BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960

MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eingeschränkte und uneingeschränkte Partitionen

Herrn Oskar Perron zum 80. Geburtstag am 7. Mai 1960

Von Heinrich Tietze in München

Eingesandt zur Sitzung vom 5. Februar 1960

Lieber Perron! Es ist nur eine kleine Bemerkung, die ich Ihnen vorzulegen vermag. Daß aber meine Wünsche darum nicht weniger herzlich sind, brauche ich nach jahrzehntelangem harmonischen Zusammenwirken nicht besonders zu versichern.

1. Gegeben sei eine endliche oder unendliche Folge von positiven ganzen rationalen Zahlen

$$g_1 < g_2 < \cdots. \tag{1}$$

Für irgendeine positive ganze rationale Zahl m sei $A(m) \geqq 0$ die Anzahl der Zerlegungen von m in Summanden aus (1), wobei gleiche Summanden zugelassen sind und zwei Zerlegungen als nicht verschieden angesehen werden, wenn sie sich nur in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden.[1]

Nimmt man für (1) die Folge *aller* natürlichen Zahlen: $g_1 = 1$, $g_2 = 2, \ldots$, so fällt $A(m)$ zusammen mit der Anzahl der „uneingeschränkten Partitionen“[2] von m. Nimmt man, als ein zweites Beispiel, $m = 300$ und für (1) die Zahlen: $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 5$, $g_4 = 10$, $g_5 = 25$, $g_6 = 50$, $g_7 = 100$, so gelangt man zu der – im Jahre 1910 durch Stiftung eines Preises weiteren

[1] Bekanntlich kann man andere Bedingungen aufstellen, z. B. gleiche Summanden ausschließen, und damit andere Arten von Zerlegungen studieren. Seit jeher haben Beziehungen zwischen den Zerlegungen der verschiedenen Arten Beachtung gefunden. Vgl. etwa G. H. Hardy and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers. Chapters XIX–XXI.

[2] Vgl. Hardy-Wright, l. c., S. 271: „unrestricted partitions“. Für ihre Anzahl ist speziell die Bezeichnung $p(m)$ üblich.

Kreisen schmackhaft gemachten – Frage, auf wie viele Arten ein Thaler bei den damals gangbaren Münzen gewechselt werden kann.[3]

Es möge ein Symbol eingeführt werden, das bei Aufstellung von Formeln für Anzahlen von Partitionen vorteilhaft scheint: Wir setzen

$$(2) \qquad s(g) = 1 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem die Zahl g zur Folge der als Summanden zugelassenen Zahlen (1) gehört oder nicht.

2. Zumindest in Einzelfällen ist es bekannt, daß die Bestimmung von $A(m)$ durch *Rekursionsformeln* möglich ist, ohne daß dabei die einzelnen Zerlegungen selbst berechnet werden müßten. Davon sei hier berichtet.[4]

3. Wenn im Folgenden von einer Zerlegung einer Zahl die Rede ist, so soll stets eine solche gemeint sein, deren Summanden der Folge (1) entnommen sind, da andere Zerlegungen nicht auftreten.

Mit h werde zunächst eine ganze Zahl $\geqq 1$ bezeichnet. Es bedeute dann $B(m; h)$ die Anzahl der Zerlegungen von m, deren Summanden alle $\leqq h$ sind; ferner sei $B^*(m; h)$ die Anzahl derjenigen unter diesen Zerlegungen, bei denen mindestens ein Summand $= h$ wirklich vorkommt.[5] Analog sei $C(m; h)$ die Anzahl der Zerlegungen von m, deren Summanden alle $\geqq h$ sind; darunter seien diejenigen mit mindestens einem Summanden $= h$

---

[3] Vgl. W. Ahrens, Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik, Berlin 1918, Kapitel IV.

[4] Hierzu sei noch bemerkt, daß auch Ahrens, l. c., S. 39–40 im Anschluß an eine Arbeit von E. Hollaender, Zeitschr. für mathem. und naturw. Unterricht, 42. Jahrg., 1911, S. 262 f., ein rekursorisches Verfahren zur Lösung der behandelten Aufgabe bespricht.

[5] Es besagt somit $B^*(m; h) = 0$, daß es gar keine solche Zerlegung gibt. Dies gilt insbesondere dann, wenn die Zahl h nicht zur Folge (1) gehört, also $s(h) = 0$ ist; es kann aber natürlich auch in anderen Fällen gelten (beispielsweise für $g_1 = 2$, $g_2 = 5$, $m = 3$, $h = 2$; ein anderes Beispiel wäre $g_1 = 3$, $g_2 = 5$, $m = 9$, $h = 5$).

in der Anzahl $C^*(m; h)$ vorhanden. Für $m > h$ ist offenbar

$$B^*(m; h) = B(m-h; h), \quad C^*(m; h) = C(m-h; h),$$

falls h zur Folge (1) gehört, andernfalls

$$B^*(m; h) = 0, \quad C^*(m; h) = 0;$$

und man kann beide Fälle zusammenfassen zu[6]

$$(3) \quad B^*(m; h) = s(h)\, B(m-h; h), \; C^*(m; h) = s(h)\, C(m-h; h).$$

4. Die Zerlegungen von m in Summanden $\leqq h$ (wo $m \geqq 1$, $h \geqq 1$) gliedern sich in solche mit wenigstens einem Summanden $= h$ und solche mit lauter Summanden $< h$, also $\leqq h - 1$, wobei die letzteren für $h = 1$ wegfallen. Demnach ist

$$(6) \qquad B(m; h) = B(m; h-1) + B^*(m; h),$$

wenn wir, um auch $h = 1$ einzubeziehen, die Festsetzung treffen:

$$(7) \qquad B(m; 0) = 0.$$

Bemerkt sei, daß man sich bei (6) nicht auf $m \geqq h$ zu beschränken braucht, sondern auch $m < h$ einbeziehen kann; dabei gilt dann

$$(8) \quad B(m; h) = B(m; m) \text{ und } B^*(m; h) = 0 \text{ für } 1 \leqq m < h.$$

In ähnlicher Weise wie (6) findet man

$$(9) \qquad C(m; h) = C(m; h+1) + C^*(m; h),$$

und zwar gültig für $m \geqq 1$, $h \geqq 1$, wobei auch $m < h$ zugelassen werden kann, wenn man die naheliegende Festsetzung trifft

$$(10) \qquad C(m; h) = 0 \text{ und } C^*(m; h) = 0 \text{ für } m < h.$$

---

[6] Man kann (3) auch auf $m \leqq h$ ausdehnen, wenn man (für $h \geqq 1$) festsetzt:

$$(4) \qquad B(0; h) = 1, \qquad C(0; h) = 1$$

$$(5) \qquad B(n; h) = 0, \qquad C(n; h) = 0 \qquad \text{für } n < 0.$$

Aus (6) und (3) sowie aus (9) und (3) ergeben sich dann die *Rekursionsformeln* für $m \geqq 1$, $h \geqq 1$

$$B(m; h) = B(m; h-1) + s(h)\, B(m-h; h), \tag{11}$$

$$C(m; h) = C(m; h+1) + s(h)\, C(m-h; h). \tag{12}$$

5. Wir wollen von da aus noch zu den Rekursionsformeln (13) und (14) gelangen.

Sei $1 \leqq k \leqq m$. Es mögen dann in (11) für h die Zahlen des Bereichs $1 \leqq h \leqq k$ eingesetzt und von allen Gleichungen die Summe gebildet werden. Man erhält dann[7] unter Beachtung von (7)

$$B(m; k) = \sum_{h=1}^{k} s(h)\, B(m-h; h). \tag{13}$$

Sei $1 \leqq k \leqq m$. Werden in (12) für h die Zahlen aus $k \leqq h \leqq m$ eingesetzt, wird dann von allen Gleichungen die Summe gebildet und beachtet man $C(m; m+1) = 0$ (gemäß (10)), so ergibt sich

$$C(m; k) = \sum_{h=k}^{m} s(h)\, C(m-h; h), \tag{14}$$

wobei man für $k = m$ einfach $C(m; m) = s(m)\, C(0; m) = s(m)$ erhält.

6. Speziell kann man nun

$$A(m) = B(m; m) = C(m; 1)$$

nach einer der Formeln (13), (14) berechnen. Außer (4), (8) und (10) wird man dann

$$B(m; 1) = s(1) \quad \text{für} \quad m \geqq 1 \tag{15}$$

bzw.

$$C(m; m) = s(m) \tag{16}$$

---

[7] Für den speziellen Fall der gewöhnlichen („uneingeschränkten") Partitionen (vgl. Nr. 1), wo alle $s(h) = 1$ sind, siehe wegen dieser Formel: Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren I. Rekursionsformeln. Sitz.-Ber. der mathemat.-naturw. Abt. der Bayer. Akad. d. Wiss. 1940, S. 23, Anm. 2, Formel (1).

sowie

$$(17) \qquad s(m)\, s(m) = s(m)$$

verwenden.

So gewinnt man beispielsweise aus (13)

$$A(5) = B(5;5) = \sum_{h=1}^{5} s(h)\, B(5-h;\, h),$$

wobei – wieder gemäß (13) –

$$B(3;2) = s(1)\, B(2;1) + s(2)\, B(1;2),$$
$$B(2;2) = s(1)\, B(1;1) + s(2)\, B(0;2)$$

ist. Und da sich aus (8)

$$B(2;3) = B(2;2), \quad B(1;4) = B(1;2) = B(1;1);$$

ferner aus (15)

$$B(4;1) = B(2;1) = B(1;1) = s(1)$$

und aus (4) noch

$$B(0;5) = B(0;2) = 1$$

ergibt, so erhält man

$$B(5;5) = s(1)\, s(1) + s(2)\,\big(s(1)\, s(1) + s(2)\, s(1)\big) + \\ + s(3)\,\big(s(1)\, s(1) + s(2)\big) + s(4)\, s(1) + s(5),$$

unter Beachtung von (17) also:

$$(18) \qquad A(5) = s(1) + 2s(2)\, s(1) + s(3)\, s(1) + s(3)\, s(2) + \\ + s(4)\, s(1) + s(5).$$

Man mag aber auch (14) heranziehen und gewinnt dann

$$A(5) = C(5;1) = \sum_{h=1}^{5} s(h)\, C(5-h;\, h),$$

wobei – wieder gemäß (14) –

$$C(4;1) = \sum_{h=1}^{4} s(h)\, C(4-h;\, h),$$

$$C(3;1) = \sum_{h=1}^{3} s(h)\, C(3-h;\, h),$$

$$C(2;1) = s(1)\, C(1;1) + s(2)\, C(0;2),$$

$$C(3;2) = s(2)\, C(1;2) + s(3)\, C(0;3)$$

ist. Und da sich aus (10)

$$C(2;3) = C(1;4) = C(1;3) = C(1;2) = 0,$$

ferner aus (16)

$$C(2;2) = s(2), \quad C(1;1) = s(1)$$

und aus (4) noch

$$C(0;5) = C(0;4) = C(0;3) = C(0;2) = 1)$$

ergibt, so erhält man

$$\begin{aligned} C(2;1) &= s(1)\, s(1) + s(2), \\ C(3;2) &= s(3), \\ C(3;1) &= s(1)\, C(2;1) + s(3) = s(1)^3 + s(1)\, s(2) + s(3), \\ C(4;1) &= s(1)\, C(3;1) + s(2)\, s(2) + s(4) = \\ &= s(1)^4 + s(1)^2\, s(2) + s(1)\, s(3) + s(2)^2 + s(4), \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} C(5;1) &= s(1)\, C(4;1) + s(2)\, C(3;2) + s(5) = \\ &= s(1)^5 + s(1)^3\, s(2) + s(1)^2\, s(3) + \\ &+ s(1)\, s(2)^2 + s(1)\, s(4) + s(2)\, s(3) + s(5), \end{aligned}$$

was, unter Beachtung von (17), für $A(5) = C(5;1)$ wieder auf (18) führt. Das gilt für irgendwelche eingeschränkte oder uneingeschränkte Partitionen.

Für die gewöhnlichen (uneingeschränkten) Partitionen, wo alle natürlichen Zahlen als Summanden zugelassen und demgemäß für $g = 1, 2$ usw. bis $g = 5$ alle Zahlen $s(g)$ gleich 1 zu setzen sind, gibt das $A(5) = p(5) = 7$.