BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1961

MÜNCHEN 1962

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über einige Probleme bei schwachen Komponenten- und Punktordnungswerten

Von **Otto Haupt** in Erlangen

Vorgelegt am 3. Februar 1961

§ 1. Fragestellung. Beispiele

1.1. Nach einem bekannten Blaschkeschen Satz (vgl. [1], §§ 17, 18) gilt:

(a) Hat man eine konvergente[1] Folge konvexer (gleichmäßig beschränkter) Körper in der euklidischen Ebene E_2 [2], so ist der Limes wieder ein konvexer Körper (dabei kann der Limes auch dann eine Strecke oder ein Punkt sein, wenn kein konvexer Körper der Folge eine Strecke bzw. ein Punkt ist).

Aus (a) läßt sich folgern:

(b) Der Limes einer konvergenten Folge von (gleichmäßig beschränkten) Konvexbogen ist wieder ein Konvexbogen, evtl. eine Strecke oder ein Punkt.

1.2. Die beiden Aussagen in Nr. 1.1. lassen sich auch in etwas anderer gleichwertiger Art formulieren. Um dies zunächst für (a) auszuführen erkläre man als *Komponentenordnungswert*, abgekürzt KOW, einer ebenen Punktmenge M bezüglich einer Geraden G die „Anzahl" der Komponenten von $M \cap G$, in Zeichen

---

[1] Unter Konvergenz ist hier die metrische Konvergenz in $\mathfrak{a}$ zu verstehen; gleichbedeutend mit der metrischen ist, wenigstens in (metrischen) kompakten Räumen R, die topologische Konvergenz. In solchen Räumen R enthält jede Folge von abgeschlossenen Mengen eine konvergente Teilfolge (vgl. z. B. [5], Nr. 6. 3. 4.4.). – Mit $\overline{M}$ bzw. $\underline{M}$ wird die abgeschlossene Hülle bzw. der offene Kern von M bezeichnet.

[2] Und allgemein im euklidischen E_n, $n \geq 3$ (vgl. [1]). Darüber hinaus besagt der Blaschkesche Satz, daß jede Folge gleichmäßig beschränkter (abgeschlossener) konvexer Körper eine konvergente Teilfolge (mit konvexem Limes) enthält (vgl. auch Fußnote 1).

KOW ($M \frown G$). Ist KOW ($M \frown G$) unendlich für mindestens ein G bzw. endlich für jedes G, so sagt man, es besitze M bezüglich des Systems $\mathfrak{k}$ der Geraden in E_2 unendlichen bzw. endlichen Komponentenordnungswert KOW (M; $\mathfrak{k}$). Besitzen die KOW ($M \frown G$) eine natürliche Zahl m als Maximum, so heiße m der (beschränkte) Komponentenordnungswert von M bezüglich $\mathfrak{k}$, in Zeichen KOW (M; $\mathfrak{k}$) $= m$. Die Geraden heißen hierbei die Ordnungscharakteristiken.

1.2.1. Die konvexen Körper sind nun, soweit sie abgeschlossen sind, in der Ebene E_2 gekennzeichnet als die Kontinua vom KOW 1 bezüglich $\mathfrak{k}$. Wir können daher sagen: (a′) Für den Limes C einer konvergenten Folge von Kontinuen C_r mit KOW (C_r; $\mathfrak{k}$) $= 1$ gilt ebenfalls KOW (C; $\mathfrak{k}$) $= 1$. (Es ist C ein Kontinuum, falls die einpunktigen Mengen zu den Kontinuen gerechnet werden.)

Anmerkung. Im euklidischen E_n, $n \geq 3$, besitzt jeder konvexe Körper den Komponentenordnungswert 1, wobei (entsprechend wie bei $n = 2$) als Ordnungscharakteristiken die Hyperebenen zugrunde gelegt werden. Aber die konvexen Körper sind (für $n \geq 3$) nicht mehr die einzigen Kontinua dieses Komponentenordnungswertes. Beispiel im E_3: Diejenige Punktmenge, welche aus einer Vollkugel durch Wegnahme einer Kugelkappe und deren Spiegelbild erhalten wird.

1.3. Zwecks einer entsprechenden Formulierung der Aussage (b) in Nr. 1.1. ist eine weitere Bemerkung erforderlich, die übrigens auch bei der später zu besprechenden Verallgemeinerung von (a′) (Nr. 1.2.1.) benötigt wird. Zunächst sprechen wir vom *Punkt*ordnungswert POW ($M \frown G$), wenn alle Komponenten von $M \frown G$ einpunktig sind und bezeichnen mit POW ($M \frown G$) die Anzahl der Punkte von $M \frown G$. Entsprechend wie oben KOW (M; $\mathfrak{k}$) wird dann POW (M; $\mathfrak{k}$) erklärt. Die Konvexbogen in E_2 sind nun gekennzeichnet als die Kontinua vom POW 2, vorausgesetzt, daß der Bogen keine Strecken (als Teilbogen) enthält. Läßt man aber, wie das im Sinne von (b) in Nr. 1.1. liegt, auch Strecken als Konvexbogen bzw. als Teilbogen von Konvexbogen B zu, so ist $B \frown G$ für gewisse (Ausnahme-)Geraden G eine

Strecke, also POW ($B \frown G$) unendlich. Indes bildet die Gesamtheit solcher Geraden eine in $\mathfrak{k}$ nirgends dichte *(Ausnahme-) Menge* $\mathfrak{n}$. Es ist dabei POW (B; $\mathfrak{k} - \mathfrak{w}$) $= 2$. Wir sagen dafür auch: Die Konvexbogen B sind – abgesehen von den Strecken – die Kontinua von einem schwachen Punktordnungswert zwei, abgekürzt schwPOW (B; $\mathfrak{k}$) $= 2$. Da die Strecken und die einzelnen Punkte mit den Kontiuen von einem schwPOW 1 bzw. 0 zusammenfallen, können wir (b) in Nr. 1.1. so aussprechen: (b′) Für den Limes B einer konvergenten Folge von Kontinuen B_ϱ mit schwPOW (B_ϱ; $\mathfrak{k}$) $\leqq 2$ gilt schwPOW (B; $\mathfrak{k}$) ≤ 2.

1.4. Die Bemerkung in Nr. 1.3. führt zur folgenden Verallgemeinerung von (a′) in Nr. 1.2.1. und (b′) in Nr. 1.3.: Eine konvergente Folge von (gleichmäßig beschränkten) Kontinuen C_r, für deren jedes schwKOW (C_r; $\mathfrak{k}$) $\leq m$ bzw. schwPOW (C_r; $\mathfrak{k}$) $\leq m$ ist, besitzt einen Limes C, für den ebenfalls schwKOW (C; $\mathfrak{k}$) $\leq m$ bzw. schwPOW (C; $\mathfrak{k}$) $\leq m$ ist (vgl. auch [3]; 144, 146). Dabei ist der (beschränkte) schwKOW (M; $\mathfrak{k}$) bzw. schwPOW (M; $\mathfrak{k}$) wie folgt definiert: Es ist schwKOW (M; $\mathfrak{k}$) bzw. schwPOW (M; $\mathfrak{k}$) die kleinste natürliche Zahl z derart, daß die Menge $\mathfrak{n}(z)$ aller Ordnungscharakteristiken G mit KOW ($M \frown G$) $\geq z + 1$ bzw. mit POW ($M \frown G$) $\geq z + 1$ nirgends dicht ist in k; man schreibt daher statt schwKOW (M; $\mathfrak{k}$) auch staKOW (M; $\mathfrak{k} - \mathfrak{n}$) $= z$ usw.

Anmerkung. (1) In der vorstehend genannten Verallgemeinerung von (a′) für beliebiges m (in schwKOW (C; $\mathfrak{k}$) $\leq m$) tritt der *schwache* Komponentenordnungswert des Limes C auf. Demgegenüber war in (a′) selbst nur vom Komponentenordnungswert von C die Rede. Daß die *Verallgemeinerung von* (a′) *nur für* schwache KOW *des C (und der C_r) gilt*, wird durch das Beispiel in Nr. 1.5.2. belegt. Entsprechend gilt die Verallgemeinerung von (b′) nur für schwache Punktordnungswerte, wie schon das Beispiel einer gegen eine Strecke konvergierenden Folge von streckenfreien Konvexbogen zeigt; denn die Strecke hat zwar den schwachen POW 1, hingegen den POW unendlich.

(2) In (a′) und (b′) sowie in ihren oben genannten Verallgemeinerungen werden die schwKOW (C_r; $\mathfrak{k}$) bzw. schwPOW (C_r; $\mathfrak{k}$) als (gleichmäßig) beschränkt angenommen. A fortiori ist dann

der Limes inferior *der* schwKOW (C_r; $\mathfrak{k}$) usw. *endlich.* Wird dies letztere nicht vorausgesetzt, so sind die Limessätze *nicht richtig*, wie das folgende Beispiel zeigt: Es seien x, y rechtwinklige kartesische Koordinaten in der Ebene. Als Ordnungscharakteristiken werden die Geraden zugrunde gelegt. Es sei C_r die Vereinigung der $r+2$ Strecken $J = (0 \leq x \leq 1;\ y = 0)$, $J_0 = (x = 0;\ 0 \leq y \leq 1)$ und $J_\varrho = (x = \varrho^{-1};\ 0 \leq y \leq 1)$, $\varrho = 1, \ldots, r$. Es existiert $C = \lim C_r = J \cup J_0 \cup \bigcup_{\varrho=1}^{\infty} J_\varrho$. Es sind C und C_r Kontinua. Weiter ist KOW (C_r; $\mathfrak{k}$) $= r+1$, wenn $\mathfrak{k}$ das System aller Geraden bezeichnet, so daß lim inf schwKOW (C_ϱ; $\mathfrak{k}$) $= \infty$ ist. Hingegen enthält die Menge $\mathfrak{m}$ aller Geraden G mit KOW ($C \cap G$) $= \infty$ eine nicht leere, in $\mathfrak{k}$ offene Menge, so daß $\mathfrak{m}$ nicht nirgends dicht in $\mathfrak{k}$ ist und daher kein beschränkter oder endlicher schwacher Komponentenordnungswert von C existiert. – Ersetzt man die J, J_0, J_ϱ durch hinreichend benachbarte paarweise bis auf höchstens Endpunkte fremde, streckenfreie Konvexbogen, so läßt sich erreichen, daß $C_r \cap G$ und $C \cap G$ diskontinuierlich ist für jedes $G \in \mathfrak{k}$ und daß POW (C_r; $\mathfrak{k}$) beschränkt ist für jedes r; dabei ist lim inf schwPOW (C_r; $\mathfrak{k}$) $= \infty$, während die Menge der Geraden H mit POW ($C \cap H$) $= \infty$ nicht nirgends dicht ist. – Die Limessätze gelten somit für keines dieser $C = \lim C_r$.

(3) Weitere hierher gehörige Bemerkungen finden sich in [2]. Insbesondere wird dort (Nr. 3.4.) durch ein Beispiel gezeigt, daß der Limessatz für schwachen *Punkt*ordnungswert schon im E_2 nicht mehr gilt, wenn man als System $\mathfrak{k}$ der Ordnungscharakteristiken ein *Büschel* von Hyperebenen (d. h. im E_2 von Geraden) zugrunde legt und *nicht* mehr das System *aller* Hyperebenen. Übrigens ist für ein solches Büschel die für das System $\mathfrak{k}$ der Ordnungscharakteristiken beim Limessatz in Nr. 2.5. geforderte Trennbarkeitseigenschaft III (1) (aus Nr. 2.1.) nicht mehr erfüllt.

1.4.1. Bisher handelte es sich ausschließlich um Folgen von (gleichmäßig beschränkten) Kontinuen in der euklidischen Ebene E_2; allgemeiner gilt der Satz in Nr. 1.4. im euklidischen E_n, $n \geq 2$, wobei dann als Ordnungscharakteristiken die Hyperebenen im E_n gewählt werden und $\mathfrak{k}$ das System der Hyperebenen ist. Angesichts einer früher [4] angegebenen Verallgemeinerung anderer ordnungsgeometrischer Sachverhalte erhebt sich die Frage: Inwieweit gelten die in Rede stehenden Konvergenzsätze (in Nr. 1.4.) in allgemeineren metrischen Räumen, speziell etwa auch im projektiven P_n?

Es zeigt sich nun, daß die Konvergenzsätze in der Tat auch in kompakten metrischen Räumen R gültig bleiben, sofern nur die in Betracht zu ziehenden Ordnungscharakteristiken kompakte Mengen K sind und folgende Eigenschaften besitzen: Es wird R (analog wie in [4] Nr. 2.1.1.) durch jedes K in zwei fremde offene Mengen zerlegt, die sich mit K stetig ändern; ferner können gewisse Paare von Punkten aus R durch Ordnungscharakteristiken getrennt werden.

Die genauere Formulierung der eben angedeuteten Eigenschaften sowie der zugehörigen Limessätze nebst einigen anderen Bemerkungen wird in § 2 vorliegender Note angegeben, wenigstens soweit, als es sich um eine Verallgemeinerung für den Fall des euklidischen E_n handelt.[3] Die Beweise werden voraussichtlich in der mathematischen Zeitschrift erscheinen, wobei dann auch auf den Fall des projektiven P_n, oder vielmehr auf dessen Verallgemeinerung eingegangen werden soll.

1.5. Die Begriffe „schwacher“ Komponenten- und Punktordnungswert sollen noch an einigen Beispielen erläutert und dabei ihre Verwendung gerechtfertigt werden.

1.5.1. Beispiele von ebenen Kontinuen eines beschränkten Punkt- oder Komponentenordnungswertes mit einer endlichen Ausnahmemenge $\mathfrak{n}$.

Es seien x, y rechtwinklige kartesische Koordinaten in E_2. Dann sei $C = C(r)$ die Vereinigung der folgenden $4r+1$ Strecken $S_1, \ldots, S_{4r+1}$, wobei $r \geq 1$: Die $S_1, \ldots, S_{2r}$ haben den Punkt $x=0$, $y=+1$ als gemeinsamen Endpunkt, während ihre anderen Endpunkte e_ϱ auf der x-Achse liegen mit den Abszissen $x_\varrho = -2\varrho$ für $1 \leq \varrho \leq r$ und $x_\varrho = 2(\varrho - r)$ für $r+1 \leq \varrho \leq 2r$. Entsprechend

[3] Beispiele, die unter diese Verallgemeinerung fallen, werden geliefert durch das System der $(n-1)$-dimensionalen Sphären oder andere Systeme von Hyperflächen im E_n.

haben $S_{2r+1}, \ldots, S_{4r}$ den gemeinsamen Endpunkt $x = 0, y = -1$, während die anderen Endpunkte wieder auf der x-Achse liegen mit den Abszissen $x_\varrho = -2(\varrho - 2r) + 1$ für $\varrho = 2r+1, \ldots, 3r$ bzw. $x_\varrho = 2(\varrho - 3r) - 1$ für $\varrho = 3r+1, \ldots, 4r$. Schließlich liegt S_{4r+1} auf der y-Achse und hat die Endpunkte $x = 0$, $y = \pm 1$.

Die $S_1, \ldots, S_{2r}$ liegen also sämtlich „oberhalb" der x-Achse und die $S_{2r+1}, \ldots, S_{4r}$ sämtlich „unterhalb"; und nur S_{4r+1} schneidet die x-Achse.

Es hat nun $C(r)$ die folgenden Eigenschaften: Jede, von der x-Achse verschiedene Gerade J, auf der keine der Strecken $S_1, \ldots, S_{4r+1}$ liegt, hat mit $C(r)$ höchstens $2r+2$ Punkte gemeinsam.

In der Tat: Trifft J die auf der x-Achse gelegene, abgeschlossene, von $-2r$ und $+2r$ begrenzte Strecke S_0 nicht, so ist die Beh. richtig. Andernfalls sei $x = J \frown S_0$; es gilt etwa $x_\varrho \leq x$ für m' der x_ϱ mit $\varrho = 0 \pmod 2$ und für m'' der x_ϱ mit $\varrho = 1 \pmod 2$. Man hat $m'' = m' + d$ mit $-1 \leq d \leq +1$. Ist nun $J \frown S_{4r+1} = \theta$, so gilt entweder $x < 0$, also $\mathrm{Max}(m', m'') \leq r$, oder $x > 0$, also $2r \leq \mathrm{Min}(m', m'')$. Es enthält dann $C(r) \frown J$ entweder $m' + m'' = 2m' + d \leq 2r + 1$ Punkte oder $(2r - m') + (2r - m'') = 4r - (2m' + d) \leq 2r + 1$ Punkte. Ist aber $J \frown S_{4r+1} \neq \theta$, so enthält $C(r) \frown J$, je nach der Lage von J gegenüber der x-Achse, $m' + 2r - m'' + 1 \leq 2r + 2$ oder $m'' + 2r - m' + 1 \leq 2r + 2$ Punkte und die Menge der Geraden J mit $\mathrm{POW}(C(r) \frown J) = 2r + 2$ enthält eine (nicht leere) offene Menge.

Somit ist $\mathrm{KOW}(C(r); \mathfrak{k}) = 4r+1$, aber $\mathrm{schwKOW}(C(r); \mathfrak{k}) = \mathrm{KOW}(C(r); \mathfrak{k} - \mathfrak{n}) = 2r+2$, wobei $\mathfrak{n}$ die aus der x-Achse bestehende (in $\mathfrak{k}$ nirgends dichte) Ausnahmemenge bezeichnet. Wir haben also hier $\mathrm{schwKOW}(C(r); \mathfrak{k}) < \mathrm{KOW}(C(r); \mathfrak{k})$. Hingegen ist $\mathrm{schwPOW}(C(r); \mathfrak{k}) = 2r+2 = \mathrm{POW}(C(r); \mathfrak{k} - \mathfrak{n}')$, wenn $\mathfrak{n}'$ die aus der x-Achse und den $4r+1$ Trägergeraden der $S_1, \ldots, S_{4r+1}$ gebildete Ausnahmemenge bedeutet. ($\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{n}'$ ist die jeweils kleinstmögliche Ausnahmemenge.)

1.5.2. Schneidet man von den $S_1, \ldots, S_{2r}$ alle Punkte weg, die unterhalb der Parallelen $y = n^{-1}$ zur x-Achse liegen, so erhält man ein Kontiuum C_n mit $\mathrm{KOW}(C_n; \mathfrak{k}) = 2r+2$. Da $C(r) = \lim C_n$ für $n \to \infty$ ist, haben wir $\mathrm{KOW}(C(r); \mathfrak{k}) > \mathrm{KOW}(C_n; \mathfrak{k})$. Daraus ist zu entnehmen, daß der in Nr. 1.4. für ebene Kontinua und *schwachen* Komponentenordnungswert ausgesprochene Konvergenzsatz für den Fall des bloßen Komponentenordnungswertes nicht (allgemein) richtig ist. Die Heranziehung des schwachen KOW für den Limessatz ist damit als notwendig gerechtfertigt.

Zusatz. (I) Es gibt Kontinua $C'(r)$, die zu $C(r)$ beliebig benachbart sind und für welche *kein* schwacher *Punkt*ordnungswert schwPOW $(C'(r);\mathfrak{k})$ endlich ist, während für die *Komponenten*ordnungswerte gilt: KOW$(C'(r);\mathfrak{k})=4r+1$ und KOW$(C'(r);\mathfrak{k}-\mathfrak{n})=$ $=2r+2$. (Es besteht $\mathfrak{n}$ aus der x-Achse als einziger Ausnahmegeraden). – Man erhält ein solches $C'(r)$, indem man jedes S_ϱ durch eine (abgeschlossene) Rhombusfläche R_ϱ ersetzt, deren eine Diagonale S_ϱ ist, während die andere Diagonale hinreichend klein und jedenfalls so gewählt wird, daß die R_ϱ paarweise höchstens einen der Punkte $(x=0,\ y=\pm 1)$ gemeinsam haben.

(II) Es gibt Kontinua $C''(r)$, die zu $C(r)$ beliebig benachbart sind und bei welchen $C''(r)\frown G$ endlich ist für jede Gerade G, während im übrigen wieder POW$(C''(r);\mathfrak{k})=4r+1$ und POW$(C''(r);\mathfrak{k}-\mathfrak{n})=2r+2$ gilt. (Es besteht $\mathfrak{n}$ aus der x-Achse als der einzigen Ausnahmegeraden.) – Man erhält $C''(r)$ aus $C(r)$, indem man jedes S_ϱ durch einen im hinreichend kleinen R_ϱ (vgl. Zusatz (I)) enthaltenen Konvexbogen ersetzt, welcher die gleichen Endpunkte besitzt wie S_ϱ und welcher keine Strecken enthält.

1.5.3. Bei hinreichend großem r lassen sich durch die nachstehend beschriebene Fortsetzung der Konstruktion in Nr. 1.5.1. Kontinua C mit beschränktem schwKOW$(C;\mathfrak{k})=$ KOW$(C;\mathfrak{k}-\mathfrak{n}^*)$ gewinnen, für welche die kleinste Ausnahmemenge $\mathfrak{n}^*$ aus einer beliebig vorgegebenen endlichen Anzahl von Geraden besteht.

In der Tat: Es sei $C_1=C(r_1)$ gemäß Nr. 1.5.1. konstruiert; es sei die x-Achse mit G_1 bezeichnet und $m_1=2r_1+2$ gesetzt. Man betrachte sodann eine Gerade G_2 mit POW$(C_1\frown G_2)=m_1$, für welche überdies jeder Punkt von $C_1\frown G_2$ Schnittpunkt ist. Es sei T diejenige kleinste (abgeschlossene) Strecke auf G_2, in welcher alle Punkte von $C_1\frown G_2$ enthalten sind, und M ein Punkt von G_2-T „unterhalb" G_1, ferner A derjenige Endpunkt von T, welcher von M nicht durch T auf G_2 getrennt wird. Mit G_2 als neuer x-Achse und M als neuem Nullpunkt auf ihr konstruiere man gemäß Nr. 1.5.1. ein zu G_1 fremdes $C_2'=C(r_2)$, für welches

$A = e_{r_2}$ (vgl. Nr. 1.5.1.) wird (bei passender Orientierung der Achse G_2). Die aus G_1 und G_2 gebildete Geradenmenge sei $\mathfrak{n}_2$. Es ist dann $C_2 = C_1 \cup C_2'$ ein Kontinuum mit POW $(C_2 \cap G_2) = m_1 + 4r_2$, während für jede nicht zu $\mathfrak{n}_2$ gehörige Gerade H gilt KOW $(C_2 \cap H) \leq m_1 + m_2' = m_2$, wobei $m_2' = 2r_2 + 2$ ist. Damit $\mathfrak{n}_2$ (kleinste) Ausnahmemenge für den schwachen Komponentenordnungswert m von C_2 wird, wobei $m \leq m_2$ ist, genügt es, daß $m_2 < m_1 + 4r_2$ und $m_2 < 4r_1 + 1$ ist. Die erste Ungleichung ist gleichbedeutend mit $1 < r_2$ und die zweite wird bei gegebenem r_2 durch hinreichend großes r_1 erfüllt.

Setzt man die Konstruktion mit einem r_3 fort, so gelangt man, wenn $m_3' = 2r_3 + 2$ gesetzt wird, entsprechend zu Ungleichungen $m_3 = m_2 + m_3' < m_2 + 4r_3$ sowie $m_3 < m_1 + 4r_2$ und $m_3 < 4r_1 + 1$. Die erste Ungleichung ist wieder gleichwertig mit $1 < r_3$ und die beiden übrigen sind bei gegebenem r_3 für hinreichend großes r_2 und sodann hinreichend großes r_1 erfüllt.

Die weitere Fortsetzung ergibt für hinreichend große r_τ, $\tau = 1, \ldots, t$, ein Kontinuum C_t mit beschränktem KOW $(C_t; \mathfrak{k} - \mathfrak{n}_t)$, wobei die Ausnahmemenge $\mathfrak{n}_t$ aus einer vorgegebenen Anzahl von Geraden besteht.

1.6. In Nr. 1.5.3. waren ebene Kontinua C von beschränktem KOW $(C; \mathfrak{k} - \mathfrak{n})$ konstruiert worden, wobei die (kleinste) Ausnahmemenge $\mathfrak{n}$ endlich war. Demgegenüber sind uns *bisher keine Kontinua von beschränktem schwachem Komponentenordnungswert mit einer kleinsten* unendlichen *Ausnahmemenge bekannt*, auch nicht im E_n, $n \geq 3$, wobei dann die Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken auftreten. Wohl aber lassen sich leicht ebene Kontinua F von beschränktem schwachem Komponentenordnungswert finden mit einer kleinsten unendlichen Ausnahmemenge, wenn man als Ordnungscharakteristiken nicht alle Geraden der Ebene, sondern nur die Geraden eines Büschels $\mathfrak{b}$ zugrunde legt. *Beispiel.* Es seien x, y rechtwinklige kartesische Koordinaten in der Ebene und $\mathfrak{b}$ sei das Büschel der Parallelen zur y-Achse. Weiter sei $J = (a \leq x \leq b;\ y = 0)$, also ein abgeschlossenes Intervall auf der x-Achse. Durch Vereinigung von J mit den beiden „Rechtwinkelhaken" $x = a$, $0 \leq y \leq a$; $a \leq x \leq c$, $y = a$ und $x = b$, $0 \leq y \leq b$; $c \leq x \leq b$, $y = b$, wobei $c = 2^{-1}(a + b)$, erhält man ein Kontinuum D. Dabei ist KOW $(D \frown Y) \leq 2$ für die Parallele Y zur y-Achse durch den Punkt $(x, y = 0)$, wenn $a \leq x < c$ oder $c < x \leq b$; hingegen ist KOW $(D \frown Y) = 3$, wenn $x = c$. Wir setzen nun $a = a_r = 2^{-2r}$, $b = b_r = 2^{-2r+1}$, bezeichnen das zugehörige D mit D_r, $r = 1, 2, \ldots$, und bilden $F = J_0 \smile D_1 \smile D_2 \smile \ldots$, wobei J_0 das auf der x-Achse gelegene, abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten $x = 0$ und $x = 2^{-1}$ ist. Dann ist F ein Kontinuum mit KOW $(F; \mathfrak{b}-\mathfrak{n}) = 2$, wenn $\mathfrak{n}$ die Menge aller $Y_r \in \mathfrak{b}$ mit $x_r = 2^{-1}(a_r + b_r)$ (y beliebig); und es ist $\mathfrak{n}$ die kleinste Ausnahmemenge in $\mathfrak{b}$.

§ 2. Limessätze

2.1. Vom Grundraum R und vom System $\mathfrak{k}$ der Ordnungscharakteristiken K, abgekürzt: OCh, wird folgendes[4] gefordert:

I. Es soll R ein kompakter, metrischer Raum sein. Es soll ferner $\mathfrak{k}$ Teilsystem des kompakten metrischen Raumes $\mathfrak{a}$ der Kompakta von R sein, d. h. der in sich kompakten Teilmengen von R; dabei soll keine Ordnungscharakteristik leer und keine eine Teilmenge einer von ihr verschiedenen Ordnungscharakteristik sein.

II. (1) Durch jede Ordnungscharakteristik wird R gespalten[5], d. h.: Für beliebiges $K \in \mathfrak{k}$ ist $R - K = R(K; +) \smile R(K; -)$ mit offenen fremden $R(K; +)$, $R(K; -)$; diese $R(K; \pm)$ heißen die beiden Seiten von K (in R).

(2) Die beiden Seiten von K ändern sich stetig mit K, d. h.: Für jede hinreichend kleine U_r-Umgebung[6] $V = V(K)$ eines beliebigen $K \in \mathfrak{k}$ gilt

---

[4] Betr. die Axiome I. und II. sowie III. (2) vgl. auch [4], Nr. 2.1.1.

[5] Jede Darstellung einer Menge $M \subset R$ als Vereinigung von m nicht leeren, paarweise fremden, sämtlich in M abgeschlossenen oder sämtlich in M offenen Mengen $S_1, \ldots, S_m$ werde als eine *Spaltung* von M und jedes der S_μ als ein *Stück* von M bezeichnet.

[6] Ist M Teilmenge von R bzw. Element von $\mathfrak{a}$, so bezeichnen wir eine ε-Umgebung von M in R bzw. eine ε-Umgebung von M in $\mathfrak{a}$ als die (ε-)*U_r-Umgebung* bzw. als (ε-)*U_a-Umgebung* von M.

$$(R - R \cap V) \cap R(K'; +) = (R - R \cap V) \cap R(K; +) \neq 0$$

und

$$(R - R \cap V) \cap R(K'; -) = (R - R \cap V) \cap R(K; -) \neq 0$$

für jedes $K' \in \mathfrak{k}$ mit $K' \subset V$ bei passender Wahl von $+$ und $-$ in $R(K'; \pm)$. Ist also $R(K; +)$ festgelegt und damit (gemäß (1)) auch $R(K; -)$, so ist zugleich $R(K'; +)$ und $R(K'; -)$ festgelegt.

III. Trennbarkeit von Punktepaaren durch Ordnungscharakteristiken, d. h.: Es seien $x', x'' \in K \in \mathfrak{k}$ mit $x' \neq x''$ und $y', y'' \in R - K$; ferner sei V eine hinreichend kleine U_r-Umgebung von K. Dann existiert je ein $K' \in \mathfrak{k}$ mit $K' \subset V$ derart, daß auf verschiedenen Seiten von K' liegen (**1**) x' und x'' bzw. (**2**) x' und y' bzw. (**3**) x' und y' sowie gleichzeitig x'' und y''.

2.2. Man erklärt (wie in Nr. 1.4.) als beschränkten schwachen Komponenten- bzw. Punktordnungswert schwKOW $(M; \mathfrak{k})$ bzw. schwPOW $(M; \mathfrak{k})$ der Menge $M \subset R$ die (als vorhanden vorausgesetzte) kleinste natürliche Zahl z, für welche die Menge $\mathfrak{n}$ der OCh K mit KOW $(M \cap K) \geq z + 1$ bzw. POW $(M \cap K) \geq z + 1$ nirgends dicht ist in $\mathfrak{k}$. (Dabei bezeichnet KOW $(M \cap K)$ die Anzahl der Komponenten von $M \cap K$, während POW $(M \cap K) = a$ besagt, daß alle Komponenten von $M \cap K$ einpunktig sind und ihre Anzahl gleich a ist.) Es ist schwKOW $(M; \mathfrak{k})$ = KOW $(M; \mathfrak{k} - \mathfrak{n})$ = Max (KOW $(M \cap K)$ für $K \in \mathfrak{k} - \mathfrak{n}$) usw.

2.3. Für ein Kontinuum $C \subset R$ mit dem schwachen Komponentenordnungswert $m \geq 1$ sind folgende beiden Aussagen gleichwertig: (a) Der schwache *Punkt*ordnungswert von C ist gleich m; (b) diejenigen $K \in \mathfrak{k}$, für welche $C \cap K$ diskontinuierlich ist, liegen dicht in $\mathfrak{k}$. – Dabei werden die Axiome in Nr. 2.1. mit Ausnahme von III. (3) benutzt; außerdem soll C in keinem $K \in \mathfrak{k}$ enthalten sein.

2.3.1. Für ein Kontinuum $C \subset R$, welches mehrpunktig ist, sind folgende Aussagen gleichwertig:

(a) Die Menge $\mathfrak{c}$ derjenigen $K \in \mathfrak{k}$, für welche $C \cap K$ in mindestens $m \geq 1$ Stücke spaltbar[5] ist, ist dicht in einer (nicht leeren) in $\mathfrak{k}$ offenen Menge $\mathfrak{o}$.

(b) Es existiert eine (nicht leere) offene Menge $\mathfrak{o}' \subset \mathfrak{k}$ derart, daß $C \cap K'$ in (mindestens) m Stücke spaltbar ist für jedes $K' \in \mathfrak{o}'$.

(c) Es existiert ein $K'' \in \mathfrak{k}$ und eine U_a-Umgebung $\mathfrak{o}''$ von K'', zu der es m in R offene Mengen N_μ, $\mu = 1, \ldots, m$, mit $\bar{N}_\mu \cap \bar{N}_\nu = \theta$, $\mu \neq \nu$, gibt, und für jedes μ eine Komponente Q_μ von $C \cap N_\mu$ der folgenden Art: Für jedes $K \in \mathfrak{o}''$ ist $C \cap K = \bigcup_{\mu=1}^{m} C \cap N_\mu \cap K$ eine Spaltung von $C \cap K$ in m Stücke, ferner ist $Q_\mu \cap K \neq \theta$ und es gibt Punkte von Q_μ, welche auf verschiedenen Seiten von K liegen für jedes $\mu = 1, \ldots, m$ (und jedes $K \in \mathfrak{o}''$).

Dabei werden die Axiome in Nr. 2.1. benutzt.

2.4. Limessatz für schwachen Komponentenordnungswert

Vor. *Es seien C_r, $r = 1, 2, \ldots$, Kontinuen in R. Setzt man* $s_r =$ $=$ schwKOW $(C_r; \mathfrak{k})$, *so sei* $m =$ lim inf s_r *mit* $1 \leq m < \infty$.

Beh. *Ist* $C = \lim C_r$, *so gilt* schwKOW $(C; \mathfrak{k}) \leq m$.

Dabei werden die Axiome I.–III. in Nr. 2.1. benutzt.

Anmerkung. Im E_n gilt der Limessatz für schwachen *Komponenten*ordnungswert auch dann, wenn als System der Ordnungscharakteristiken lediglich ein Büschel $\mathfrak{b}$ von Hyperebenen zugrunde gelegt ist. Da $\mathfrak{b}$ dem Axiom III (1) (Nr. 2. 1.) nicht genügt, wird durch den vorstehenden Satz der Limessatz für $\mathfrak{k} = \mathfrak{b}$ nicht miterfaßt. (Vgl. dazu auch Nr. 1.4., Anmerkung (3).)

2.5. Limessatz für schwachen Punktordnungswert

Beim Beweise des nachstehenden Limessatzes, der sich auf den schwachen *Punkt*ordnungswert bezieht, nicht wie der Satz in Nr. 2. 4. auf den schwachen Komponentenordnungswert, wird noch herangezogen das folgende Axiom.

IV. Ist $\mathfrak{o}$ eine (beliebige) offene Teilmenge von $\mathfrak{k}$, ferner M eine (beliebige) Menge in R, so gibt es für jedes $K' \in \mathfrak{o}$ mit $\underline{M} \cap K' \neq \theta$ in beliebig kleiner U_a-Umgebung von K' eine überabzählbare Teilmenge $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{o}$, welche K' enthält und folgende Eigenschaft besitzt: Für beliebige $K_1, K_2 \in \mathfrak{b}$ ist $K_i \cap \underline{M} \neq \theta$, $i = 1, 2$, ferner $K_1 \cap K_2 \cap \bar{M} = \theta$ (wobei $K_1 \neq K_2$); überdies können die

K_i so gewählt werden, daß $K_1 \cap \bar{M}$ und $K_2 \cap \bar{M}$ auf verschiedenen Seiten von K' liegen sowie daß $(K' \cup K_2) \cap \bar{M}$ in $R(K_1; -)$ und $(K' \cup K_1) \cap \bar{M}$ in $R(K_2; +)$ liegt. Es ist $\mathfrak{b}$ in sich kompakt.

Mit Hilfe der Axiome I.–III. in Nr. 2. 1. sowie des vorstehenden Axioms IV. kann man zeigen:[7]

Vor. *Es seien* $C_r = r$, 1, 2, . . ., *Kontinuen in* R. *Setzt man* $s_r =$ schwPOW $(C_r; \mathfrak{k})$, *so sei* $m = \lim\inf s_r$ *mit* $1 \leq m < \infty$.

Beh. *Ist* $C = \lim C_r$, *so gilt* schwPOW $(C; \mathfrak{k}) \leq m$.

Literatur

[1] Blaschke, W., Kreis und Kugel (2. Aufl., Berlin 1956).

[2] Haupt, Vollständigkeitsprobleme bei geometrischen Ordnungen. S.-Ber. math.-naturw. Kl., Bayer. Akad. Wiss. 1941, 57–66.

[3] Haupt, Limessätze bei geometrischen Ordnungen. Ann. Mat. pura appl. (IV) 23 (1944), 123–143.

[4] Haupt-Künneth, Über einige allgemeine Sätze bei Juelschen Ordnungsproblemen. S.-Ber. math.-naturw. Kl., Bayer. Akad. Wiss. 1960, 17–25.

[5] Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung. 1. Bd. (2. Aufl., Berlin 1948).

---

[7] Daß mindestens das Axiom III (1) für die Gültigkeit des nachstehenden Limessatzes für schwache *Punkt*ordnungswerte im allgemeinen nicht entbehrlich ist, geht aus dem in Nr. 1. 4., Anmerkung (3), zitierten Beispiel hervor.