BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1962

MÜNCHEN 1963

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Geometrie in topologisch ebenen hyperbolischen Ebenen

Von Otto Haupt in Erlangen

Vorgelegt am 7. Dezember 1962

1. In einer vorangegangenen Mitteilung [1][1] waren Bogen und Kurven, insbesondere solche von zweiter und dritter Ordnung, in topologisch ebenen projektiven Ebenen betrachtet worden. Unter „Ordnung" war dabei verstanden der Punktordnungswert bezüglich eines Systems $\mathfrak{k}$ von „verallgemeinerten Geraden", die als Ordnungscharakteristiken, abgekürzt OCh, bezeichnet wurden. Diese OCh waren einfache (nicht nullisotope) Kurven in der projektiven Ebene P_0 (oder in einem topologischen Bild von ihr) und besaßen (vgl. [1], Nr. 1. 2.) die folgenden Eigenschaften: (I) Je zwei Punkte $p', p'' \in P_0$ liegen auf genau einer OCh, der „Verbindung" von p' und p''. – (II) Je zwei OCh haben (sofern sie verschieden sind) *genau* einen Punkt gemeinsam (Dieser Punkt ist Schnittpunkt der beiden OCh). – (III) Verbindung und Schnittpunkt ändern sich stetig mit den beiden Punkten bzw. den beiden OCh.

2. Eine Punktmenge $M \subset P_2$ hieß $\mathfrak{k}$-beschränkt (vgl. [1], Nr. 2. 1. 1.), wenn ein $K_0 \in \mathfrak{k}$ existiert mit $\bar{M} \frown K_0 = \theta$.

Ein $\mathfrak{k}$-beschränktes $\bar{M}$ ist enthalten im Inneren eines $\mathfrak{k}$-konvexen (also $\mathfrak{k}$-beschränkten) (vgl. [1], Nr. 2. 2.), abgeschlossenen $\mathfrak{k}$-Vierecks $V = \bar{V} = V(M)$. Dabei ist V der Durchschnitt von vier abgeschlossenen $\mathfrak{k}$-Halbebenen (vgl. [1], Nr. 2. 1. 1.); und der Rand $V_g = V - \underline{V}$ von V ist Vereinigung von Teilbogen aus je einer OCh K_i, $i = 1, \ldots, 4$, wobei etwa $K_1 \frown K_2 \subset K_0$ und $K_3 \frown K_4 \subset K_0$ ist.

Eine Analyse der Überlegungen, welche zu den in [1] (Nr. 2. 2.–2. 2. 3. 1., Nr. 3. 1. – 3. 3. 2. sowie Nr. 4. 1. – 4. 4.) angegebenen Sätzen über $\mathfrak{k}$-beschränkte Mengen, Bogen und Kurven führten,

---

[1] Es verweist [1] auf das Literaturverzeichnis.

ergibt nun: Neben den Eigenschaften (I) und (III) (vgl. oben) Ziff. 1.) wird die Eigenschaft (II) nur in folgender abgeschwächter Fassung benutzt: (II′) Die OCh haben paarweise *höchstens* einen Punkt gemeinsam.

Genauer ausgedrückt: Ist $\bar{M}$ die zu betrachtende Menge, die $\mathfrak{k}$-beschränkt ist, etwa mit $\bar{M} \frown K_0 = 0$, so sei (vgl. oben) $V = V(M) = \bar{V}$ ein $\mathfrak{k}$-konvexes $\mathfrak{k}$-Viereck mit $\bar{M} \subset \underline{V}$. Für jedes $K \in \mathfrak{k}$, falls $\underline{V} \frown K \neq 0$, ist dann $K_V = V \frown K$ ein einfacher, abgeschlossener Bogen, dessen Durchschnitt mit dem Rand V_g von V aus genau den beiden Endpunkten von K_V besteht. Das System dieser K_V sei mit $\mathfrak{k}_V$ oder mit $V \frown \mathfrak{k}$ bezeichnet und die K_V seien in V als Ordnungscharakteristiken, abgekürzt OCh, eingeführt. Diese OCh K_V genügen nun den Forderungen (I) und (III) in Ziff. 1., wenn darin P_2 durch V und wenn $\mathfrak{k}$ durch $\mathfrak{k}_V$ ersetzt wird; und entsprechend ist (II′) in Ziff. 2. auf $\mathfrak{k}_V$ zu beziehen.

3. Es ist V homöomorph zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe H (in der euklidischen Ebene); und bei einer Homöomorphie bleiben die Eigenschaften (I), (II′) und (III) von $\mathfrak{k}_V$ invariant, d. h. $\mathfrak{k}_V$ geht in ein System $\mathfrak{k}_H$ mit eben diesen Eigenschaften über. Beispiel eines solchen Systems $\mathfrak{k}_H$ ist nun das System der in H liegenden Kreisbogen, deren jeder orthogonal zum Rand H_g von H ist. Mit anderen Worten: Das System der „Geraden" im bekannten (Poincaréschen) Modell der hyperbolischen (nichteuklidischen) ebenen Geometrie ist Spezialfall eines Systems $\mathfrak{k}_H$ in H. In Analogie zur Bezeichnung „topologisch ebene projektive Ebene" möge daher ein Paar $(H; \mathfrak{k}_H)$ als eine topologisch ebene hyperbolische Ebene bezeichnet werden; dabei kann natürlich an Stelle von H auch irgendein topologisches Bild von H treten.

Anmerkung. In Analogie zur Sprechweise in der (gewöhnlichen) hyperbolischen Geometrie können wir die Punkte von H_g bzw. von $\underline{H}$ uneigentliche bzw. eigentliche Punkte von $(H; \mathfrak{k}_H)$ nennen.

Zusammenfassung:

A. Unter einer *topologisch ebenen hyperbolischen Ebene* werde verstanden ein Paar $(H; \mathfrak{k}_H)$, wobei H ein topologisches Bild der abgeschlossenen Kreisscheibe ist und $\mathfrak{k}_H$ ein System von einfachen

Bogen $K \subset H$, den sogenannten *Ordnungscharakteristiken*, abgekürzt *OCh*, deren jeder mit dem Rand H_g von H genau seine beiden Endpunkte gemeinsam hat. Die OCh genügen dabei den folgenden Axiomen:

(I_H) Je zwei verschiedene Punkte von H liegen auf genau einer OCh, ihrer „Verbindung";

(II_H) Je zwei verschiedene OCh haben höchstens einen Punkt gemeinsam;

(III_H) Die Verbindung in (I_H) ist stetige Funktion der beiden Punkte.

Ebenso ist der gemeinsame Punkt zweier OCh, falls er (existiert und) nicht uneigentlich ist (d. h. nicht in H_g liegt) stetige Funktion der beiden OCh.

B. *In den topologisch ebenen hyperbolischen Ebenen gelten unter anderem für die Bogen und Kurven vom schwachen Ordnungswert Zwei sowie für die Bogen vom Punktordnungswert Drei (die beschränkt sind) die gleichen Sätze wie in den topologischen ebenen projektiven Ebenen.*

4. Zur Behauptung B. in vorstehender Ziffer 3. sei noch folgende Erläuterung gegeben:

Zu [1], Nr. 2. 1. 1. Der Begriff „Seite" von K in H bzw. von $K \in \mathfrak{k}_H$ begrenzte „$\mathfrak{k}$-Halbebene" ist unmittelbar aus der in [1], Nr. 2. 1. 1., angegebenen, auf $(P_2; \mathfrak{k})$ bezüglichen Definition zu entnehmen. Die Seiten von K in H ändern sich stetig mit K.

Zu [1], Nr. 2. 1. 2. Es ist $\mathfrak{k}_H$ lokal kompakt (im Raum $\mathfrak{a}_H$ der kompakten Teilmengen von H). – In der Tat: Es sei $K \in \mathfrak{k}_H$ und es seien $a, b \in H_g$ die Endpunkte von K, wobei $a \neq b$. Ist A bzw. B eine Umgebung von a bzw. von b auf H mit $\bar{A} \cap \bar{B} = \theta$, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{n}(K)$ von K in $\mathfrak{a}_H$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes Kontinuum $C^* \in \bar{\mathfrak{n}}(K)$ liegt je ein Punkt in $\bar{A}$ bzw. $\bar{B}$. Es sei nun $((K_n))$ eine Folge von OCh mit $K_n \in \bar{\mathfrak{n}}(K)$; jede solche Folge enthält eine, ebenfalls mit $((K_n))$ zu bezeichnende, Teilfolge, die in $\mathfrak{a}_H$ konvergiert; es sei $L = \lim K_n$. Gemäß der Wahl von $\mathfrak{n}(K)$ ist $L \in \bar{\mathfrak{n}}(K)$ ein Kontinuum, nämlich mehrpunktig, weil $L \cap \bar{A} \neq \theta$ und $L \cap \bar{B} \neq \theta$. Es seien x und y zwei (verschiedene) Punkte aus L. Wegen $L = \lim K_n$ gibt es $x_n, y_n \in K_n$ mit $x = \lim x_n$ und $y = \lim y_n$. Es sei nun K'

diejenige OCh, auf der (gemäß Ziff. 3., (I_H)) x und y liegen. Wegen der Stetigkeit der Verbindung zweier Punkte (vgl. oben, Ziff. 3., (III_H)) liegen die K_n für schließlich alle n in beliebig kleiner Umgebung $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}'(K')$ von K'; es ist also $K' = \lim K_n$ und somit $L = K' \in \mathfrak{k}_H$. Anderes gesagt: Jedes $K \in \mathfrak{k}_H$ besitzt eine Umgebung in $\mathfrak{a}_H$, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist.

Zu [1], Nr. 2. 2. Da in topologisch ebenen projektiven Ebenen die $\mathfrak{k}$-Konvexität lediglich für $\mathfrak{k}$-beschränkte Mengen definiert wurde, gelten die einschlägigen Sätze aus [1] auch in topologisch ebenen hyperbolischen Ebenen.

Literatur

[1] Haupt, Zur Theorie der Kurven insbesondere von 2. und 3. Ordnung in topologisch ebenen projektiven Ebenen. Bayer. Akad. d. Wiss. Sitz.-Ber. Math.-naturw. Kl. Jahrg. 1962, 63–77.