_2, s_4)$. Mit diesen folgt die Bestimmtheit von $S(s_2, s_4)$ ebenso, wie zuvor die Bestimmtheit von $S(s_1, s_3)$ mit T_1 und U_1 . Damit ist A durch A', A'', A''' bestimmt.

2. Fall: Das Parallelogramm $s = (s_1, \dots, s_4)$ ist nicht der einzige A einbeschriebene geschlossene Sehnenzug aus s' - und s'' -Sehnen.

Jeder andere geschlossene Sehnenzug ist nach Satz 2 b wieder ein Parallelogramm, das nach Satz 9 durch A' und A'' bestimmt ist, jedoch ist wegen $\alpha > 0$ nicht jeder Sehnenzug ein Parallelogramm; A enthält somit noch unendliche Sehnenzüge. Nach Satz 4 werden höchstens abzählbar viele Teilbereiche von A durch unendliche Sehnenzüge erfaßt. Ein unendlicher Sehnenzug t erfaßt entweder einen Teilbereich $A_t \subset A$, der zwischen zwei Parallelogrammen liegt, zu denen wir auch die Sehnen $\overline{S'T'}$, $\overline{S''T''}$ zählen, falls sie s'' - bzw. s' -Sehnen sind, oder eine Parallelsehnenmenge zwischen zwei Seiten eines Parallelogramms. Liegt A_t zwischen zwei Parallelogrammen – den verschiedenen Grenzsehnenzügen t_+, t_- von t –, so besitzt t keine Anfangssehne. Liegt A_t zwischen zwei Parallelogrammseiten, so ist das zugehörige Parallelogramm der Grenzsehnenzug von t , wenn t eine Anfangssehne besitzt; besitzt t keine Anfangssehne, so fallen beide Grenzsehnenzüge t_+ und t_- mit dem Parallelogramm zusammen. Eine Parallelsehnenmenge $A_t \subset A$ liegt also zwischen den längsten s' - oder den längsten s'' -Sehnen der A einbeschriebenen nichtentarteten Parallelogramme.

Sind A endlich viele oder abzählbar viele Parallelogramme einbeschrieben, so gibt es endlich viele oder abzählbar viele Paare von Parallelogrammecken. Die Symmetrisierungsrichtung für A''' wird nun im Vollwinkel beliebig gewählt, bloß ver-

schieden von den durch die Verbindungsgeraden zweier Parallelogrammecken bestimmten Richtungen. Somit verbindet keine s''' -Sehne von A zwei Parallelogrammecken. Jedes Parallelogramm besitzt jedoch zwei Gegenecken, in denen s''' -Sehnen enden, die mit Satz 8 jedem Bereich B angehören. Ausgehend von den Endpunkten dieser s''' -Sehnen, die nicht Parallelogrammecken sind, lassen sich mit Satz 8 gewissen Teilbereichen $A_i \subset A$ unendliche Sehnenzüge t einbeschreiben. Je nachdem einer dieser Teilbereiche zwischen zwei Parallelogrammen oder zwischen zwei Seiten eines Parallelogramms liegt, ist er nach Satz 7 oder nach Fall 1 durch A' , A'' , A''' bestimmt. Die bestimmten Teilbereiche besitzen Randpunkte, in denen s''' -Sehnen enden, die zur Bestimmung weiterer Teilbereiche A_i geeignet sind. Können schließlich keine weiteren Teilbereiche mehr bestimmt werden, so zerfallen die Teilbereiche $A_i \subset A$ in eine Menge bestimmter und eine Menge nichtbestimmter Teilbereiche. Es gibt daher einen bestimmten Teilbereich A_i , der an einen nichtbestimmten Teilbereich A_i^* grenzt. Sind $b_i \subset A_i$ und $b_i^* \subset A_i^*$ aneinandergrenzende Berandungsbogen, so treffen die s''' -Symmetrisierungsgeraden durch b_i nur wieder Berandungsbogen der bestimmten Teilbereiche. Würden sie Berandungsbogen nichtbestimmter Teilbereiche treffen, so wären auch diese bestimmt. Entsprechend treffen die s''' -Symmetrisierungsgeraden durch b_i^* nur wieder Bogen nichtbestimmter Teilbereiche. Daraus folgt: die s''' -Symmetrisierungsgerade durch den b_i und b_i^* gemeinsamen Punkt kann nur wieder einen Randpunkt von A treffen, in dem ein bestimmter an einen nichtbestimmten Teilbereich grenzt. Ein solcher Randpunkt ist also eine Parallelogrammecke im Widerspruch zur Wahl von A''' , wonach keine s''' -Sehne von A zwei Parallelogrammecken verbindet. Somit sind alle Teilbereiche $A_i \subset A$ und also auch A durch A' , A'' , A''' bestimmt.

Zwei reguläre n -Ecke, die einem Kreis einbeschrieben und um den Winkel $\frac{\pi}{n}$ gegeneinander verdreht sind, haben längs den Seiten des von ihren Ecken gebildeten regulären $2n$ -Ecks dieselben Symmetrisierungen $A', \dots, A^{(n)}$. Daher vermögen selbst $n \geq 2$ beliebige Symmetrisierungen einen Eibereich A i. a. nicht zu bestimmen.

Zusammenfassend gilt somit

Satz 10: *Zur Bestimmung eines Eibereichs A sind mindestens zwei, jedoch höchstens drei Symmetrisierungen A' , A'' , A''' notwendig. Dabei sind – jeweils mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Symmetrisierungsrichtungen – in der Reihenfolge A' , A'' , A''' die Symmetrisierungsrichtungen von A' und A''' beliebig, und die Symmetrisierungsrichtung von A'' in einem Winkel $\alpha(A'') > 0$ beliebig wählbar. Für $\alpha(A'') = 0$ ist A bereits durch zwei Symmetrisierungen bestimmt. Beliebige gewählte Symmetrisierungen bestimmen A i. a. nicht.*

4. Bestimmung von Eikörpern durch Steiner-Symmetrisierungen

1. Die Bestimmung eines Eikörpers A erfolgt zunächst unter der Voraussetzung, daß es einen ebenen Schnittbereich des Eikörpers gibt, bei dessen Bestimmung nach 3.2. $\alpha > 0$ ist; dieser Schnittbereich ist nach Satz 10 durch drei Symmetrisierungen bestimmt. Die Schnittebene sei ε_0 , und A' , A'' , A''' seien drei verschiedene Symmetrisierungen von A derart, daß der Schnittbereich $\varepsilon_0 \cdot A$ durch $\varepsilon_0 \cdot A'$, $\varepsilon_0 \cdot A''$, $\varepsilon_0 \cdot A'''$ bestimmt ist. Wegen $\alpha > 0$ gehören aus Stetigkeitsgründen zu den Parallelschnitten von $\varepsilon_0 \cdot A$ – etwa jenen auf einer Seite von ε_0 im Abstand $0 \leq x \leq x_0$ – ebenfalls Winkel $\alpha_x > 0$, und für hinreichend kleines $x_0 > 0$ ist der Durchschnitt aller α_x noch positiv. Wir beschränken uns nun auf rationale Abstände x ; dann lassen sich, falls erforderlich, die Symmetrisierungen A'' und A''' derart durch zwei Symmetrisierungen $A^{(4)}$ und $A^{(5)}$ ersetzen (die in der Folge wieder mit A'' und A''' bezeichnet seien), daß in dem Streifen $0 \leq x \leq x_0$ (x rational) alle Schnittbereiche $\varepsilon_x \cdot A$ durch $\varepsilon_x \cdot A'$, $\varepsilon_x \cdot A''$, $\varepsilon_x \cdot A'''$ bestimmt sind. Da nur abzählbar viele Schnittbereiche gewählt wurden, kann die Symmetrisierungsrichtung von A'' aus dem Durchschnitt aller α_x , und die Symmetrisierungsrichtung von A''' aus dem Vollwinkel mit jeweils höchstens abzähl-

bar vielen Ausnahmen beliebig gewählt werden.¹² Abb. 9 zeigt den Normalriß des Eikörpers A auf eine zu ε_0 normale und zur Symmetrisierungsrichtung von A''' parallele Ebene π_0 sowie drei zu π_0 parallele Schnitte $\pi_{y_i} \cdot A$ mit Ebenen π_y in den Abständen $y = y_i$ ($i = 1, 2, 3$) von π_0 .

Ist δ_y der Durchschnitt des Parallelschnitts $\pi_y \cdot A$ mit der Menge der Schnittbereiche $\varepsilon_x \cdot A$ ($0 \leq x \leq x_0$), so gehören die von ε_0 rationalabständigen Sehnen von δ_y zu jedem Körper B .¹³ Die Sehnenendpunkte liegen dicht auf Berandungsbogen des Schnittbereiches $\pi_y \cdot A$, die wegen seiner Konvexität selbst konvex und daher stetig sind (vgl. Fußnote 4). Diese Berandungsbogen gehören somit vollständig zu jedem Körper B . Ein Durchschnitt δ_y hat zwei (wie δ_{y_1}), einen (wie δ_{y_2}) oder keinen (wie der leere Durchschnitt δ_{y_3}) Berandungsbogen mit dem Eikörper A gemeinsam. Die Gesamtheit der dem Durchschnitt δ_y und A gemeinsamen Berandungsbogen sei $b(\delta_y)$.

Die Menge der Schnittbereiche $\varepsilon_x \cdot A$ ($0 \leq x \leq x_0$) wird im Normalriß (Abb. 9) von zwei Umrißbogen \widehat{LM} und \widehat{NO} (L, N in ε_0 ; M, O in ε_{x_0}) des Eikörpers A mitberandet. Eine neue Symmetrisierung $A^{(4)}$ wird nun so gewählt, daß ihre Symmetrisierungsgeraden zu π_0 parallel sind und mit den Symmetrisierungsgeraden von A''' einen Winkel bilden, der kleiner ist als der kleinere der Winkel $\sphericalangle(N, M, O)$, $\sphericalangle(N, L, O)$. Da alle Punkte der Berandungsbogen $b(\delta_y)$ jedem Körper B angehören, gehören mit Satz 8 auch die in diesen Bogenpunkten endenden $s^{(4)}$ -Sehnen von A zu jedem Körper B .¹⁴ Ist $\delta_y^{(1)}$ die Menge dieser $s^{(4)}$ -Sehnen und $b(\delta_y^{(1)})$ die Gesamtheit der $\delta_y^{(1)}$ und A gemeinsamen Berandungsbogen, so ist δ_y in $\delta_y^{(1)}$ und $b(\delta_y)$ in $b(\delta_y^{(1)})$ echt enthalten.

¹² Bei jedem einzelnen Schnittbereich sind nach 3.2. bei der Wahl der Symmetrisierungen A'' und A''' höchstens abzählbar viele Symmetrisierungsrichtungen ausgenommen und daher auch bei abzählbar vielen Schnittbereichen.

¹³ Analog zum ebenen Fall sei mit B jeder zulässige von A verschiedene Körper bezeichnet, der ebenfalls die von A betrachteten Symmetrisierungen besitzt.

¹⁴ Die Bogenendpunkte bereiten keine Schwierigkeiten, obwohl auf sie Satz 8 nicht anwendbar ist.

In den allen Körpern B gemeinsamen Punkten der Berandungsbogen $b(\delta_y^{(1)})$ enden s''' -Sehnen, die mit Satz 8 wieder allen Körpern B angehören. Ist nun $\delta_y^{(2)}$ die Menge dieser s''' -Sehnen und $b(\delta_y^{(2)})$ die Gesamtheit der $\delta_y^{(2)}$ und A gemeinsamen Berandungsbogen, so gilt $b(\delta_y^{(1)}) \subset b(\delta_y^{(2)})$. Die Fortsetzung dieser Konstruktion ergibt

$$\delta_y \subset \delta_y^{(1)} \subset \delta_y^{(2)} \subset \dots \subset \pi_y \cdot A.$$

Die abwechselnd zu s''' und $s^{(4)}$ parallelen Berandungssehnen der Teilbereiche $\delta_y^{(n)}$ bilden für $n = 1, 2, 3, \dots$ einen (vgl. δ_{y_2}) oder

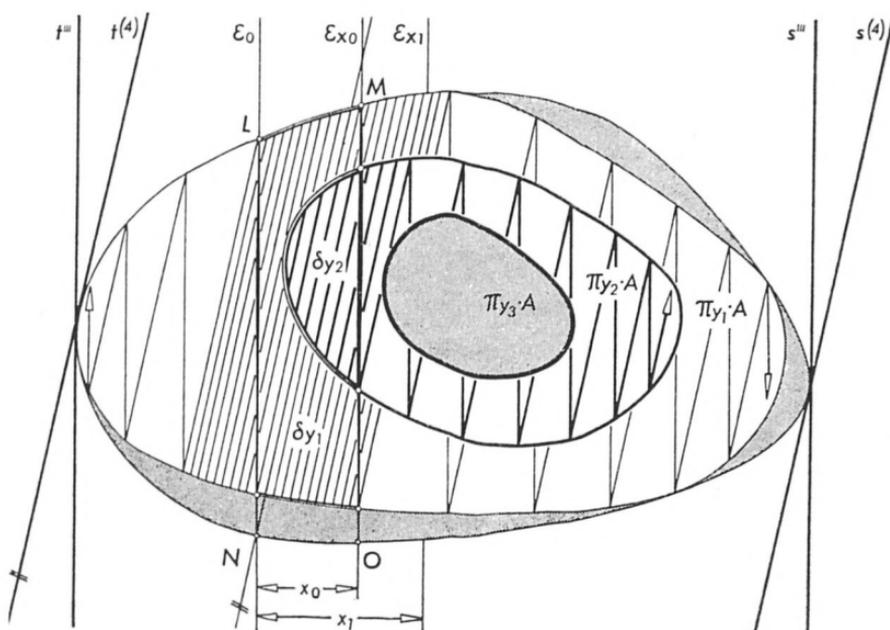


Abb. 9

zwei (vgl. δ_{y_1}) dem Parallelschnitt $\pi_y \cdot A$ einbeschriebene Sehnenzüge. Konvergiert einer dieser Sehnenzüge gegen einen Nullsehnenzug, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_y^{(n)} = \pi_y \cdot A$, andernfalls gilt bereits nach endlich vielen, etwa k Konstruktionsschritten $\delta_y^{(k)} = \pi_y \cdot A$. Damit ist ein Parallelschnitt $\pi_y \cdot A$, der mit der Menge der Schnittbereiche $\varepsilon_x \cdot A$ ($0 \leq x \leq x_0$) einen nichtleeren Durchschnitt δ_y besitzt, durch $A', A'', A''', A^{(4)}$ bestimmt.

Gibt es Parallelschnitte $\pi_y \cdot A$ mit leerem Durchschnitt δ_y , so gibt es Schnittbereiche $\varepsilon_x \cdot A$ (etwa $x_0 < x$) mit noch unerfaßten Teilbögen b_x . Jeder Schnittbereich $\varepsilon_x \cdot A$ ($x_0 < x \leq x_1$) besitzt höchstens zwei nicht erfaßte Teilbögen b_x und im Fall zweier Teilbögen zwei sich nicht kreuzende Verbindungssehnen von Endpunkten verschiedener Bögen. Da diese Sehnen nicht zugleich s' -, s'' -, und s''' -Sehnen sind, bestimmen die Symmetrisierungen A' , A'' , A''' mit Satz 8 sämtliche noch unerfaßten Teilbögen b_x und damit sämtliche Schnittbereiche $\varepsilon_x \cdot A$ ($x_0 \leq x \leq x_1$). Die Parallelschnitte $\pi_y \cdot A$, die mit der Menge der Schnittbereiche $\varepsilon_x \cdot A$ ($x_0 \leq x \leq x_1$) einen nichtleeren Durchschnitt δ_y besitzen, sind wie zuvor durch A' , A'' , A''' , $A^{(4)}$ bestimmt. Nach endlich vielen weiteren Schritten sind alle noch etwa vorhandenen Parallelschnitte $\pi_y \cdot A$ mit leerem Durchschnitt δ_y und damit der Eikörper A durch die gewählten Symmetrisierungen A' , A'' , A''' , $A^{(4)}$ bestimmt.

2. Besitzt ein Eikörper A keinen ebenen Schnittbereich, bei dessen Bestimmung nach 3.2. $\alpha > 0$ ist, so hat jeder ebene Schnitt von A die folgende Eigenschaft E : Zu jeder für A' gewählten Symmetrisierungsrichtung s' gibt es eine *konjugierte*, nämlich die wegen $\alpha \equiv 0$ für A'' festgelegte Symmetrisierungsrichtung s'' derart, daß alle einbeschriebenen Sehnenzüge Parallelogramme sind.¹⁵ Damit besitzt jeder ebene Schnittbereich zu jedem Durchmesser (Sehne größter Länge einer Parallelehnenschar) einen konjugierten, so daß die parallelen Stützgeraden in den Endpunkten des einen die Richtung des andern abgeben; W. Blaschke [5] nennt die Randkurven solcher Eibereiche *P-Linien* (vgl. auch H. Lenz [13] und J. Radon [15]). *P-Linienbereiche* mit der Eigenschaft E nennen wir *E-Bereiche*. Randsehnen werden bei *E-Bereichen* in einbeschriebene Sehnenzüge einbezogen.

Zur Bestimmung von A gehen wir aus von zwei parallelen Stützebenen σ_1 , σ_2 , zugehörigen Stützpunkten S_1 , S_2 und zwei zu dem Durchmesser $\overline{S_1 S_2}$ parallelen ebenen Schnitten $\varepsilon_1 \cdot A$, $\varepsilon_2 \cdot A$ ($\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$) (Abb. 10). Die Symmetrisierungsrichtung s' sei die Richtung der Schnittgeraden $\varepsilon_1 \cdot \sigma_1$. Ist s'' eine zu s' konjugierte Richtung in $\varepsilon_1 \cdot A$ und s''' eine zu s' konjugierte Richtung in

¹⁵ Diese Eigenschaft haben z. B. Ellipsen und Dreiecke.

$\varepsilon_2 \cdot A$, so sind mit Satz 9 die E -Bereiche $\varepsilon_1 \cdot A$ und $\varepsilon_2 \cdot A$ durch die Symmetrisierungen $\varepsilon_1 \cdot A'$, $\varepsilon_1 \cdot A''$ bzw. $\varepsilon_2 \cdot A'$, $\varepsilon_2 \cdot A'''$ bestimmt.

Nun sei $\varepsilon_3 \cdot A$ ein zu σ_1 paralleler Schnitt des Eikörpers A , der sowohl $\varepsilon_1 \cdot A$ als auch $\varepsilon_2 \cdot A$ in zwei von Nullsehnen verschiedenen s' -Sehnen schneidet, die wegen der Bestimmtheit von $\varepsilon_1 \cdot A$ und $\varepsilon_2 \cdot A$ jedem Körper B angehören. Ist $s^{(4)}$ eine zu s' konjugierte Richtung in $\varepsilon_3 \cdot A$, so ist $\varepsilon_3 \cdot A$ als E -Bereich nach Satz 9 durch A' und $A^{(4)}$ bestimmt.

Jeder zu ε_3 parallele Schnitt $\varepsilon_4 \cdot A$, dessen Abstand von ε_3 hinreichend klein, etwa kleiner d ist, hat mit $\varepsilon_1 \cdot A$ eine s' -Sehne $\overline{T_1 U_1}$ und mit $\varepsilon_2 \cdot A$ eine s' -Sehne $\overline{T_2 U_2}$ gemeinsam, die beide keine Nullsehnen sind. Für jeden solchen Parallelschnitt $\varepsilon_4 \cdot A$ gehört daher das Trapez $T_1 U_1 T_2 U_2$ zu jedem Körper B . Haben $T_1 T_2$ oder $U_1 U_2$ die Richtung $s^{(4)}$, so ist $T_1 U_1 T_2 U_2$ ein Parallelogramm und $\varepsilon_4 \cdot A$ ist als E -Bereich durch A' und $A^{(4)}$ bestimmt. Ist $T_1 U_1 T_2 U_2$ kein Parallelogramm mit den Seitenrichtungen s' , $s^{(4)}$, so enden in genau zwei Ecken, etwa in T_2 und U_2 , $s^{(4)}$ -Sehnen $\overline{T_2 T_3}$ bzw. $\overline{U_2 U_3}$, die mit Satz 8 jedem Körper B angehören. Dasselbe erkennt man für die auf $\overline{T_2 T_3}$ folgende Sehne $\overline{T_3 T_4}$ des jedem $-\varepsilon_3$ hinreichend benachbarten $-\text{Parallelschnitt}$ $\varepsilon_4 \cdot A$ einbeschriebenen Sehnenzuges $\overline{U_2 T_2}$, $\overline{T_2 T_3}$, $\overline{T_3 T_4}$, ... wie folgt: Um die Randkurve des durch A' und $A^{(4)}$ bestimmten Schnittbereichs $\varepsilon_3 \cdot A$ sei eine Rohrfläche R mit dem Radius ε gelegt. Wegen der Stetigkeit der Begrenzungsfläche der Körper B (vgl. 3.1.) gibt es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein positives $\delta < \min(\varepsilon, d)$, so daß die Endpunkte der in $\varepsilon_4 \cdot A$ aufeinanderfolgenden Sehnen $\overline{U_2 T_2}$, $\overline{T_2 T_3}$, $\overline{T_3 T_4}$, ... noch in R liegen für jeden Schnittbereich $\varepsilon_4 \cdot A$ mit einem Abstand kleiner δ von ε_3 . Die auf $\overline{T_2 T_3}$ folgende Sehne $\overline{T_3 T_4}$ gehört daher zu jedem Körper B ; eine Fortsetzung des Sehnenzuges $\overline{U_2 T_2}$, $\overline{T_2 T_3}$, ... durch die an T_3 gespiegelte Sehne $\overline{T_3 T_4}$ hätte wegen der Bestimmtheit von $\varepsilon_3 \cdot A$ eine Unstetigkeit von B zur Folge. Entsprechendes gilt für die auf $\overline{T_3 T_4}$ folgenden Sehnen. Entweder schließt sich der Sehnenzug $\overline{U_2 T_2}$, $\overline{T_2 T_3}$, ... zu einem Parallelogramm oder es liegt wegen des benachbarten E -Bereichs $\varepsilon_3 \cdot A$ und der Stetigkeit der Begrenzungsflächen der Körper B

ein 4-periodischer und bei geeignet gewähltem Abstand der Ebene ε_2 von ε_1 sogar unendlicher Sehnenzug vor, dessen notwendig vierseitiger Grenzsehnenzug ein Parallelogramm mit den Seitenrichtungen $s', s^{(4)}$ ist (vgl. dazu 2.2.2.). Da $\varepsilon_4 \cdot A$ ein E -Bereich ist, sind sämtliche $\varepsilon_4 \cdot A$ einbeschriebene Sehnenzüge mit abwechselnd zu s' und $s^{(4)}$ parallelen Sehnen Parallelegramme und $\varepsilon_4 \cdot A$ ist mit Satz 9 durch A' und $A^{(4)}$ bestimmt. Ausgehend von $\varepsilon_4 \cdot A$ folgt dasselbe für jeden hinreichend benachbarten Parallelschnitt $\varepsilon_5 \cdot A$, falls dieser mit $\varepsilon_1 \cdot A$ und $\varepsilon_2 \cdot A$ von Nullsehnen verschiedene Sehnen gemeinsam hat. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kann sie durch Verkleinerung des Abstandes der Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ erzwungen werden. Damit ist jedoch der Eikörper A durch A' und $A^{(4)}$ bestimmt, denn A'' und A''' sind entbehrlich.

Am Beispiel der Zylinder über zwei regulären n -Ecken, die einem Kreis einbeschrieben und um den Winkel $\frac{\pi}{n}$ gegeneinander

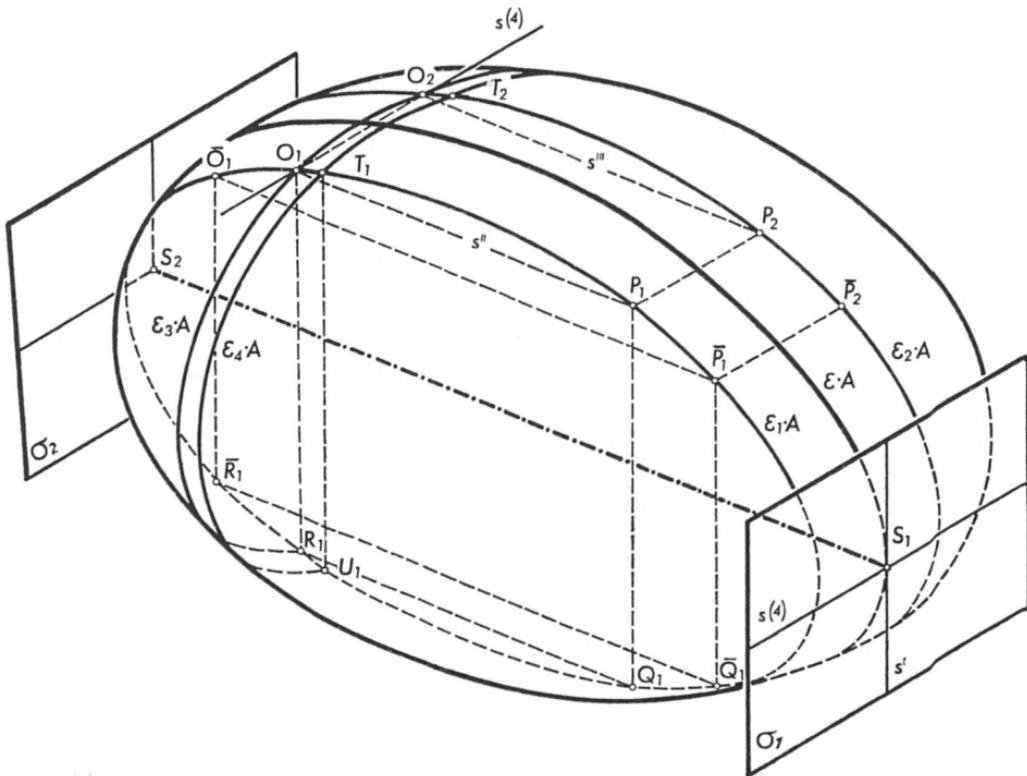


Abb. 10

verdreht sind, erkennt man wie im ebenen Fall, daß selbst $n \geq 2$ beliebige Symmetrisierungen einen Eikörper A i. a. nicht bestimmen. Die Zylinder haben längs den Seiten des von den Ecken ihrer Basis- n -Ecke gebildeten regulären $2n$ -Ecks dieselben Symmetrisierungen $A', \dots, A^{(n)}$.

Zusammenfassend gilt somit

Satz 11: *Zur Bestimmung eines Eikörpers A sind mindestens zwei, jedoch höchstens vier Symmetrisierungen $A', \dots, A^{(4)}$ notwendig. Dabei sind – zur Bestimmung einer Serie ebener Parallelschnitte – die Symmetrisierungsrichtungen von A', A'', A''' bis auf höchstens abzählbar viele Ausnahmerichtungen wählbar wie bei Eibereichen, speziell die Symmetrisierungsrichtung von A'' in einem Winkel $\alpha(A') > 0$. Die Symmetrisierungsrichtung von $A^{(4)}$ schließt mit den Parallelschnittebenen einen hinreichend kleinen Winkel ein. Für $\alpha(A') = 0$ ist A bereits durch zwei Symmetrisierungen bestimmt. Beliebige viele beliebig gewählte Symmetrisierungen bestimmen A i. a. nicht.*

5. Eine Kennzeichnung der Ellipsoide

Wir betrachten im Anschluß an 4.2. jene Eikörper, deren sämtliche ebenen Schnitte E -Bereiche sind. Für diese Eikörper ergab sich (Abb. 10): Sind s' und $s^{(4)}$ zwei konjugierte Richtungen eines E -Bereichs, so sind sie für jeden seiner Parallelschnitte konjugiert. Insbesondere lassen sich daher die zu s' konjugierten Richtungen s'' und s''' durch die Richtung des Durchmessers $\overline{S_1 S_2}$, ersetzen, die überdies zu jeder zu σ_1 parallelen Richtung konjugiert ist.

Dem E -Bereich $\varepsilon_1 \cdot A$ sei nun ein Parallelogramm $\overline{O_1 P_1 Q_1 R_1}$ aus s' - und s'' -Sehnen einbeschrieben. Weiter seien $\overline{O_1 O_2}, \overline{P_1 P_2}, \overline{Q_1 Q_2}, \overline{R_1 R_2}$ zu s' konjugierte Sehnen der Richtung $s^{(4)}$. Da O_1, O_2, P_1, P_2 in der Ebene eines E -Bereichs liegen, ist das Viereck $O_1 O_2 P_1 P_2$ ein Parallelogramm; ebenso sind $P_1 P_2 Q_1 Q_2$ und $O_1 O_2 R_1 R_2$ Parallelogramme. Das Vielfach $O_1 O_2 P_1 P_2 Q_1 Q_2 R_1 R_2$

ist somit ein Parallelfach. Also gilt: Sind $S_1S_2, s', s^{(4)}$ drei paarweise konjugierte Richtungen des Eikörpers A , so läßt sich A ausgehend von einem Randpunkt O_1 ein Parallelfach mit den Seitenrichtungen $S_1S_2, s', s^{(4)}$ einbeschreiben.

Nun sei $\bar{O}_1\bar{P}_1\bar{Q}_1\bar{R}_1$ ein von $O_1P_1Q_1R_1$ verschiedenes Parallelogramm des E -Bereichs $\varepsilon_1 \cdot A$ mit den Seitenrichtungen s', s'' . Da $s', s'', s^{(4)}$ paarweise konjugiert sind und $P_1\bar{P}_1$ in einer zu s' und s'' parallelen Ebene liegt, ist P_1P_2 auch zu $P_1\bar{P}_1$ konjugiert. Die vierte Ecke \bar{P}_2 des von P_1, P_2, \bar{P}_1 bestimmten Parallelogramms liegt daher auf dem Rand des E -Bereichs $\varepsilon_2 \cdot A$, und $\varepsilon_2 \cdot A$ geht somit aus $\varepsilon_1 \cdot A$ durch Schiebung längs des Vektors $P_1\bar{P}_2$ hervor.

Zwei parallele Strecken können nicht Randstrecken eines E -Bereichs sein, da diese zu jeder Diagonale des von ihnen gebildeten Trapezes konjugiert sind, jedoch kein einbeschriebenes Parallelogramm existiert, das eine Diagonale und eine dieser Strecken als Seiten besitzt. Daher können auf dem Eikörper A nicht zwei Mantellinien des $\varepsilon_1 \cdot A$ und $\varepsilon_2 \cdot A$ verbindenden Zylinders liegen, denn diese bestimmen einen ebenen Schnittbereich von A , der keinen E -Bereich ausschneidet, entgegen der Voraussetzung. Durch mindestens einen der beiden Stützpunkte S_1, S_2 – etwa S_1 – geht daher keine $s^{(4)}$ -Randsehne von A . Ist $\varepsilon \cdot A$ der durch S_1 gehende Parallelschnitt zu $\varepsilon_1 \cdot A$, so gehen, wenn ε_1 gegen ε verschoben wird, die Sehnen P_1P_2 in Randpunkte des ebenen Parallelschnitts $\varepsilon \cdot A$ über. Durch diese laufen jedoch $s^{(4)}$ -Randgeraden und $\varepsilon \cdot A$ ist daher ebene Eigenschattengrenze für die Lichtrichtung $s^{(4)}$. Da $s^{(4)}$ beliebig vorgegeben werden kann, ist A ein Eikörper mit nur ebenen Eigenschattengrenzen und als solcher bei Beachtung der E -Bereichseigenschaft seiner ebenen Schnitte mit W. Blaschke [1] S. 157 ein Ellipsoid. Somit gilt

Satz 12: *Gibt es in jeder Schnittebene eines Eikörpers zu jeder Richtung s' eine Richtung s'' derart, daß alle dem Schnittbereich einbeschriebenen Sehnenzüge mit abwechselnd zu s' und s'' parallelen Sehnen Parallelogramme sind, so ist der Eikörper ein Ellipsoid.*

Sind in Satz 12 die konjugierten Richtungen s' und s'' stets orthogonal, so ist der Eikörper, wie man sofort erkennt, eine Kugel.

Literaturverzeichnis

- [1] Blaschke, W.: Kreis und Kugel, 2. Aufl., Berlin 1956.
- [2] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 4. Aufl., Berlin 1945.
- [3] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie, 1. u. 2. Aufl., Berlin 1923.
- [4] Blaschke, W.: Über affine Geometrie XI: Lösung des „Vierpunktproblems“ von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. Ber. Verh. Sächs. Ges. d. Wiss., Leipzig, Math.-phys. Kl. 69, 436–453 (1917).
- [5] Blaschke, W.: Zur Affingometrie der Eilinen und Eiflächen. Math. Nachr. 15, 258–264 (1956).
- [6] Blaschke, W.: Aufgaben der Differentialgeometrie im Großen. Sitz.-Ber. Berliner Math. Ges., XV. Jhrg., 62–69 (1915).
- [7] Bonnesen, T., und Fenchel, W.: Theorie der konvexen Körper, Erg. d. Math. und ihrer Grenzgeb., Bd. 3, Berlin 1934.
- [8] Brunn, H.: Über Kurven ohne Wendepunkte, Habilitationsschrift (München 1889).
- [9] Giering, O.: Ausfüllung von Eilinen durch einbeschriebene gleichseitige und gleichwinklige n -Ecke. Elem. Math. 16, 78–81 (1961).
- [10] Hadwiger, H.: Altes und Neues über konvexe Körper, Basel und Stuttgart 1955.
- [11] Hadwiger, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.
- [12] Jaglom, I. M., und Boltjanski, W. G.: Konvexe Figuren, Berlin 1956.
- [13] Lenz, H.: Die Eilinen mit einer Schar konjugierter Durchmesserpaare. Arch. Math. 9, 134–139 (1958).
- [14] Pólya, G., und Szegő, G.: Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Princeton: University Press (Annals of Math. Studies 27) 1951.
- [15] Radon, J.: Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven, Ber. Verh. Sächs. Ges. d. Wiss., Leipzig, Math.-phys. Kl. 68, 123–128 (1916).
- [16] Steiner, J.: Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze. J. reine angew. Math. 18, 289–296 (1838) = Ges. Werke, Bd. 2, 75–91 (1882).
- [17] Steiner, J.: Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt. J. Math. pures appl. 6, 105–170 (1842); J. reine angew. Math. 24, 93–152, 189–250 (1842) = Ges. Werke, Bd. 2, 177–308 (1882).